Linear Algebra for Statistics

Chapter 10

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 10 계수와 행렬식

10.1 행렬의 계수(Rank)

Definition

행렬 $A_{m\times n}$ 의 계수는 $\text{Rank}(A)$ 라 표시하며

1. A 의 열공간 $\mathcal{C}(A)$ 를 구성하는 기저(basis)의 수, 혹은
2. A 의 행공간 $\mathcal{R}(A)$ 를 구성하는 기저(basis)의 수

로 정의된다.

Remark 임의의 행렬 A 에 대하여 $\mathcal{C}(A)$ 의 기저의 수와 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저의 수는 항상 같다.

Remark 벡터공간의 기저의 수는 곧 공간의 차원(dimension)이므로,

$$\text{Rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{C}(A)) \tag{10.1}$$

이다.

Proposition (10.1)

행렬 $A_{m\times n}$ 에 대하여 다음을 만족한다. (증명생략)

(1) $A = 0_{m\times n}$ 일 때, $Rank(A) = 0$

(2) $Rank(A) \leq \min(m, n)$

(3) 행렬 $B_{n\times p}$ 에 대하여, $Rank(AB) \leq \min(Rank(A), Rank(B))$

(4) 행렬 $B_{m\times n}$ 에 대하여, $Rank(A + B) \leq Rank(A) + Rank(B)$

(5) $Rank(A^T A) = Rank(AA^T) = Rank(A)$

(6) 행렬 $B_{n\times p}$ 에 대하여 $Rank(B) = n$ 이면, $Rank(AB) = Rank(A)$

(7) 행렬 $B_{l\times m}$ 에 대하여 $Rank(B) = m$ 이면, $Rank(BA) = Rank(A)$

행렬의 계수를 구하기 위해서는 행공간의 기저의 개수를 구하면 된다. 기저를 구하는 방법은 다음과 같다. 임의의 행렬 A 에 대하여

1. 기본행연산을 통해 (기약)행사다리꼴인 행렬 B 를 구한다.

$$A \xrightarrow{\quad ERO \quad} B$$

2. 행렬 B 를 이루는 $\mathbf{0}$ 이 아닌 행을 선택한다.

Example

다음 행렬 A 의 계수를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 기본행연산을 통해 행사다리꼴을 만들면 다음과 같다.

$$A \xrightarrow{R_{2,1(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

따라서 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저는 $\{(1,3)^T, (0,-2)^T\}$ 이다. 또한 기약행사다리꼴로 변환하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(-1/2)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1,2(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이고 따라서 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저는 $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ 라 할 수 있다. 어떠한 경우에도 기저의 수는 변화가 없으므로 $\text{Rank}(A) = 2$ 이다.

Remark 벡터공간을 이루는 기저의 길이(norm)가 1인 기저를 정규기저(normal basis)라고 한다.

Example

다음 행렬의 $\mathcal{R}(A)$ 에 대한 정규기저를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.2 행렬의 가역성(Invertibility)

Definition

정방행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \tag{10.2}$$

을 만족하는 A^{-1} 를 A 의 역행렬(inverse matrix)이라 한다.

Remark 정방행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여

- $\text{Rank}(A) = n$ 일 때, 이를 완전계수(full rank)라고 한다.
- 만일 역행렬이 존재하지 않으면 A 를 비정칙행렬(singular matrix)이라고 하고, 역행렬이 존재하면 A 를 정칙행렬(nonsingular matrix)이라고 한다.

Proposition (10.2)

정칙행렬 $A_{n\times n}$ *에 대하여*

$$(A^{-1})^{-1} = A \tag{10.3}$$

이다. 즉, A^{-1} *의 역행렬은* A *이다.*

Proof.

