Linear Algebra for Statistics

Chapter 2

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 2 적분(Integral)

구간 $[a,b]$에서 정의되는 함수 $f(x)$에 대한 적분 S는 아래와 같이 표시된다.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x) > 0$인 경우에는 **구간** $[a,b]$**와** $f(x)$**에 갇힌 면적**으로 해석할 수 있다.

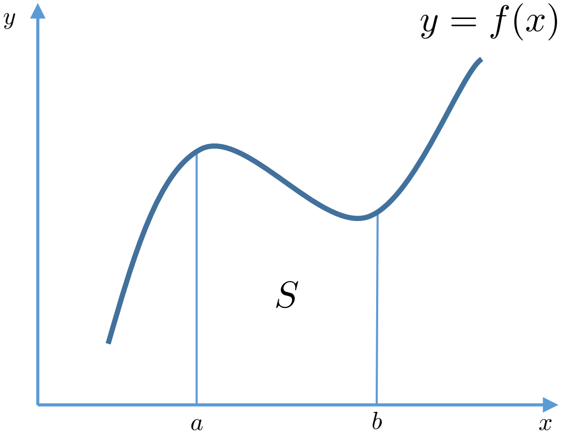

Figure 2.1: 구간 $[a, b]$에서 정의된 적분값은 면적 S와 같다

이와 같은 면적의 계산은 Figure 2.2와 같이 리만합(Riemann sum)으로 근사할 수 있다.

구간 $[a, b]$를 폭이 $\Delta x = (b - a)/n$인 n개의 구간으로 나누었을 때 소구간 안의 점을 c_k라고 하면,

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \tag{2.1}$$

로 표현된다.

이 때 구간의 개수를 무한히 증가시킬 경우, (2.1)의 값이 수렴하면 **함수 $f(x)$는 적분가능 (integrable)하다**라고 하며, 이 때 적분 S를

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{2.2}$$

로 정의한다.

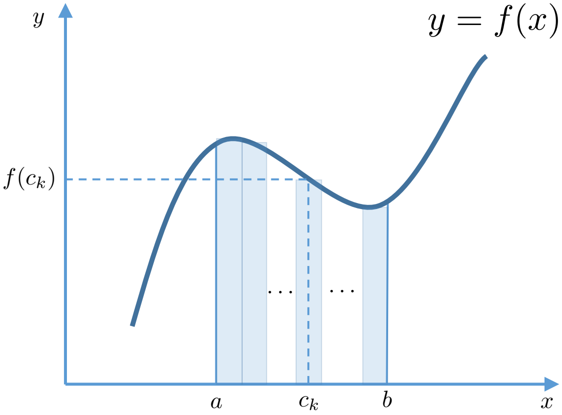

Figure 2.2: 구간 $[a, b]$의 면적을 리만합으로 근사한 모습

다변량함수 $f(x,y)$에 대해 아래와 같은 중적분(multiple integral)로 표시되고, 이는 $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$라는 직사각형과 곡면 $f(x,y)$ 사이에 존재하는 공간의 부피로 해석된다.

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

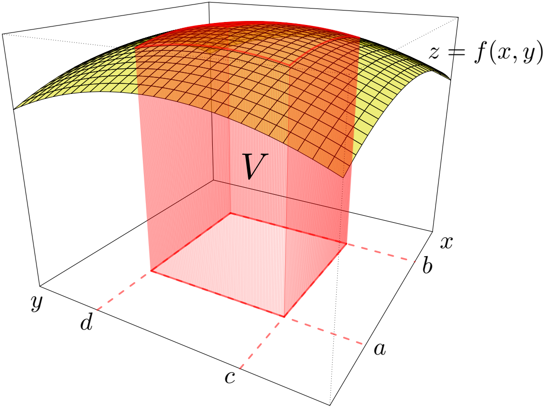

Figure 2.3: 영역 $[a, b] \times [c, d]$ 위에 정의된 적분값은 구간 위와 곡면 $f(x, y)$ 사이에 형성된 공간의 부피이다.

