Linear Algebra for Statistics

Chapter 4

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 4 행렬의 기본개념

Definition

행렬이란 숫자나 문자를 일정한 순서에 의해 배열(array)한 것이다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Remark : 행렬은 아래와 같이 행벡터들의 배열로 볼 수 있고,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

혹은 아래와 같이 열벡터들의 배열로 표현될 수 도 있다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n) \tag{4.3}$$

여기서 $\mathbf{a}_i$ 는 A 의 i 번째 행을, $\tilde{\mathbf{a}}_j$ 는 j 번째 열을 나타내는 벡터이다. (교재에는 $\mathbf{a}_{iR}$ 및 $\mathbf{a}_{jC}$ 로 표기됨에 유의할 것)

Remark

1. 행렬의 크기는 행(row)의 수와 열(column)의 수로 표기하는데 m 행 n 열 행렬의 경우 $m \times n$ **행렬**이라 쓰고 m **by** n **행렬**이라고 읽는다.
2. 행렬을 표기할 때 $m \times n$ 행렬 A 의 경우 $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$ 라고 표기한다.
3. 행렬을 이루는 숫자나 기호를 행렬의 **원소(component)**라고 하며, $(A)_{ij}$란 행렬 A 의 i 번째 행의 j 번째 열에 있는 원소, 즉 a_{ij} 를 의미한다.

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

4. 행렬 $0_{m\times n}$ 은 모든 원소가 0으로 구성된 크기 $m \times n$ 인 영행렬(null matrix)을 나타낸다.
5. 행렬 $A_{m\times n}$ 에 스칼라 c 를 곱하면, 행렬의 모든 원소에 c 를 곱하는 것을 의미한다. 즉 $cA = \{ca_{ij}\}_{m\times n}$ 이다.
6. 행렬 $A_{m\times n}$ 에서 행과 열의 수가 같을 때, $A_{m\times n}$ 을 정방행렬(square matrix)이라고 한다.

Example

다음 행렬에 대해 $5A$ 와 $-2B$ 를 계산하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(풀이)

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \qquad -2B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.1 행렬의 덧셈과 뺄셈

Definition

두 행렬 $A_{m\times n} = \{a_{ij}\}_{m\times n}, B_{m\times n} = \{b_{ij}\}_{m\times n}$ 에 대하여, 덧셈 및 뺄셈은

$$A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\}_{m\times n} \tag{4.4}$$

이라 정의한다.

Example

아래 두 행렬 간에 $A + B, A - B$ 를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(풀이)

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition (4.1)

덧셈의 정의를 이용하면 아래의 등식이 성립한다.

- $A + A = 2A$
- $\underbrace{A + A + \cdots + A}_{k\text{개}} = kA$

Proof.

$A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$ 라고 표현하면, $A + A = \{a_{ij} + a_{ij}\}_{m\times n} = \{2a_{ij}\}_{m\times n} = 2A$ 임을 알 수 있다.
마찬가지로 $\underbrace{A + A + \cdots + A}_{k\text{개}} = kA$ 도 같은 방식으로 증명가능하다. $\square$

4.2 행렬의 전치(Transpose)

Definition

행렬 A 가 $m \times n$ 이고 (i,j) 번째 원소가 a_{ij} 라면, 전치된 행렬 A^T 는 $n \times m$ 행렬이 되고, (i,j) 번째 원소는 a_{ji} 가 된다.

$$A = \{a_{ij}\}_{m\times n} \quad \longrightarrow \quad (A)_{ij} = a_{ij}, \quad (A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Example

아래 행렬에 대한 전치행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(풀이)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Theorem (정리 4.2)

행렬 $A_{m\times n}$ 및 $B_{m\times n}$ 의 전치에 대하여, 아래의 성질이 성립한다.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(cA)^T = cA^T$, c 는 스칼라

Proof.