어떤 행렬 B 가 A^{-1} 의 역행렬이 되려면 $BA^{-1} = A^{-1}B = I$ 가 성립하여야 한다. 역행렬의 정의에 의해 A^{-1} 는 A 에 대하여 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 를 만족한다. 따라서 A 는 B 의 조건을 만족함을 알 수 있고 이는 A 가 A^{-1} 의 역행렬이 됨을 의미한다. □

Proposition (10.3)

행렬 $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ *에 대하여* A^{-1}, B^{-1} *가 존재할 때, 다음이 성립한다.*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{10.4}$$

Proof.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

이므로 역행렬의 정의를 만족한다. □

Theorem (정리 10.4 행렬의 가역성; Invertibility)

정방행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여, 다음 중 하나를 만족하면 A^{-1} 이 존재한다.

(1) $Rank(A) = n$

(2) $\dim(\mathcal{R}(A)) = n$

(3) $\dim(\mathcal{C}(A)) = n$

(4) *A 의 서로 독립인 행의 수가 n 이다.*

(5) *A 의 서로 독립인 열의 수가 n 이다.*

Proof.

(1) 의 증명은 다음 단원에서 보인다. 계수의 정의에 의해 나머지 조건들은 (1)과 동치이므로 자명하다. $\square$

Remark 정방행렬 $A_{n\times n}$ 에서 $\mathrm{Rank}(A) < n$ 이면 A 는 비정칙행렬(singular matrix)이다.

Example

아래 행렬 A 가 정칙행렬인지 비정칙행렬인지 $\mathrm{Rank}(A)$ 를 계산하여 판단하라.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 행렬 A 를 기본행연산을 통해 행사다리꼴로 변환하면 아래와 같다.

$$A \xrightarrow{ERO} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

따라서 $\mathrm{Rank}(A) = 3$ 이다. 이는 A 의 행(열)의 수와 일치하므로 완전계수이다. 따라서 행렬 A 는 역행렬이 존재하는 정칙행렬이다.

Example

아래 행렬에 대하여 가역성이 존재하는지 답하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.3 가우스-조던 알고리즘과 역행렬

가우스-조던 알고리즘을 이용하여 $A_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해 $\mathbf{x}$ 를 구하기 위해

$$\begin{aligned} & (A \mid \mathbf{b}) & \xrightarrow{ERO} & \quad (I_n \mid \mathbf{l}) \\ \iff & \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} & \longrightarrow & \quad I_n\mathbf{x} = \mathbf{l} \end{aligned}$$

의 관계를 이용하여 해 $\mathbf{x} = \mathbf{l}$ 을 구하였다.

역행렬 또한 유사한 관계에 의해 가우스-조던 알고리즘을 활용할 수 있다. $A_{n\times n}$ 의 역행렬을 구하는 예를 생각한다면 $AB = I_n$ 를 만족하는 행렬 B 는 A 의 역행렬이된다. 즉 위의 식을 만족하는 B 를 찾는 문제로 이해할 수 있으며, 이를 가우스-조던 알고리즘을 이용한다면

$$\begin{aligned} & (A \mid I_n) & \xrightarrow{ERO} & \quad (I_n \mid M) \\ \iff & \quad AB = I_n & \longrightarrow & \quad I_nB = M \end{aligned}$$

역행렬 $B = M$ 을 얻을 수 있다.

가우스-조던 알고리즘을 이용한 역행렬을 구하는 방법은 다음과 같다.

1. $A_{n\times n}$ 의 오른쪽에 항등행렬 I_n 을 덧붙여 확대행렬 $(A \mid I_n)$ 을 만든다.
2. $(A \mid I_n)$ 에 대해 가우스-조던 알고리즘을 이용하여 $(I_n \mid B)$ 형태로 만든다.
3. B 는 A^{-1} 가 된다.

Example

가우스-조던 알고리즘을 이용하여 아래의 행렬 A 의 역행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Example (continue)

(풀이)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,1(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,1(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{1,3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{1,3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,3(2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

따라서 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

Theorem (정리 10.5)

행렬 $A_{n\times n}$ *에 대하여,* $Rank(A) = n$ *이면* A^{-1} *이 존재한다.*

Proof.