구간 $[a,b]$에서 정의되는 함수 $f(x), g(x)$가 적분가능한 함수일 때, 다음의 성질을 갖는다.

Proposition (2.1)

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Proposition (2.2)

k가 상수일 때,

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Proposition (2.3)

$a < c < b$에 대하여,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition (2.4)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Proposition (2.5)

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Proposition (2.6)

$$\int_a^b 1dx = b - a$$

2.1 평균값정리(Mean Value Theorem)

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 정의되고 적분가능할 경우,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b \tag{2.3}$$

가 성립하는 점 c가 적어도 한개 이상 존재한다.

즉, 적분값 $\int_a^b f(x)dx$은 밑변이 적분 구간인 $[a, b]$이고 이 구간 내의 점에 대한 함수값 $f(c)$가 높이인 정사각형의 면적과 동일하다. 이를 적분에 대한 평균값정리라 한다.

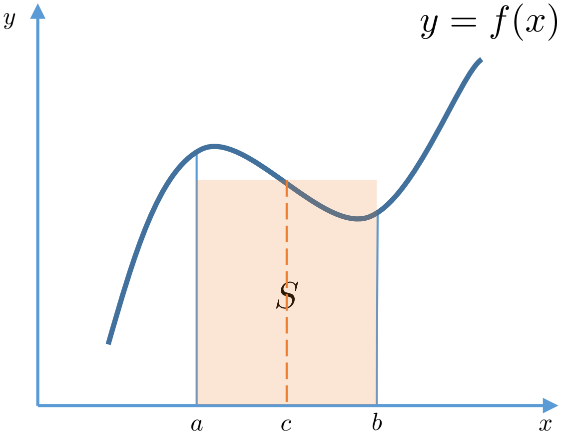

Figure 2.4: 적분의 평균값정리.

Example

함수 $f(x) = 1/x$ 를 이용하여 구간 $(1, 2)$에 대한 적분의 평균값정리를 확인하되, 알맞은 c 값을 구하라.

(풀이)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

이고,

$$f(c)(2-1) = \frac{1}{c}$$

이므로, $c = \frac{1}{\ln 2}$이다. 이 값은 1과 2사이에 존재함을 알 수 있다.

2.2 미적분학의 기본정리(FTC)

미적분학의 기본정리(Fundamental Theorem of Calculus, FTC)는 다음과 같다.

Theorem (정리 2.7 FTC-1)

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이면

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.4}$$

는 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능하며

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{2.5}$$

가 성립한다.

Remark $F(x)$를 $F'(x) = f(x)$라는 관계에 근거하여 $f(x)$**의 역도함수(anti-derivative)**라고 부른다.

Example

미적분학의 기본정리(FTC-1)를 이용하여 다음을 계산하라.

1. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t dt$

2. $y = \int_x^3 t\cos t dt$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값

3. $y = \int_0^{x^2+1} \frac{1}{1+e^t} dt$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값

두번째 미적분학의 기본정리는 다음과 같다.

Theorem (정리 2.8 FTC-2)

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $F(x)$가 $f(x)$의 역도함수이면

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.6}$$

이다.

Example

다음 함수 $f(x)$ 에 대한 $F(x)$ 를 구해보고, $\int_1^2 f(x)dx$ 를 FTC-2를 이용하여 구하라.

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = \ln x$
4. $f(x) = \log_{10}(x)$
5. $f(x) = x^2$
6. $f(x) = 2^x$
7. $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$

$y = f(x)$로 주어진 함수 $f(x)$에 대한 미분함수 $f'(x)$의 정의는

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.7}$$

로 주어짐을 알고 있다. 이를 다음과 같이 정의할 수도 있다.

Definition

$y = f(x)$이고 함수 $f(x)$가 미분가능하면,

$$dy = f'(x)dx \tag{2.8}$$

라 정의하며, dy를 y의 미분(differential)이라고 한다.