1. $((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$. 따라서 $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}. \tag{4.5}$$
3. 행렬의 곱셈에서 다룸.
4. $$((cA)^T)_{ij} = (cA)_{ji} = c(A)_{ji} = c(A^T)_{ij}. \tag{4.6}$$

Remark 정방행렬 $A_{n\times n}$ 이 $A^T = A$ 를 만족하면 A 는 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다.

Example

행렬 A 가 대칭행렬이 되도록 빈 칸을 채워라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & -1 \\ & 3 & & 6 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

(풀이)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4.3 벡터의 외적(Outer Product)

크기가 n 인 두 벡터의 내적은 아래와 같이 정의되며 크기는 1×1, 즉 스칼라이다.

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{4.7}$$

반면, 외적은 $n \times n$ 인 행렬이 된다.

Definition

두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 두 벡터의 외적은 $\mathbf{ab}^T$ 라고 표기하며, 외적으로 생성된 행렬의 (i, j) 번째 원소는 첫번째 벡터의 i 번째 원소와 두번째 벡터의 j 번째 원소의 곱으로 정의된다.

$$\mathbf{ab}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

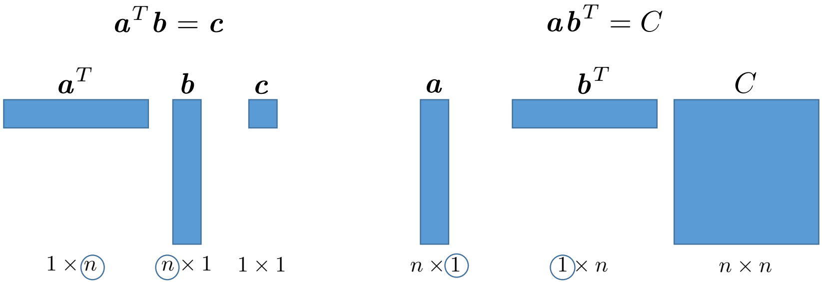

Figure 4.1: 벡터의 내적과 외적의 크기

Example

아래 두 벡터 간의 외적 $\mathbf{ab}^T$, $\mathbf{ba}^T$ 을 각각 구하라.

$$\mathbf{a} = (1,2)^T, \qquad \mathbf{b} = (3,4)^T$$

(풀이)

$$\mathbf{ab}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3,4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ba}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1,2) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4.4 벡터와 행렬의 곱셈

여러 크기의 행렬과 벡터의 곱의 결과는 아래의 그림과 같이 주어진다.

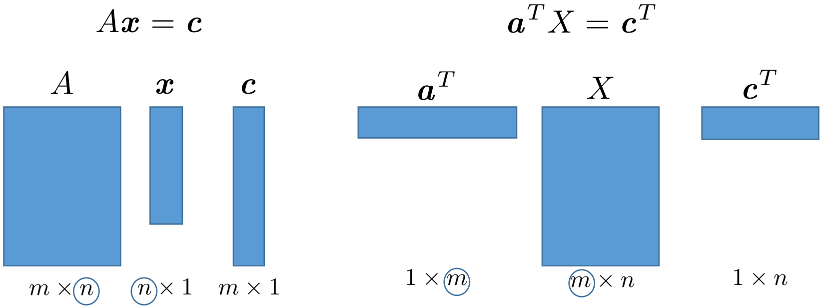

Figure 4.2: 벡터와 행렬간의 곱셈

행렬과 벡터의 곱의 계산은 아래와 같다.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ddots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} \tag{4.9}$$

여기서 c_i 는 A 의 i 번째 행벡터 $\mathbf{a}_i$ 와 $\mathbf{x}$ 간의 내적으로 정의된다. 즉,

$$c_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{4.10}$$

따라서, 곱을 내적으로 표현하면 다음과 같다

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{c} \tag{4.11}$$

반면에 $\mathbf{a}^T X$ 의 곱은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{a}^T X = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_n) = \boldsymbol{c}^T \tag{4.12}$$

