Linear Algebra for Statistics

Chapter 13

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 13 행렬의 대각화

13.1 행렬의 대각화(Diagonalization)

정방행렬 $A_{n\times n}$ 이 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 과 대응되는 고유벡터 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 을 갖는다면 다음을 만족함을 기억하자.

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13.1}$$

Theorem (정리 13.1)

정방행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여 고유값이 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 이고 대응되는 고유벡터가 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 이라면

$$AC = CD \tag{13.2}$$

가 성립한다. 여기서 D 와 C 는 다음과 같다.

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

$$C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n) \tag{13.4}$$

Proof.

좌변은

$$AC = A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n) = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \cdots, A\mathbf{u}_n) \tag{13.5}$$

으로 주어지고, 우변은

$$\begin{aligned} CD &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} && (13.6) \\ &= (\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2, \cdots, \lambda_n\mathbf{u}_n) && (13.7) \\ &= (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \cdots, A\mathbf{u}_n) && (13.8) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $AC = CD$ 이다. □

Example

아래 행렬의 고유값, 고유벡터를 이용해 $AC = CD$ 임을 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(풀이) A 가 상삼각행렬이므로 고유값은 $\lambda = 1$ 이 된다(중근). 그러므로 고유벡터는

$$(A - \lambda I_2|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

으로부터

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ 는 } 0 \text{ 이 아닌 실수}) \tag{13.9}$$

이다. 여기에 $t = 1, 2$를 넣어 두개의 고유벡터를 얻고 이를 이용하면 다음을 얻는다.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.10}$$

Example (continue)

(풀이) 이제 아래의 계산으로부터

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

$AC = CD$ 임을 알 수 있다.

Definition

정방행렬 A 에 대하여, $AC = CD$ 를 만족시키는 행렬 C 가 정칙행렬이면,

$$C^{-1}AC = D \tag{13.13}$$

가 되고, 행렬 A 는 **대각화 가능하다**(diagonalizable) 라고 한다. 이 때, C **가** A **를 대각화한다**라고 말한다.

Theorem (정리 13.2 선형독립인 고유벡터)

행렬 $A_{n\times n}$ 이 서로 다른 n 개의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 을 가진다면, 행렬 A 는

$$C^{-1}AC = D$$

로 대각화 가능하다.

Proof.

행렬 A 가 서로 다른 고유값을 가진다면 정리 12.3에 의해 대응하는 고유벡터 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 은 선형독립이다. 따라서, 선형독립인 열벡터로 이루어진 정방행렬 C 는 정칙행렬이 되므로 C^{-1} 가 존재하여 A 는 위와 같이 대각화 가능한 행렬이 된다. □

Corollary (따름정리 13.3)

행렬 $A_{n\times n}$ 가 대각화 가능할 때 다음이 성립한다.

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k\text{ 개}} = CD^kC^{-1}. \tag{13.14}$$

Proof.

A의 고유벡터를 열벡터로 하는 행렬 C 는 정칙행렬이므로 $AC = CD$ 로부터 $A = CDC^{-1}$ 이다. 따라서 A^2 는

$$A^2 = AA = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD(C^{-1}C)DC^{-1} = CD^2C^{-1} \tag{13.15}$$

이다. 같은 방식으로 $A^k = CD^kC^{-1}$ 임을 보일 수 있다. □

Example

행렬 A 의 고유값이 $1, 4$이고, 각각 대응되는 고유벡터는 아래와 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

행렬 A 를 대각화시킬 수 있는지 판단하고, 대각화를 시행하라.

(풀이) 고유값이 $1, 4$ 로 서로 다르므로 대각화 가능하다. 고유값과 고유벡터를 열벡터로 하는 행렬을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

이 때,

$$C^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{13.16}$$

이므로 다음과 같이 대각화 된다.

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{13.17}$$

Example

각 고유값에 대해 고유벡터는 무한개 존재함을 알고 있다. 위 문제에서 고유값은 그대로 두고 고유벡터 $\mathbf{u}_i$에 2를 곱한 고유벡터 $\mathbf{u}_i' = 2\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2)$ 를 열벡터로 하는 행렬 $C' = (\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2')$ 를 이용하여 A 를 대각화하여

$$(C')^{-1}AC' = D \tag{13.18}$$

가 성립하는지 확인하라.

Definition

정방행렬 A 에 대하여, $C^{-1}AC = B$ 가 되는 행렬 C 가 존재하면, A **는** B **와 닮았다(**A **is similar to** B**)**라고 하고

$$A \sim B \tag{13.19}$$

라고 표기한다.

