Linear Algebra for Statistics

Chapter 9

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 9 가우스 소거법과 선형연립방정식

선형연립방정식의 해를 구하는 알고리즘 중에서 가장 대표적인 것은 가우스 소거법 (Gaussian elimination)이다.

Figure 9.1: 가우스

9.1 행사다리꼴(Row Echelon Form)

Definition

행렬 $A_{m\times n}$ 에 대하여, 아래 조건을 만족하면 이 행렬을 행사다리꼴(row echelon form)이라 한다

1. 모든 원소가 0인 행이 있다면 그 행렬의 맨 아래 행에 위치한다.
2. 각 행에서 행방향으로 처음 등장하는 0이 아닌 원소를 선행원소(leading entry)라 부르고, $i+1$ 번째 행의 선행원소는 i 번째 행의 선행원소보다 오른쪽에 위치한다.

Example

다음은 행사다리꼴의 예이다. 여기서 @는 각 행의 선행원소를, $*$는 임의의 숫자를 의미한다.

$$\begin{pmatrix} @ & * \\ 0 & @ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} @ & * & * & * & * \\ 0 & @ & * & * & * \\ 0 & 0 & @ & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & @ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & @ & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & @ & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & @ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Theorem (정리 9.1)

행사다리꼴의 $\mathbf{0}$*이 아닌 모든 행은 서로 선형독립(linearly independent)이다.*

Proof.

예를 들어 행사다리꼴의 모습이 아래와 같다고 가정하자.

$$\begin{pmatrix} 0 & @ & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & @ & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & @ & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

아래와 같이 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행벡터의 선형결합이 $\mathbf{0}$ 이 되는 경우는 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 뿐임을 알 수 있다.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ @ \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ @ \\ * \\ * \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ @ \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

동일한 논리가 모든 행사다리꼴에 적용되므로, 행사다리꼴 행렬의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 모든 행은 서로 선형독립이다. □

Definition

행렬 $A_{m\times n}$ 가 행사다리꼴일 때, 아래 조건을 만족하면 이 행렬은 기약행사다리꼴(reduced row echelon form)이라 한다

3. 선행원소는 모두 1이며, 선행원소가 있는 열의 선행원소를 제외한 다른 원소는 모두 0 이다.

Example

다음은 기약행사다리꼴의 예이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

9.2 기본행연산(Elementary Row Operation)

모든 행렬은 세가지 행연산(row operation)을 통해 행사다리꼴 및 기약행사다리꼴로 만들 수 있다. 이를 기본행연산(elementary row operation, ERO)이라고 한다.

Definition

아래의 연산을 기본행연산이라 한다.

1. $R_{i,j}$: i 번째 행과 j 번째 행의 위치를 바꾸는 연산
2. $R_{i(c)}$: i 번째 행에 0이 아닌 상수 c 를 곱한 벡터로 i 번째 행을 대체하는 연산
3. $R_{i,j(c)}$: j 번째 행에 0이 아닌 상수 c 를 곱한 후, 그 값을 i 번째 행에 더한 벡터로 i 번째 행을 대체하는 연산

Example

아래의 행렬을 기본행연산을 사용하여 기약행사다리꼴로 표현하라.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 아래와 같은 과정을 거쳐 기약행사다리꼴을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1,2(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

$$\xrightarrow{R_{2,1(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(1/2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

Remark 정방행렬 $A_{n\times n}$ 을 행사다리꼴로 만들면 항상 상삼각행렬이 된다.

Definition

두 행렬 $A_{m\times n}, B_{m\times n}$ 이 기본행연산을 통해 동일한 행렬로 표현되면, 두 행렬은 서로 행동치 (row equivalent)라고 한다.

Example

아래 두 행렬이 행동치임을 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 먼저 B 에 대하여

$$B \xrightarrow{R_{1(1/3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(1/3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

Example (continue)

이제 A 에 대하여,

$$A \xrightarrow{R_{2,1(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(1/3)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

두 기약행사다리꼴의 형태가 같으므로 행동치이다.