여기서 c_j 는 벡터 $\mathbf{a}$ 와 X 의 j 번째 열벡터 $\tilde{\mathbf{x}}_j$ 간의 내적으로 다음과 같다.

$$c_j = \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{x}}_j = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \tag{4.13}$$

이를 재표현하면 아래와 같다.

$$\mathbf{a}^T X = \mathbf{a}^T (\tilde{\mathbf{x}}_1, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_j, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_n) = (\mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{x}}_1, \cdots, \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{x}}_j, \cdots, \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{x}}_n) = \mathbf{c}^T.$$

Example

다음에서 $A\mathbf{x}$ 를 계산하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Example

다음에서 $\mathbf{x}^T A$ 를 계산하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.5 행렬과 행렬의 곱셈

Definition

행렬 $A_{m\times n}$ 과 $B_{n\times p}$ 간의 곱 AB 는 $m \times p$ 행렬이 되며 이는 아래와 같이 계산된다.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix} (\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{b}}_p) \tag{4.15}$$

Definition (contiue)

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T\tilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_1^T\tilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\tilde{\mathbf{b}}_p \\ \mathbf{a}_2^T\tilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_2^T\tilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\tilde{\mathbf{b}}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\tilde{\mathbf{b}}_1 & \mathbf{a}_m^T\tilde{\mathbf{b}}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m^T\tilde{\mathbf{b}}_p \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

AB 의 원소 c_{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i^T\tilde{\mathbf{b}}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{4.18}$$

Remark A 가 정방행렬일 경우, $AA = A^2, AAA = A^3$ 으로 표기한다.

Example

아래 행렬 A, B 에 대하여 AB 혹은 BA 의 계산 가능성을 논하고 계산 가능한 행렬의 곱을 구하라..

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorem (정리 4.3)

행렬 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ 에 대하여, 다음이 성립한다.

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{4.19}$$

Proof.

$(AB)^T$ 의 (i,j) 번째 원소를 구하면,

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \tilde{\mathbf{b}}_i^T \mathbf{a}_j$$

이다. $B^T A^T$ 를 계산하면 아래와 같다.

$$B^T A^T = (\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{b}}_p)^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_p^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T \mathbf{a}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{b}}_1^T \mathbf{a}_m \\ \tilde{\mathbf{b}}_2^T \mathbf{a}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_2^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{b}}_2^T \mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_p^T \mathbf{a}_1 & \tilde{\mathbf{b}}_p^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{b}}_p^T \mathbf{a}_m \end{pmatrix}.$$

따라서 $(B^T A^T)_{ij} = \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{a}_j = ((AB)^T)_{ij}$ 이다. □

Corollary (따름정리 4.4)

행렬 $A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times q}$ *에 대하여* $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ *가 성립한다.*

Proof.

$(ABC)^T = \{(AB)C\}^T = C^T(AB)^T = C^T B^T A^T$ $\square$

4.6 행렬의 결합법칙(Associative Law)

Theorem (정리 4.5)

세 행렬 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$ *의 곱셈에 대하여 다음의 결합법칙(Associative law) 이 성립한다.*

$$A(BC) = (AB)C \tag{4.20}$$

Proof.

$A(BC)$ 의 (i,j) 번째 원소를 계산하면 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
(A(BC))_{ij} &= (A \text{ 의 } i \text{ 번째 행}) \begin{pmatrix} \\ BC \text{ 의 } j \text{ 번째 열} \\ \\ \end{pmatrix} && (4.21) \\
&= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{pmatrix} (BC)_{1j} \\ (BC)_{2j} \\ \vdots \\ (BC)_{nj} \end{pmatrix} && (4.22) \\
&= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} b_{1k}c_{kj} \\ \sum_{k=1}^{p} b_{2k}c_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk}c_{kj} \end{pmatrix} && (4.23) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}.
\end{aligned}
$$

Proof (continue).