Theorem (정리 13.4)

행렬 $A_{n\times n}$ 와 행렬 $B_{n\times n}$ 가 닮았다면 A 의 고유값과 B 의 고유값은 일치한다.

Proof.

A 와 B 가 닮았으므로, $C^{-1}AC = B$ 를 만족하는 C 가 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) \;=\; \det(C^{-1}(A - \lambda I_n)C) \\ &= \det(C^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(C) \\ &= \det(C^{-1})\det(C)\det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(C^{-1}C)\det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(I_n)\det(A - \lambda I_n) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \end{aligned} \tag{13.20}$$

이 되어 특성방정식이 동일하다. 따라서 고유값도 일치한다. □

Proposition (13.5)

다음은 닮은 행렬의 특성이다.

(1) $A \sim A$

(2) $A \sim B$ *이면,* $B \sim A$ *이다.*

(3) $A \sim B$ *이고* $B \sim C$ *이면,* $A \sim C$ *이다.*

(4) A *가 대각행렬* D *와 닮았을 때,* A *는 대각화 가능하다.*

Proof.

연습문제 참조 □

13.2 대칭행렬의 대각화

정방행렬이 대각화 가능하기 위해서는 서로 다른 고유값이 존재하거나 선형독립인 고유벡터가 존재하여 C^{-1} 이 존재하여야 한다.

대칭행렬의 경우, 항상 실수의 고유값을 가지며 서로 직교하는 고유벡터가 존재한다. 다음 정리들은 증명없이 사용한다.

Theorem (정리 13.6 대칭행렬의 고유값)

정방행렬 A 가 대칭행렬이면, 특성방정식 $p(\lambda) = 0$ 의 해는 모두 실수이다.

Theorem (정리 13.7 대칭행렬의 고유벡터)

정방행렬 $A_{n\times n}$ 가 대칭행렬이고, 고유값 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 에 대응하는 고유벡터를 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 이라면 다음이 성립한다.

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{13.21}$$

Example

아래 대칭행렬의 고유값과 고유벡터를 구하고

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 고유값이 서로 다른지 확인하라.

(2) 고유벡터가 서로 직교하는지 확인하라.

(풀이)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-1) = 0 \tag{13.22}$$

으로부터 고유값은 $\lambda = 1, 6$으로 서로 다른 값을 갖는다.

Example (continue)

(풀이) 고유값 $\lambda_1 = 1$ 에 대응하는 고유벡터는

$$(A - \lambda I_2|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{13.23}$$

으로부터 $\mathbf{u}_1 = (2, 1)^T$ 이다. 같은 방식으로 $\lambda_2 = 6$ 에 대응하는 고유벡터는 $\mathbf{u}_2 = (1, -2)^T$ 로 얻을 수 있다. 따라서

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \tag{13.24}$$

이 되어 두 고유벡터는 서로 직교한다.

Theorem (정리 13.8 대칭행렬의 대각화)

행렬 $A_{n\times n}$ *가 대칭행렬이고 고유값이* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *이라고 하면*

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{13.25}$$

으로 정의할 때,

$$P^{-1}AP = P^T AP = D \tag{13.26}$$

가 되는 직교행렬 P *가 항상 존재한다.*

Proof.

행렬 A 의 고유값들에 대응하는 길이가 1인 고유벡터를 열벡터로 하는 행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n). \tag{13.27}$$

고유값과 고유벡터의 정의에 의해 다음이 성립한다.

$$AP = PD. \tag{13.28}$$

Proof.

P 의 모든 열이 직교정규벡터이므로 P 는 직교행렬이다. 따라서 $P^{-1} = P^T$ 로 역행렬이 존재하므로

$$P^{-1}AP = P^{-1}PD = D \tag{13.29}$$

이 성립한다. $P^{-1} = P^T$ 임을 이용하면

$$P^TAP = D \tag{13.30}$$

가 되어 대각화가 가능하다. □

Theorem (정리 13.9 행렬의 계수와 고유값)

행렬 $A_{n\times n}$ 가 대칭행렬이면 $Rank(A)$ 는 행렬 A 의 0이 아닌 고유값의 개수(중근포함)와 일치한다.

Proof.

대칭행렬의 대각화 성질을 이용하면

$$A = PDP^T \tag{13.31}$$

가 성립하는 직교행렬 P 가 존재한다. 그러므로 Proposition 10.1(6)-(7) 에 의해

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(PDP^T) = \text{Rank}(DP^T) = \text{Rank}(D)$$

를 만족하므로, 이는 A 의 0 이 아닌 고유값의 개수와 일치한다. □

Example

아래 행렬들의 계수를 계산하고, 대각화를 실행하라. 그 결과 정리 13.9가 성립하는지 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

대칭행렬을 대각화 하는 방법을 정리하면 아래와 같다.

