Linear Algebra for Statistics

Chapter 11

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 11 크래머 공식과 역행렬 공식

Figure 11.1: 크래머

11.1 크래머 공식(Cramer's Rule)

Theorem (정리 11.1 Cramer's Rule)

선형방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 가 아래와 같을 때

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{11.1}$$

위 방정식의 해는 아래와 같이 구할 수 있다.

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.2}$$

여기서, B_k 는 행렬 A 에서 k 번째 열을 벡터 $\mathbf{b}$ 로 교체한 행렬을 의미한다.

Proof.

먼저 위의 공식대로 x_1 의 값을 구해보면

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Bigg/ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

이 되고, 해는 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 을 만족해야 하므로, 위의 값은 다음과 동일하다.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Bigg/ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

Proof.

여기서 $\det(A) = \det(A^T)$ 임을 고려하면 윗 식의 분자는

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \cdots & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

이 되고, 여기에 기본행연산 $R_{1,2(-x_2)}, R_{1,3(-x_3)}, \ldots, R_{1,n(-x_n)}$ 을 순차적으로 수행하면 아래와 같다.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{21}x_1 & \cdots & a_{n1}x_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = x_1 \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proof.

따라서 $\det(A) = \det(A^T)$ 을 다시 적용하면, 식 (11.4) 는

$$x_1 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = x_1$$

이 되어 x_1 과 일치한다. 같은 방법으로 $x_2, \ldots, x_n$ 도 공식이 만족함을 보일 수 있다.

□

Example

아래 연립방정식에 대하여 크래머 공식을 이용하여 해를 구하라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

(풀이)

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3)(-1)^2(0) + (0)(-1)^3(-1) + (1)(-1)^4(-1) = -1,$$

$$\det(B_1) = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2)(-1)^2(0) + (1)(-1)^3(-1) + (2)(-1)^4(-1) = -1,$$

Example (continue)

(풀이)

$$\det(B_2) = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (3)(-1)^2(-1) + (0)(-1)^3(4) + (1)(-1)^4(3) = 0,$$

$$\det(B_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (3)(-1)^2(1) + (0)(-1)^3(-6) + (1)(-1)^4(-4) = -1$$

이므로

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = 1, \qquad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = 0, \qquad x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = 1 \tag{11.5}$$

이다.

Example

다음 연립방정식의 해를 구할 수 없는 이유를 해를 크래머 공식을 통해 설명하라.

$$
\begin{cases}
x_2 - 2x_3 = 2 \\
x_2 - 2x_3 = 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 2.
\end{cases}
$$

11.2 역행렬 공식

가우스-조던 알고리즘과 다른 방식으로, 직접 역행렬을 구하는 공식을 설명한다.

Definition

행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여, 여인수(cofactor)를 $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ 로 정의할 때, 행렬 A 의 수반행렬(adjoint matrix)은 아래와 같이 정의한다.

$$\mathrm{adj}(A) = \{C_{ij}\}^T_{n\times n}. \tag{11.6}$$

즉, 수반행렬의 (i,j) 번째 원소는 C_{ji} 이다.

Example

아래 행렬 A 의 수반행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(풀이)

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\det(d) = d,$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\det(c) = -c,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\det(b) = -b,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\det(a) = a$$

이므로

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Example

아래 행렬 A 의 수반행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(풀이)

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 5,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6, \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

이므로

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Theorem (정리 11.2)

행렬 $A_{n\times n}$가 정칙행렬이면 다음이 성립한다.

$$adj(A)\cdot A = A\cdot adj(A) = \det(A)\cdot I_n. \tag{11.7}$$

Proof.

먼저 $A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$ 임을 보이자. $A\cdot \mathrm{adj}(A)$ 의 (i,j) 번째 원소는

$$\{A\cdot \mathrm{adj}(A)\}_{(i,j)} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\begin{pmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{pmatrix} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

이다. 식 (10.6) 과 Chapter 10 의 연습문제 12의 식 (10.49) 을 이용하면

$$\{A\cdot \mathrm{adj}(A)\}_{(i,j)} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \tag{11.8}$$

이므로 $A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$ 가 성립한다. 같은 방식으로 $\mathrm{adj}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$ 도 증명할 수 있다. □

Theorem (정리 11.3)

행렬 $A_{n\times n}$ 이 정칙행렬일 때, 역행렬 A^{-1} 은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{\det(A)} \{C_{ij}\}^T_{n\times n}, \tag{11.9}$$

Proof.

