Quiz #2 - Solution

2015/10/21

1. (8, 7 pts) Determine the constant c so that $p(x)$ or $f(x)$ satisfies the conditions of being a probability mass function (p.m.f) or a probability density function (p.d.f) for some random variable.

(i) $p(x)=\frac{x}{c}$, $x=1,2,\ldots,n$.

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{x}{c}=\frac{1}{c}\frac{n(n+1)}{2}=1 \Leftrightarrow c=\frac{2}{n(n+1)}$$

(ii) $f(x)=\frac{3}{16}x^2$, $-c \le x \le c$

$$\int_{-c}^{c}\frac{3}{16}x^2dx=\frac{3}{16}\frac{1}{3}x^3|_{-c}^{c}=\frac{c^3}{8}=1 \Leftrightarrow c=2$$

2. (5, 8, 7 pts) The pdf of X is given by

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

(i) Verify that $f(x)$ is a pdf.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = \int_{1}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = 1 \quad (1+e^{-x}=t)$$

(ii) Show that

$$Y=\frac{1}{1+e^{-X}}$$

has a $U(0,1)$ distribution.

$$F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \quad \therefore F(X)=\frac{1}{1+e^{-X}} \sim U(0,1)$$

(iii) Find a function G such that

$$P(G(U) \le x)=\frac{1}{1+e^{-x}}, \ -\infty < x < \infty, \ U \sim U(0,1)$$

$$P(F^{-1}(U) \le x)=F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\therefore G(x)=F^{-1}(x)=\log(\frac{x}{1-x})$$

3. (10, 10 pts) (i) Let the random variable X be equal to the number of days that it takes a high-risk driver to have an accident. Assume that X has an exponential distribution. If $P(X<50)=0.25$, compute $P(X>100 \ |X>50)$.

From the memoryless property of the exponential distribution,

$P(X>100|X>50)=P(X>50)=1-P(X<50)=0.75$

(ii) Suppose the birth weight (X) in grams of U.S. infants has the pdf

$$f(x) = \frac{3x^2}{3500^3} e^{-(x/3500)^3}, \ 0 < x < \infty.$$

Compute $P(X > 4000 | X > 3000)$.

$F(x) = 1 - e^{-(x/3500)^3}$

$\therefore P(X > 4000 | X > 3000) = \dfrac{P(X > 4000)}{P(X > 3000)} = e^{(6/7)^3 - (8/7)^3}$

4. (10 pts) Let X have an exponential distribution with $\lambda = 1$, that is, the pdf of X is $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$. Let $T = \ln(X)$. Find a p.d.f of T.

$g(x) = \ln(x)$, $g^{-1}(x) = (g^{-1})'(x) = e^x$

$\therefore f_T(t) = f_X(e^t)|e^t| = e^{-e^t} e^t$, $-\infty < t < \infty$

5. (8, 7 pts) 어느 고속도로 톨게이트에는 10분당 평균 5대의 차가 지나가고, 지나가는 차의 대수는 포아송분포를 따른다고 한다.

(i) 차가 1대 지나가기까지 5분 이상 기다릴 확률은 무엇인가?

1분당 통과대수는 평균이 0.5인 포아송분포를 따르므로, 대기시간을 Y라 하면, $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$.

$P(Y > 5) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 5} = e^{-5/2}$

(ii) 8대의 차가 지나가기까지 26.3분 이상 기다릴 확률은 무엇인가? ($\chi^2_{0.05}(16) = 26.3$)

8대의 차가 지나가기까지의 대기시간을 Y'이라 하면, $Y' \sim Gamma(8,2) = \chi^2(16)$

$\therefore P(Y' > 26.3) = P(\chi^2(16) > \chi^2_{0.05}(16)) = 0.05$

6. (5, 8, 7 pts) (5번에서 계속) 1분 간격으로 차가 톨게이트를 통과하는지 여부를 기록하였다 (적어도 한 대 이상이 통과하면 1, 한 대도 통과하지 않으면 0).

(i) 1분 내에 적어도 한 대 이상의 차량이 통과할 확률은 얼마인가?

대기시간이 1분보다 짧을 확률이므로 $p = P(Y \le 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$

(ii) 총 20분 동안 기록한 결과, 차량이 통과한 시간대의 수를 T라 하면, $P(T \geq 19)$를 계산하여라.

$T \sim B(20, p)$, $\therefore P(T \geq 19) = P(T = 19) + P(T = 20) = \binom{20}{19} p^{19}(1-p)^1 + \binom{20}{20} p^{20}(1-p)^0 = p^{19}(20 - 19p)$

(iii) 차량이 통과한 시간대가 3회 이상 발생할 때까지 기록을 계속한다고 할 때, 기록한 횟수가 5회 이상일 확률을 $\sum$ 형태로 표현하여 보아라.

기록한 횟수를 S라 하면, $S \sim NB(3, p)$

$\therefore P(S \geq 5) = \sum_{k=5}^{\infty} \binom{k-1}{2} p^3 (1-p)^{k-3}$

[참고] 3(ii), 5, 6 문항의 경우 계산결과를 간단한 형태로만 표현해도 좋음. (ex) : $e^{-(3/2)^3}$ **or** $10 * 0.2^7$**)**