행렬의 계수가 n 임은 $\mathcal{R}(A)$ 의 기저의 개수가 n 임을 의미한다. 이는 A 의 기약행사다리꼴이 I_n 임을 뜻한다. 따라서 $\mathrm{Rank}(A) = n$ 이면 확대행렬에 대한 기본행연산에 의해 $(A \mid I_n) \xrightarrow{ERO} (I_n \mid B)$ 의 형태를 얻을 수 있으므로 역행렬이 $A^{-1} = B$ 로써 존재한다. □

Remark 행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여, $\mathrm{Rank}(A) < n$ 이면 A 를 (기약)행사다리꼴 C 로 변환하면 C 는 $\mathbf{0}$ 행을 가진 상삼각행렬이 된다.

Remark 확대행렬 $(A \mid I_n)$ 의 기본행연산 결과가 $(I_n \mid B)$ 형태가 되지 않으면 A 의 역행렬은 존재하지 않는다.

Example

아래 행렬들의 역행렬을 가우스-조던 알고리즘을 이용하여 구하라 $(a, b, c \neq 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Example

$A_{2\times 2}, B_{3\times 3}$ 가 모두 역행렬이 존재할 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\begin{pmatrix} A_{2\times 2} & 0_{2\times 3} \\ 0_{3\times 2} & B_{3\times 3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{2\times 2}^{-1} & 0_{2\times 3} \\ 0_{3\times 2} & B_{3\times 3}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Example

아래 행렬들이 정칙행렬인지 비정칙행렬인지 가우스-조던 알고리즘으로 확인하고, 정칙행렬인 경우 그 역행렬을 구하라. 아래의 행렬 C에 대해서는 정칙이 되기 위한 a, b, c, d 의 조건을 명시하고 역행렬을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.4 행렬식(Determinant)

스칼라 a 의 크기(magnitude)는 절대값 $|a|$ 로 구하고, 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ 의 크기는 노옴 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ 으로 구한다. 이와 대응되는 개념으로 행렬 A 의 행렬식(determinant)의 절대값 $|\det(A)|$은 행렬의 크기로 해석할 수 있으며, 이는

$$A = (\tilde{\mathbf{a}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_n)^T \tag{10.5}$$

일 때, n 개의 열벡터 $\tilde{\mathbf{a}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{a}}_n$ 가 공간 상에서 이루는 평형다면체의 부피가 된다.

Definition

행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여 행렬식 $\det(A)$ 는 아래와 같이 정의된다.

1. $A_{1\times 1}$ 이면, $\det(A) = A$
2. A 가 2×2 행렬이면,
$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$
3. A 가 $n \times n$ 행렬인 경우, M_{ij} 를 행렬 A 에서 i 번째 행과 j 번째 열을 제외한 나머지 행렬이라고 정의하면, 임의의 i 번째 행을 기준으로 행렬식을 계산하면
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \tag{10.6}$$
로 정의한다.

Remark M_{ij} 를 A 의 소행렬(minor)이라 부른다.

Remark C_{ij} 는 여인수(cofactor)라고 부른다.

Theorem (정리 10.6)

행렬 $A_{n\times n}$ 의 행렬식은 임의의 j 열을 기준으로

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) \tag{10.7}$$

라고 할 수 있다. (증명생략)

Example

아래 행렬의 행렬식이 성립함을 (10.6)을 이용하여 보여라.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

(풀이) 첫번째 행을 기준으로 소행렬을 구하면 $M_{11} = d, M_{12} = c$ 이므로

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$$

$$= (a)(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + (b)(-1)^{1+2}\det(M_{12}) = ad - bc.$$

Example

위의 행렬 A 의 행렬식을 (10.7)을 사용하여 첫번째 열을 중심으로 전개하여 행렬식을 구하라.

(풀이) 첫번째 열을 기준으로 소행렬을 구하면 $M_{11} = d, M_{21} = b$ 이므로

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}) = (a)(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + (c)(-1)^{2+1}\det(M_{21}) = ad - bc.$$

Example

다음 행렬의 행렬식은 0임을 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.8}$$

(풀이) 3번째 행을 기준으로 행렬식을 구하면,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3}(0)C_{3j} = 0. \tag{10.9}$$

세개의 벡터 $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^3$ 를 열벡터로 하는 정방행렬 $A_{3\times3} = (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})$ 에 대한 행렬식의 절대값은 세개의 열벡터로 형성되는 평형육면체(parallolopiped object)의 부피와 일치한다.