정리 11.2 에서 보인

$$\mathrm{adj}(A)\cdot A = A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$$

에서, 양변을 $\det(A)$ 로 나누면

$$\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)\cdot A = A\cdot \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = I_n \tag{11.10}$$

이므로, 역행렬의 정의에 의해 $\frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$ 는 A 의 역행렬이다. □

Example

정리 11.3을 이용하여 아래 역행렬 공식을 확인하라.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Theorem (정리 11.4 역행렬을 이용한 선형방정식의 해)

선형방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *의 해는,* $\det(A) \neq 0$ *이라고 할 때,*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{11.11}$$

로 주어진다.

Proof.

다음식은 증명으로 충분하다.

$$\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \tag{11.12}$$

$\square$

Example

정리 11.4를 이용하여 아래 연립방정식의 해를 구하라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

11.3 역행렬의 성질

대각원소 이외의 모든 원소가 0인 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)이라 하고 다음과 같이 정의하자.

$$\mathrm{diag}(d_{ii})_{i=1,2,\ldots,n} = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proposition (11.5)

대각행렬 $A = diag(d_{ii})_{i=1,2,\ldots,n}$ 의 모든 대각원소가 $d_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 이라 하자. A 의 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = diag(1/d_{ii})_{i=1,2,\ldots,n}. \tag{11.13}$$

Remark 만일 $c \neq 0$ 이면 $\{cI_n\}^{-1} = \frac{1}{c} I_n$ 이다.

Proposition (11.6)

행렬 $A_{n\times n}$가 직교행렬이면 $A^{-1} = A^T$ 이다.

Proof.

직교행렬의 정의에 의해 $A^TA = AA^T = I_n$ 이 성립한다. 역행렬의 정의에 의해 A^T 는 A 의 역행렬의 조건을 만족한다. □

Proposition (11.7)

행렬 $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ 의 역행렬 A^{-1}, B^{-1} 이 존재한다면, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 이다.

Proof.

$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ 이고

$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ 이므로, $B^{-1}A^{-1}$ 은 AB 의 역행렬이다. □

Proposition (11.8)

행렬 $A_{n\times n}$의 역행렬이 존재할 때, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ *이다.*

Proof.

행렬곱에 대한 전치의 성질에 의해, $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n$ 이고
$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n$ 이 성립하므로 A^T 의 역행렬은 $(A^{-1})^T$ 이다. □

Proposition (11.9)

크기가 $n \times n$ *인 기본행연산행렬* $R_{i,j}$ *에 대하여,* $R_{i,j}^{-1} = R_{i,j}$ *이다.*

Proof.

$R_{i,j}$ 는 i 행과 j 행을 교환하는 연산행렬이므로, $R_{i,j}R_{i,j} = I_n$ 이다. 따라서 $R_{i,j}$ 의 역행렬은 $R_{i,j}$ 이다. □

Proposition (11.10)

크기가 $n \times n$ 인 기본행연산행렬 $R_{i,j(c)}$ 에 대하여, $R_{i,j(c)}^{-1} = R_{i,j(-c)}$ 이다.

Proof.

$R_{i,j(c)}$ 가 i 행에 c 를 곱한 j 행을 더하는 연산이므로, $R_{i,j(c)}R_{i,j(-c)} = I_n$ 과 $R_{i,j(-c)}R_{i,j(c)} = I_n$ 이 성립한다. 따라서 $R_{i,j(c)}$ 의 역행렬은 $R_{i,j(-c)}$ 이다. □

Proposition (11.11)

크기가 $n \times n$ 인 기본행연산행렬 $R_{i(c)}$ 에 대하여, $R_{i(c)}^{-1} = R_{i(1/c)}$ 이다.

Proof.

$R_{i(c)}$ 는 i 행에 c 를 곱하는 연산행렬이므로, $R_{i(c)}R_{i(1/c)} = I_n$ 과 $R_{i(1/c)}R_{i(c)} = I_n$ 이 성립한다. 따라서 $R_{i(c)}$ 의 역행렬은 $R_{i(1/c)}$ 이다. □

Theorem (정리 11.12 역행렬의 유일성)

행렬 $A_{n\times n}$ 의 역행렬이 존재할 경우, 그 역행렬은 오직 한 개 뿐이다.

Proof.

두개의 행렬 C, D 가 A 의 역행렬이라고 하면 $CA = AC = I_n = DA = AD$ 이므로,

$$C = CI_n = C(AD) = (CA)D = I_nD = D$$

이므로 역행렬은 동일하고 유일하다. □

Example

행렬 $A_{n\times n}$ 의 역행렬이 A^{-1} 이라 할 때, A^2 의 역행렬은 무엇인가?

11.4 분할행렬의 역행렬

Theorem (정리 11.13)

크기가 같은 두 행렬 A, B 가 아래와 같이 동일한 크기의 분할행렬로 표현될 때,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

다음이 성립한다.