Theorem (정리 9.2)

행렬 A 가 기본행연산(ERO)을 통해 행사다리꼴(혹은 기약행사다리꼴)인 B 가 될 때, 즉

$$A \xrightarrow{ERO} B \tag{9.11}$$

이면, 아래 성질을 만족한다.

(1) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$

(2) *B 의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행들은 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저(basis)이다.*

(3) *$Rank(A)$ 는 B 의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행의 수와 일치한다 (여기서 $Rank(A)$ 란 행렬 A 의 선형독립인 행의 수 혹은 열의 수를 의미한다)*

Proof.

(1) 행의 위치 변환 및 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행에 상수를 곱하여도 이전과 이후의 행렬의 행공간은 변하지 않는다. A 의 행렬에 $R_{i,j(c)}$ 연산을 하여 얻은 행렬을 B 라 하면, B 의 행들은 A 의 행들의 선형결합으로 주어지므로 $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$ 이다. 반대연산인 $R_{i,j(-c)}$ 에 의해 B 가 A 로 변환되므로 $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(B)$ 이다. 따라서 $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A)$ 이다.

Proof.

(2) B 가 행사다리꼴이면 $\mathbf{0}$ 이 아닌 모든 행은 서로 선형독립이다. 또한 $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ 이므로, B 의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행들은 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저이다.

(3) $\mathrm{Rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(B))$ 이므로 B 의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행의 수와 일치한다.

$\square$

9.3 가우스 소거법과 선형연립방정식

선형연립방정식에서, 방정식 양변에 임의의 상수를 곱하거나, 두 식의 순서를 바꾸거나, 두 식을 더하여도 방정식의 해는 동일하다. 이는 행렬의 기본행연산과 동일한 과정이며 이를 이용하여 방정식의 해를 구하는 방법이 가우스 소거법이다.

다음 연립방정식을 고려하자.

$$x + y = 3 \tag{9.12}$$

$$x - y = 1 \tag{9.13}$$

해는 $x = 2, y = 1$ 이다. 위의 식에서 (9.13) 대신 (9.13) 에 2를 곱한 식으로 대치하면 연립방정식은

$$x + y = 3 \tag{9.14}$$

$$2x - 2y = 2 \tag{9.15}$$

이며 해는 여전히 $x = 2, y = 1$로 동일하다.

또한 (9.12) 대신에 (9.12) + 2×(9.13) 을 대치하면 연립방정식은

$$3x - y = 5 \tag{9.16}$$

$$x - y = 1 \tag{9.17}$$

이며 해는 여전이 이전과 동일함을 알 수 있다.

이를 일반화하여, 선형연립방정식

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

를 만족하는 $\mathbf{x}$ 는 확대행렬(augmented matrix) $D = (A : \mathbf{b})$ 에 기본행연산

$$(A : \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (M : \mathbf{l})$$

을 통해 얻어진 선형연립방정식

$$M\mathbf{x} = \mathbf{l}$$

을 동시에 만족한다. 이를 가우스 소거법(Gaussian elimination)이라 한다.

다음 선형연립방정식에 대해 가우스 소거법을 적용하여 해를 구하여 보자.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 4 \\ x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

이를 행렬로 표현하면

$$A\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =: \mathbf{b}$$

이다. 따라서 확대행렬 D 는 아래와 같이 주어진다.

$$D = (A : \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

D 행렬에 기본행연산을 사용하여 아래와 같이 A 행렬 부분을 기약행사다리꼴로 만든다.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,1(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3,1(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,2(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,3(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2(-1/3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

따라서 선형연립방정식의 해는 아래의 선형연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2/3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

의 해와 동일하다. 따라서 해는 $x = -4/3, y = -2/3, z = 2$ 으로 손쉽게 구할 수 있다.