Proposition (2.9)

함수 $f(x)$ 와 $F(x)$ 간에 $F'(x) = f(x)$ 관계가 있을 때,

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \tag{2.9}$$

가 된다.

Proof.

정의에 의해 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$dF(x) = f(x)dx \tag{2.10}$$

가 되며, 이는

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.11}$$

가 되어, FTC-2에 의해

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.12}$$

이다. □

2.3 기대값(Expected Value)

n개의 값 $x_1, x_2, \ldots, x_n$에 대한 산술평균(average)은 관측치의 무게중심을 나타내며

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{2.13}$$

또는

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i \tag{2.14}$$

로 계산한다. 위의 형태는 x_i에 대해 $1/n$이라는 동일한 상대빈도수(relative frequency)를 곱해서 더한 가중합(weighted sum)의 형태이다.

값에 따른 상대빈도 $f(x_i)$ 가 다르다면

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) x_i \tag{2.15}$$

로 표현될 것이다. 가중합을 적분으로 표현하면

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx =: E(X) \tag{2.16}$$

로 주어지며, 이를 확률변수 X의 **기대값(expected value 혹은 mean)**이라하며 $E(X)$로 표기한다.

Example

확률변수 X의 확률밀도함수(빈도함수)가 아래와 같을 때, X의 기대값을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, \text{otherwise} & \end{cases}$$

(풀이) 확률변수 X의 기대값을 (2.16)에 의해 구하면

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2}dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0dx \\ &= \int_{0}^{2} \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1. \end{aligned}$$

Example

확률변수 X의 확률밀도함수(빈도함수)가 아래와 같을 때, X의 기대값을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2 \\ 0, \text{otherwise} & \end{cases}$$

2.4 푸비니 정리(Fubini's Theorem)

중적분의 계산은 아래와 같이 서로 순서를 바꾸어서 적분가능하다.

Theorem (정리 2.10 Fubini's Theorem)

연속함수 $f(x,y)$ *가 영역* $R : a \le x \le b, c \le y \le d$ *상에서 연속이면,*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \tag{2.17}$$

가 성립한다.

적분범위가 다른 변수의 값에 의존하는 경우, 적분순서를 바꿀때 범위를 주의하여 선정하여야 한다.

적분영역이 $A : a \le x \le b, 0 \le y \le x$ 로 주어진 경우, 변수 y 의 범위는 다른 변수 x 값에 의존한다. Figure 2.5의 적분에서 각 순서별 적분은 다음과 같이 계산하며 그 결과는 동일하다.

$$\iint_A f(x,y)dydx = \int_a^b \int_0^x f(x,y)dydx \tag{2.18}$$

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_a^b f(x,y)dxdy + \int_a^b \int_y^b f(x,y)dxdy \tag{2.19}$$

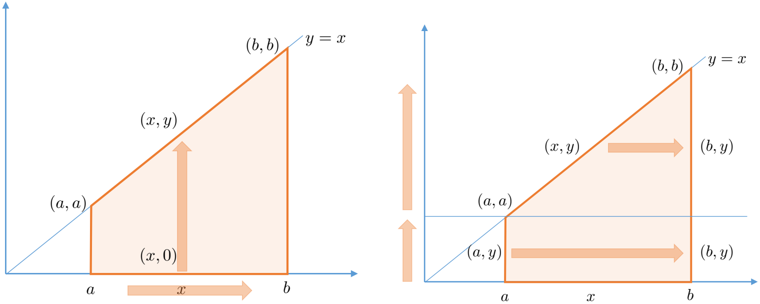

Figure 2.5: 영역 A $(a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x)$ 에서 정의되는 푸비니 정리: 왼쪽그림에 대한 중적분은 $\iint_A f(x,y)dydx - \int_a^b \int_0^x f(x,y)dydx$ 이고 오른쪽 그림에 대한 중적분은 $\iint_a f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_a^b f(x,y)dxdy + \int_a^b \int_y^b f(x,y)dxdy$ 가 된다.