1. 대칭행렬 $A_{n\times n}$ 의 n 개의 고유값을 구한다.
2. 각 고유값에 대한 고유벡터 $\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 를 구한다.
3. 고유벡터를 정규화한다 $(\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|)$
4. 정규화된 고유벡터로 행렬 $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 을 만든다.
5. $P^T AP = D$ 를 계산한다.

Example

행렬 A 에 대한 고유값이 1, 6이고, 그 고유벡터는 다음과 같을 때, 행렬 A 를 대각화 하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 고유벡터를 정규화하면

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

이므로 행렬 P 는

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

으로 주어진다. 따라서 행렬 A 의 대각화는

$$P^T A P = D$$

로 이루어지며, $P^T P = P P^T = I_2$ 임을 보일 수 있고 따라서 P 는 직교행렬이다.

13.3 중근이 있는 대칭행렬의 대각화

대칭행렬의 경우, 중근이 존재하더라도 대각화가 가능하고 직교정규인 고유벡터를 구할 수 있다. 따라서 대각화를 이룰 수 있다 (정리 13.8 참조).

여기서는 고유값이 중근일 경우, 그램-슈미트 과정을 통해 직교행렬 P를 구하는 방법을 살펴본다.

Example

아래 대칭행렬을 대각화 하라.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.32}$$

Example (continue)

(풀이) 고유값을 구해보면

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 4) = 0 \qquad (13.33)$$

으로부터 $\lambda = 4$ 및 $\lambda = -2$ (중근) 이 된다. 중근인 $\lambda = 2$ 에 대한 고유벡터를 구하면

$$(A - \lambda I_3 | \mathbf{0}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

이므로

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -t - s \\ t \\ s \end{pmatrix}, \qquad (t, s \text{ 는 실수}) \qquad (13.34)$$

이다.

Example (continue)

(풀이) 이 중 임의로 두개를 다음과 같이 선택하면

$$\mathbf{w}_1 = (-1, 1, 0)^T, \qquad \mathbf{w}_2 = (-1, 0, 1)^T \tag{13.35}$$

두 벡터는 직교하지 않는다. (만일 $\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 1)^T$, $\mathbf{w}_2 = (0, -1, 1)^T$로 선택하였다면 직교하는 고유벡터의 선택이 가능하다.) 직교하는 고유벡터를 구하기 위해 그램-슈미트 과정을 사용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = (-1, 1, 0)^T \tag{13.36}$$

으로 두고

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13.37}$$

이다. 따라서 $\lambda = -2$ 에 대응하는 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 는 직교하는 두개의 고유벡터이다.

Example (continue)

(풀이) $\lambda = 4$ 에 대응하는 고유벡터는 다음과 같이 구한다.

$$
(A - \lambda I_3|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_{1(1/4)} \\ R_{2(1/2)} \\ R_{3(1/2)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_{3,1(1)} \\ R_{2,1(1)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3,2(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

따라서

$$
\mathbf{w} = (t, t, t)^T, \quad (t \text{ 는 실수}) \tag{13.38}
$$

가 고유벡터가 되므로, 이 중 한개를 선택하여

$$
\mathbf{w}_3 = (1, 1, 1)^T \tag{13.39}
$$

로 둘 수 있다.

Example (continue)

(풀이) 이 고유벡터도 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 와 직교하도록 만들기 위해 그램-슈미트 과정을 이용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 - \frac{\mathbf{w}_3^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{w}_3^T\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2^T\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{6/4}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 를 정규화하면 아래와 같다.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Example (continue)

(풀이) 따라서 행렬 P 는

$$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{13.40}$$

이므로

$$\begin{aligned} P^T A P &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

고유값이 중근으로 주어지는 경우, 대칭행렬을 대각화 하는 방법을 정리하면 아래와 같다.

1. 중근인 고유값에 대한 고유벡터, $\mathbf{w}_i$ 를 중근의 개수만큼 구한다.
2. 그램-슈미트 과정을 통해 직교하는 고유벡터 $\mathbf{u}_i$ 를 구한다.
3. 중근이 아닌 고유값에 대한 고유벡터를 구한 후, 그램-슈미트 과정을 통해 앞서 구한 $\mathbf{u}_i$ 와 직교되게 한다.
4. 지금까지 구한 $\mathbf{u}_i$ 를 정규화 시킨다 ($\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i/\|\mathbf{u}_i\|$).
5. 정규화된 고유벡터로 행렬 $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 을 만든다.
6. $P^T AP = D$ 를 만든다.