위의 단계에서 더 진행하면

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,2(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (I_3 : \mathbf{x})$$

따라서 선형연립방정식의 해는 아래의 선형연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

의 해와 동일하며 동일한 해를 바로 얻을 수 있다

Definition

선형연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해를 구하기 위한 아래의 알고리즘

1. 확대행렬(augmented matrix) $D = (A : \mathbf{b})$ 를 만든다.
2. 행렬 D 에 대해 기본행연산을 통해 기약행사다리꼴 $(M : \mathbf{l})$ 을 만든다.
3. 방정식 $M\mathbf{x} = \mathbf{l}$ 의 해를 구한다.

을 가우스-조던(Gauss-Jordan) 알고리즘이라 한다.

얻어진 기약행사다리꼴 $(M : \mathbf{l})$ 이 $(I : \mathbf{l})$ 의 형태라면 $\mathbf{l}$ 이 선형연립방정식의 유일해가 되며, 기약사다리꼴의 마지막 행이 $(0, \cdots, 0|c)$ $(c \neq 0)$ 이면 방정식의 해는 존재하지 않는다. 만일 기약사다리꼴의 마지막 행이 $(0, \cdots, 0|0)$ 이면 방정식의 해는 무수히 많게 된다.

Example

아래 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+2z=4 \\ 3x-6y+6z=12 \end{cases}$$

(풀이) 확대행렬에 대해 가우스-조던 알고리즘을 이용하면,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,1}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3,1}(-3)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,2}(-3)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2}(-1/3)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Example (continue)

따라서, 연립방정식의 해는 무수히 많게 되며 해의 형태는

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}z = \frac{4}{3} \\ y - \frac{1}{3}z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

를 만족하게 되어 $(x, y, z) = (-\frac{4}{3}t + \frac{4}{3}, \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}, t)$ (t 는 실수) 의 해를 갖는다.

Example

다음 연립방정식을 가우스-조던 알고리즘을 이용하여 해가 없음을 보여라

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Example

다음 연립방정식을 가우스-조던 알고리즘을 이용하여 해가 무수히 많음을 보여라

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

9.4 행렬을 이용한 기본행연산

기본행연산은 연산행렬을 이용하여 표현할 수 있다. 예를 들어 $A_{5\times 5}$ 의 경우를 이용하여 살펴보자.

$R_{2,4}$ 연산 :

$$R_{2,4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{2,4}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$R_{2(c)}$ 연산 :

$$R_{2(c)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{2(c)}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & ca_{24} & ca_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$R_{2,3(c)}$ 연산 :

$$R_{2,3(c)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{2,3(c)}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} + ca_{31} & a_{22} + ca_{32} & a_{23} + ca_{33} & a_{24} + ca_{34} & a_{25} + ca_{35} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Example

아래 행렬을 기약행사다리꼴로 만드는 과정에 필요한 연산행렬을 순서대로 나열하라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(풀이) 다음의 과정을 통해 기약행사다리꼴로 변형한다고 하자.

$$A \xrightarrow{R_{1,2(-1)}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2,3(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1,2(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{3(1/4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,3(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2,3(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example (continue)

위의 기본행연산에 대응하는 연산행렬은 아래와 같다.

$$R_{1,2(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{2,3(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{1,2(-3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{3(1/4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$R_{1,3(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{2,3(-2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 기약행사다리꼴을 만드는 과정은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_{2,3(-2)}R_{1,3(4)}R_{3(1/4)}R_{1,2(-3)}R_{2,3}R_{2,3(1)}R_{1,2}R_{1,2(-1)}A = I_3.$$

Example

아래 행렬 A 의 영공간(null space)을 구하라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{9.20}$$

(풀이) 행렬 A 의 영공간은 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 을 만족하는 $\mathbf{x}$ 들의 집합을 의미하며, 이에 대응하는 확대행렬은 아래와 같다.

$$(A|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

이에 대해 아래와 같이 기본행연산을 수행할 수 있다.

Example (continue)

$$(A|\mathbf{0}) \xrightarrow{R_{1,2(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3(1/2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,2(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,3(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3(2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

따라서, 해는 $x = 0, y = 0, z = 0$ 이므로 행렬 A 의 영공간은 $\{\mathbf{0}\}$ 이다.