Example

영역 $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$ 에 대하여 아래 등식이 성립함을 계산으로 보여라.

$$\iint_A (4x+2)dydx = \frac{80}{3}.$$

(풀이) 영역 A를 도시하면 Figure 2.6이 된다. y를 먼저 적분한 후에 x에 대해 적분을 하면 다음과 같다.

$$\iint_A (4x+2)dydx = \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4x+2)dydx = \frac{80}{3}.$$

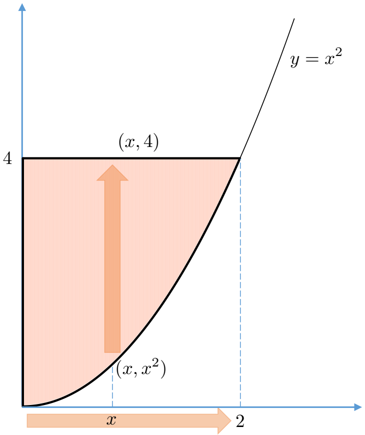

Figure 2.6: 영역 $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$ 에 대한 $\iint_A (4x + 2)dydx$ 계산 과정

Example

영역 $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$ 에 대하여 아래 중적분을 순서에 맞춰 계산할 때 값이 일치함을 보여라.

$$\iint_A (4x + 2)dxdy = \frac{80}{3}.$$

2.5 부분적분(Integration by Parts)

Theorem (정리 2.11 부분적분)

함수 $g(x)$, $m(x)$ 가 모두 미분가능한 함수일 때

$$\int g(x)m'(x)dx = g(x)m(x) - \int g'(x)m(x)dx \tag{2.20}$$

가 성립한다.

Proof.

$f(x) = g(x)m(x)$라고 하면, 다음 식이 성립한다.

$$f'(x) = g(x)m'(x) + g'(x)m(x). \tag{2.21}$$

미분의 정의에 의해 $df(x) = f'(x)dx$ 이므로

$$df(x) = \{g(x)m'(x) + g'(x)m(x)\}dx \tag{2.22}$$

이고

$$\int df(x) = \int g(x)m'(x)dx + \int g'(x)m(x)dx. \tag{2.23}$$

위의 식에서 좌변은

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) \tag{2.24}$$

이므로

$$\int g(x)m'(x)dx = f(x) - \int g'(x)m(x)dx \tag{2.25}$$

$$= g(x)m(x) - \int g'(x)m(x)dx \tag{2.26}$$

Example

부분적분을 이용하여 다음을 보여라.

1. $\int_1^2 x \ln x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

2. $\int_0^1 xe^x dx = 1$

2.6 변수변환(Change of Variables)

변수 x 가 또다른 변수 u 의 함수형태로 주어진다고 가정하자. 이러한 함수식을 $x = g(u)$ 로 표현하자. 이 때 다음의 적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

를 고려하자.

위의 적분을 변수 u 에 대해 계산을 하는 경우, 다음의 계산이 필요하다.

- 시점 $x = a$ 에 대한 u 의 값은 $a = g(u)$ 에 의해 $u = g^{-1}(a)$ 가 되고,
- 종점 $x = b$ 에 대한 u 의 값은 $b = g(u)$ 에 의해 $u = g^{-1}(b)$ 가 되며
- $x = g(u)$ 의 관계식으로부터 $dx = g'(u)du$ 가 된다.

따라서, 만일 함수 $g(\cdot)$ 가 역함수가 존재하고 증가함수일 경우,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))|g'(u)|du \tag{2.27}$$

여기서 적분의 형태가

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))du \tag{2.28}$$

이 아님에 주의하자. 또한 일반적으로

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))du \neq \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))|g'(u)|du \tag{2.29}$$

이다.

여기서 $|g'(u)|$ 는 변수변환에 의한 변화율의 보정항으로써 이를 자코비안(Jacobian)이라고 한다.

다변량함수에서도 단변량함수의 경우와 마찬가지로 자코비안이 필요하다.