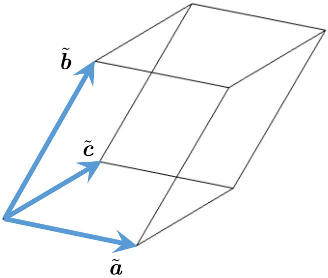

Figure 10.1: 행렬 $A = (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})$ 의 열벡터에 의한 평행다면체의 부피 $V = |\det(A)|$

Example

아래 벡터 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 가 이루는 평행육면체의 부피를 계산하라.

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (0, 2, 3)^T \tag{10.10}$$

(풀이) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 라 하면,

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -2. \tag{10.11}$$

따라서 부피는 $|-2| = 2$이다.

Example

아래 행렬의 행렬식이 14임을 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

10.5 행렬식의 성질

Theorem (정리 10.7)

행렬 $A_{n\times n}$ 이 상삼각행렬이면 행렬식은 아래와 같다.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{10.12}$$

Proof.

다음의 상삼각행렬을 고려하자.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Proof.
첫번째 열을 기준으로 행렬식을 구하면

$$\det(U) = (a_{11}) \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

이다. 위의 행렬식 계산을 마찬가지로 첫번째 열을 기준으로 구하면

$$\det(U) = (a_{11})(a_{22}) \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

이다. 이를 순차적으로 적용하면 아래와 같다.

$$\det(U) = (a_{11})(a_{22}) \cdots (a_{n-1,n-1})(a_{nn}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{10.13}$$

□

Theorem (정리 10.8)

행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\det(A) = \det(A^T). \tag{10.14}$$

Proof.

A 가 2×2 행렬인 경우,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A^T) \tag{10.15}$$

임은 쉽게 보일 수 있다.

A 가 3×3 행렬인 경우, A 의 첫번째 행을 기준으로 행렬식을 구하면

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

이 되고, A^T 의 첫번째 열을 기준으로 행렬식을 구하면

$$\det(A^T) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(M^*_{11}) + a_{12}(-1)^{2+1}\det(M^*_{21}) + a_{13}(-1)^{3+1}\det(M^*_{31})$$

가 된다.

Proof.

여기서 2×2 행렬인 소행렬 M_{ij} 와 M^*_{ji} 는 $M_{ij} = (M^*_{ji})^T$ 의 관계를 가지므로,

$$\det(M_{ij}) = \det((M^*_{ji})^T) = \det(M^*_{ji}) \tag{10.16}$$

이 성립한다. 따라서 $\det(A) = \det(A^T)$ 가 성립한다.

일반적으로 $n \times n$ 행렬 A 의 임의의 소행렬 M_{ij} 과 A^T 의 소행렬 M^*_{ji} 에 대해

$$\det(M_{ij}) = \det((M^*_{ji})^T) = \det(M^*_{ji}) \tag{10.17}$$

이 성립한다. 따라서, 행렬 $A_{n\times n}$ 의 첫번째 행을 중심으로 구한 행렬식

$$\det(A) = a_{11}(-1)^2 \det(M_{11}) + a_{12}(-1)^3 \det(M_{12}) + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1} \det(M_{1n})$$

과, A^T 를 첫번째 열을 중심으로 구한 행렬식

$$\det(A^T) = a_{11}(-1)^2 \det(M^*_{11}) + a_{12}(-1)^3 \det(M^*_{21}) + \cdots + a_{1n}(-1)^{n+1} \det(M^T_{n1}) \tag{10.18}$$

은 $\det(M_{ij}) = \det((M^*_{ji})^T) = \det(M^*_{ji})$ 이므로, $\det(A) = \det(A^T)$ 이 성립한다. □

Theorem (정리 10.9)

행렬 $A_{n\times n}$ ($n \geq 2$) 에 대하여, 두 행의 위치를 서로 바꾸어 얻은 행렬을 B 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\det(A) = -\det(B).$$

Proof.