(1)

$$A \pm B = \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

(2)

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ B_{12}^T & B_{22}^T \end{pmatrix} \tag{11.15}$$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

Example

아래 행렬 A 에 대하여 A^T 와 A^TA 를 각각 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 3I_3 & \mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T \\ 4\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T & 2I_2 \end{pmatrix}. \tag{11.17}$$

(풀이)

$$A^T = \begin{pmatrix} 3I_3 & 4\mathbf{1}_2\mathbf{1}_2^T \\ \mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T & 2I_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^TA &= \begin{pmatrix} 3I_3 & 4\mathbf{1}_2\mathbf{1}_2^T \\ \mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T & 2I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3I_3 & \mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T \\ 4\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T & 2I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9I_3 + 16\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T & 3\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T + 8\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T \\ 3\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T + 8\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T & \mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T + 4I_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9I_3 + 32\mathbf{1}_3\mathbf{1}_3^T & 3\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T + 8\mathbf{1}_3\mathbf{1}_2^T \\ 3\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T + 8\mathbf{1}_2\mathbf{1}_3^T & 3\mathbf{1}_2\mathbf{1}_2^T + 4I_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Theorem (정리 11.14 분할행렬의 행렬식)

행렬 P 가 다음과 같이 분할되었다고 가정할 때,

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

(1) *만일 $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이고 $CD = DC$ 이면 $\det(P) = \det(AD - BC)$ 이다.*

(2) *만일 D^{-1} 가 존재하면 $\det(P) = \det(AD - BD^{-1}CD)$ 이다.*

(증명생략) 교재에는 A, B, C, D 가 동일한 크기임에 대한 전제가 없으나, 이 전제하에서만 조건 $CD = DC$ 및 D^{-1} 존재성을 말할 수 있음에 유의할 것.

Remark 다음이 성립하지 않음에 유의할 것

$$\det(P) \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \tag{11.18}$$

Theorem (정리 11.15)

행렬 A 가 다음과 같은 블록대각행렬(block diagonal matrix)일 때 다음이 성립한다.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

(1) $Rank(A) = Rank(A_{11}) + Rank(A_{22})$

(2) A_{11}, A_{22}*가 정방행렬인 경우,* $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})$

(3) A_{11}, A_{22}*가 정방행렬인 경우, 만일* $\det(A_{11}) \neq 0, \det(A_{22}) \neq 0$ *이라면,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Proof.

(1) $\mathrm{Rank}(A)$ 는 A 의 선형독립인 행의 개수이며, A 가 블록대각행렬인 경우 A_{11} 과 A_{22} 간에 선형종속인 행이 존재하지 않으므로 위의 식이 성립한다.

Proof.

(2) 만일 $A_{11}, A_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 이라면, 위에 주어진 영행렬은 $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 이고 $0_{n\times n}A_{22} = A_{22}0_{n\times n} = 0_{n\times n}$ 이 성립하므로 정리 11.14 에 의해

$$\det(A) = \det(A_{11}A_{22} - 0_{n\times n}0_{n\times n}) = \det(A_{11})\det(A_{22})$$

가 성립한다. $A_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}, A_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 인 경우도 위의 성질이 성립하나 자세한 증명은 생략한다.

(3)
$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = I_n.$$

□

위의 (2) 및 (3)에 대해, 교재에서는 A_{11}, A_{22}의 정방행렬 조건이 언급이 되어 있지 않으나 정방행렬이 아닌 경우 성립하지 않는다.

Theorem (정리 11.16 분할행렬의 역행렬)

행렬 P 가 아래와 같이 분할되고 부분행렬 A, D가 정방행렬일 때,

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

역행렬 P^{-1} 는 아래와 같다.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CQ^{-1} & D^{-1}(I + CQ^{-1}BD^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{11.19}$$

여기서 $Q = A - BD^{-1}C$ 이며, 계산에 필요한 부분행렬들의 역행렬이 존재한다고 가정한다.

(증명생략)

A, D의 정방행렬 조건은 위 정리에서 필요하나 교재에서 누락되어 있음에 유의할 것

Example

아래 분할행렬에서 A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1} 가 존재한다고 가정할 때,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

의 행렬식을 구하고 역행렬을 구하라.

(풀이) 부분행렬 A_{22} 가 정칙행렬이므로 정리 11.14 (2) 에 의해

$$\det(A) = \det(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{22}^{-1}0A_{22}) = \det(A_{11}A_{22}) = \det(A_{11})\det(A_{22}) \tag{11.21}$$

이다. 역행렬은 정리 11.16을 이용하면 $Q = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}0 = A_{11}$ 이므로

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}0A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}(I + 0A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

이다.

Example

아래 분할행렬에서 A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1} 가 존재한다고 가정할 때,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

의 행렬식을 구하고 역행렬을 구하라.