Theorem (정리 2.12 변수변환)

(x, y) 에서 정의된 영역 R 이 변환 $x = g(u, v)$ 및 $y = h(u, v)$ 를 통해 (u, v) 에서의 영역 G 와 관련된다면, 이에 대한 중적분은

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v))|J|dudv \tag{2.30}$$

이 되며, 여기서

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

이다.

Remark det(·) 는 행렬식(determinant)이며, 2×2 행렬의 경우

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

으로 정의된다.

Example

아래의 적분을 $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$ 변환을 통해 (u, v) 공간에서 적분하여 적분값이 2가 됨을 보여라.

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dxdy = 2.$$

(풀이) $x = u + v, y = 2v$ 이므로, 자코비안은 다음과 같다.

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

따라서,

$$\iint_R \frac{2x - y}{2} dxdy = \iint_G u|J| dudv = \iint_G 2ududv.$$

(u, v) 상의 적분영역 G 를 고려하면,

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dxdy = \int_0^2 \int_0^1 2ududv = 2.$$

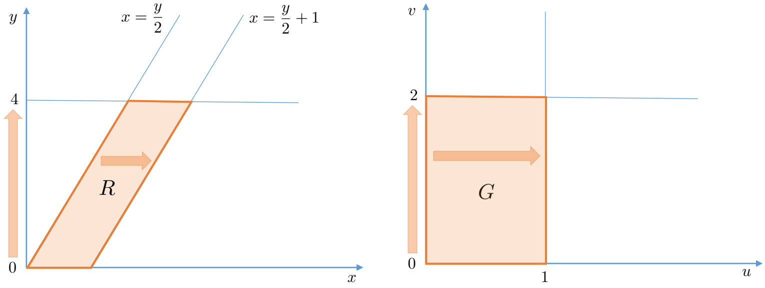

Figure 2.7: $x - y$ 좌표의 영역 $R = \{(x, y) : 0 \le y \le 4, \frac{y}{2} \le x \le \frac{y}{2} + 1\}$ 은 변수변환 $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$ 를 통해 $u - v$ 좌표의 영역 $G = \{(u, v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\}$ 로 변환됨.

2.7 수치적분(Numerical Integration)

해석적 방법으로 적분을 구하지 못하는 경우, 수치해석(numerical analysis)적 방법으로 컴퓨터를 이용하여 적분의 근사값을 구할 수 있다.

Definition

구간 $[a,b]$ 를 n 등분하여, 각각의 구간을 $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,[t_{n-1},t_n]$ 이라 하자. 구간 $[a,b]$ 상에서 정의된 적분은 아래와 같이 근사할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)\{f(t_0)+2f(t_1)+2f(t_2)+\cdots+2f(t_{n-1})+f(t_n)\}.$$

이를 **사다리꼴 공식**이라 한다.

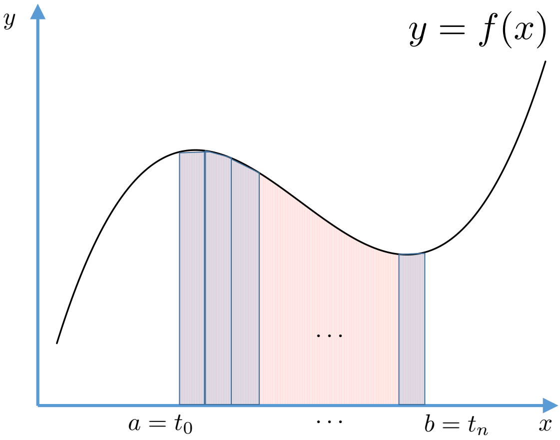

Figure 2.8: 사다리꼴 공식에 의해 수치적분하는 그림

Example

아래 적분값을 적분공식을 이용하여 직접 계산해 보고, 또한 $n = 4$ 인 경우의 사다리꼴 공식을 이용해 그 근사값을 계산하여 비교하라.

1. $\int_0^1 x dx$

2. $\int_0^1 e^x dx$