$n = 2$ 인 경우,

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = -\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \tag{10.19}$$

임을 알 수 있다. 이제 $n = 3$ 인 경우를 고려하자. 아래 A 에서 2행과 3행을 서로 교환한 행렬을 아래와 같이 B 라 하자.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Proof.

두 행렬 A, B 의 1행 1열을 제외하여 얻은 소인자 M_{11}^A, M_{11}^B 는

$$M_{11}^A = \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}, \qquad M_{11}^B = \begin{pmatrix} h & i \\ e & f \end{pmatrix}$$

가 성립함을 알 수 있고 따라서 $\det(M_{11}^A) = -\det(M_{11}^B)$ 임을 알 수 있다. 이러한 관계는 임의의 소인자에 대해 성립함을 확인할 수 있으므로 일반적으로

$$\det(M_{ij}^A) = -\det(M_{ij}^B) \tag{10.20}$$

관계가 성립한다. 따라서,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}^A) = -\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}^B) = -\det(B) \tag{10.21}$$

이다. 이를 같은 방식으로 모든 $n(>3)$ 에 대해 적용할 수 있으며, 따라서 $\det(A) = -\det(B)$ 가 성립한다. □

Theorem (정리 10.10)

행렬 $A_{n\times n}$ $(n \geq 2)$ 에 대하여, 임의의 한 행에 스칼라 c 를 곱한 행렬을 B 라 하면 다음이 성립한다.

$$\det(B) = c \cdot \det(A). \tag{10.22}$$

Proof.

행렬 A 의 k 번째 행에 스칼라 c 를 곱한 행렬을 B 라 하면, B 의 행렬식을 k 번째 행을 기준으로 구하면

$$\det(B) = (ca_{k1})C_{k1} + (ca_{k2})C_{k2} + \cdots + (ca_{kn})C_{kn} = c\sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj} = c \cdot \det(A) \tag{10.23}$$

가 성립한다. □

Remark 행렬 $A_{n\times n}$ 의 한 행에 c_1 을 곱하고 다른 행에 c_2 를 곱한 행렬을 B 라고 하면

$$\det(B) = c_1 c_2 \det(A) \tag{10.24}$$

가 성립한다.

Remark 행렬 $A_{n\times n}$ 에 스칼라 c 를 곱한 행렬을 B 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\det(B) = c^n \det(A). \tag{10.25}$$

Theorem (정리 10.11 기본행연산행렬의 행렬식)

기본행연산을 수행하는 연산행렬에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\det(R_{i,j}) = -1$

(2) $\det(R_{i(c)}) = c$

(3) $\det(R_{i,j(c)}) = 1$

Proof.

$R_{i,j}$ 는 항등행렬 I_n 의 열을 바꾼 것이므로

$$\det(R_{i,j}) = -\det(I_n) = -1 \tag{10.26}$$

이다. 또한 $R_{i(c)}$ 는 모든 대각원소가 1이고 i 번째 대각원소만 c 이므로

$$\det(R_{i(c)}) = 1 \times 1 \times c \times 1 \times \cdots \times 1 = c \tag{10.27}$$

이다. $R_{i,j(c)}$ 는 대각원소가 모두 1인 상삼각행렬 또는 하삼각행렬이므로 아래가 성립한다.

$$\det(R_{i,j(c)}) = 1 \times \cdots \times 1 = 1. \tag{10.28}$$

Theorem (정리 10.12)

행렬 $A_{n\times n}$ 이 비정칙행렬이면

$$\det(A) = 0$$

이다.

Proof.