이를 다시 표현하면

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj} &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{l1}, \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{l2}, \cdots, \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lp}\right)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix} = (AB \text{ 의 } i \text{ 번째 행})\begin{pmatrix} C \text{ 의 } j \text{ 번째 열} \end{pmatrix} \\
&= ((AB)C)_{ij}.
\end{aligned}$$

따라서 $(A(BC))_{ij} = ((AB)C)_{ij}$ 가 성립한다. □

Example

아래 행렬 A, B, C 에 대하여 결합법칙 $A(BC) = (AB)C$ 가 성립하는지 계산으로 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.7 행렬의 분배법칙(Distributive Law)

Theorem (정리 4.6)

세 행렬 $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{n\times p}$ 의 곱셈에 대하여 다음의 분배법칙(Distributive law) 이 성립한다.

$$A(B+C) = AB + AC$$

Proof.

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij}.\end{aligned}$$

□

Corollary

세 행렬 $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, $C_{n\times p}$ 의 곱셈에 대하여 다음의 분배법칙(Distributive law) 이 성립한다.

$$(A+B)C = AC + BC$$

Proof.

위와 유사하게 증명 가능함. $\square$

Example

아래 행렬 A, B, C 에 대하여 분배법칙 $A(B+C) = AB + AC$ 가 성립하는지 계산으로 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.8 행렬의 궤적(Trace)

정방행렬의 궤적(trace)은 대각원소의 합으로 정의된다.

Definition

정방행렬 $A_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n}$ 에 대하여 A 의 궤적은 아래와 같이 정의한다.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{4.24}$$

Theorem (정리 4.7)

정방행렬 A, B, C 에 대하여 다음이 성립한다.

1. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
2. $\operatorname{tr}(A \pm B) = \operatorname{tr}(A) \pm \operatorname{tr}(B)$
3. $\operatorname{tr}(cA) = c\operatorname{tr}(A)$, c 는 스칼라
4. $\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
5. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
6. $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$

Proof : (4) 및 (5)에 대한 증명

(5)번 증명:

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \mathrm{tr}(BA).$$

(4)번 증명:

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

□

Example

정방행렬 A, B, C 에 대하여 아래를 증명하라

- $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

- $\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$

- $\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$, c 는 스칼라

- $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$

4.9 분할행렬(Partitioned Matrix)

하나의 행렬이 여러 개의 작은 부분행렬로 분할될 때, 이를 블록행렬(block matrix) 혹은 분할행렬(partitioned matrix)이라고 한다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

여기서,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

이다.

Definition

분할행렬의 비대각선 방향으로 있는 블록이 모두 0인 행렬을 **블록대각행렬(block diagonal matrix)**라고 하며

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn})$$

라고 표현한다.

분할행렬의 곱은 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mp} \end{pmatrix} = C$$

이며 여기서

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

이다.

4.10 특이한 행렬연산

4.10.1 하다마드 곱셈(Hadamard Product)

두 행렬 A, B 가 모두 $m \times n$ 행렬로 크기가 동일한 경우, 동일한 원소끼리 곱을 하여 얻어지는 곱셈을 하다마드 곱셈이라 한다.

$$A \odot B = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Example

아래에서 $A \odot B$ 를 계산하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10.2 크로네커 곱셈(Kronecker Product)

두 행렬 $A_{m\times n}$ 과 $B_{n\times p}$ 의 크로네커 곱은 다음과 같이 정의한다.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Example

아래에서 $A \otimes B$ 및 $B \otimes A$ 를 계산하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Example

벡터 $\mathbf{1}_n$ 과 행렬 I_n 이 아래와 같이 정의될때, 아래의 행렬 A 와 B 를 $\mathbf{1}_n$ 및 I_n 을 사용한 크로네커 곱으로 표시하라.

$$\mathbf{1}_n = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\} n \text{ 개}, \quad I_n = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{n \text{ 개}} n \text{ 개} \tag{4.27}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

(풀이) $A = I_3 \otimes \mathbf{1}_2, B = \mathbf{1}_2 \otimes I_3.$