비정칙행렬 A 는 기본행연산 $A \xrightarrow{ERO} B$ 을 통해 얻은 행렬 B 는 $\mathbf{0}$ 인 행을 포함한 상삼각행렬이 된다. 따라서 $\det(B) = 0$ 이다. 또한

$$\det(B) = \det(R_1 \cdots R_k A) = C \times \det(A) \tag{10.29}$$

이며 여기서 R 은 기본행연산을 나타내는 연산행렬이며 C 는 0 이 아닌 상수이다. 따라서 $\det(A) = 0$ 이다. □

Theorem (정리 10.13)

행렬 $A_{n\times n}$ 이 정칙행렬이면

$$\det(A) \neq 0$$

이다.

Proof.

정칙행렬 A 는 기본행연산을 통해 $A \xrightarrow{ERO} I_n$ 이 된다. 따라서 $\det(B) = 0$ 이다. 또한

$$1 = \det(I_n) = \det(R_1 \cdots R_k A) = C \times \det(A) \tag{10.30}$$

이며 여기서 R 은 기본행연산을 나타내는 연산행렬이며 C 는 0 이 아닌 상수이다. 따라서 $\det(A) \neq 0$ 이다. $\square$

Remark 행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여, $\det(A) = 0$ 이면, A 는 비정칙행렬이다.

Remark 행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여, $\det(A) \neq 0$ 이면, A 는 정칙행렬이다.

행렬 $A_{n\times n}$ 에 대하여 역행렬 A^{-1} 가 존재하기 위한 조건은 다음과 같다.

1. $\mathrm{Rank}(A) = n$
2. A 의 모든 행은 선형독립이다
3. $\mathcal{R}(A)$ 의 기저의 수는 n
4. $\mathcal{C}(A)$ 의 기저의 수는 n
5. $\det(A) \neq 0$
6. $A \xrightarrow{ERO} I_n$

Theorem (정리 10.14 행렬식의 곱셈정리)

$A_{n\times n}, B_{n\times n}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{10.31}$$

Proof.

우선 A 가 대각행렬인 경우를 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} & (10.32) \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\det(B) = \det(A)\det(B) & (10.33)
\end{aligned}$$

가 성립함을 알 수 있다.

Proof.

A 가 비정칙행렬인 경우, AB 도 비정칙행렬이다 (연습문제 5). 비정칙행렬의 행렬식은 0 이므로

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{10.34}$$

이 성립한다.

A 가 정칙행렬인 경우, $A \xrightarrow{ERO} I_n$ 이 성립한다. 이 때, 기본행연산을 E 라고 한다면 (즉, $EA = R_1 R_2 \cdots R_k A = I_n$),

$$\det(EA) = \det(R_1 R_2 \cdots R_k A) = C \cdot \det(A) = \det(I_n) = 1. \tag{10.35}$$

여기서 C 는 0 이 아닌 상수이다. 따라서

$$\det(A) = 1/C \tag{10.36}$$

이다. □

Proof.

또한 $EA = I_n$ 이므로,

$$\det(B) = \det(EAB) = C \cdot \det(AB) \tag{10.37}$$

를 만족하므로

$$\det(AB) = \frac{1}{C} \cdot \det(B) \tag{10.38}$$

이다. 따라서 (10.36) 으로부터

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

가 성립한다. □

Example

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 의 성질을 이용하여 다음을 보여라.

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_c \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_c \end{pmatrix}. \tag{10.39}$$

(풀이) 좌측 행렬을 A, 우측 행렬을 B 라 하면, $B = R_{1,3}A$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(R_{1,3}A) && (10.40) \\ &= \det(R_{1,3})\det(A) && (10.41) \\ &= -\det(A). && (10.42) \end{aligned}$$

Example

아래 행렬에 대한 행렬식을 (10.6)을 이용해 구하고, Theorem 10.14 를 이용해 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example

다음을 행렬식을 이용하여 증명하라.

(1) 행렬 A 에 원소가 모두 0인 행이 있으면 역행렬이 존재할 수 없다.

(2) 행렬 A 에 똑같은 행이 2개 존재하면 역행렬이 존재할 수 없다.

(3) 행렬 A 에 한 행의 원소가 다른 행의 원소의 c 배 라면 역행렬이 존재할 수 없다.