Linear Algebra for Statistics

Chapter 7

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 7 벡터공간

7.1 벡터공간의 정의

벡터공간이란 벡터의 덧셈과 뺄셈, 그리고 스칼라와 벡터의 곱셈 등의 연산이 정의된 공간을 의미하며, 벡터나 스칼라가 정의되었던 $\mathbb{R}^n$ 유클리드 공간도 벡터공간에 포함된다.

Definition

임의의 공간 V 에 대하여 $X, Y, Z \in V$ 일 때,

(1) $X + Y = Y + X$ 이 성립한다. (덧셈의 교환법칙)

(2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ 이 성립한다. (덧셈의 결합법칙)

(3) 임의의 원소 $X \in V$ 에 대하여, $X + O = X$ 가 성립하는 원소 $O \in V$ 가 항상 존재한다. 이 때 O 를 덧셈의 항등원이라 한다.

(4) 임의의 원소 $X \in V$ 에 대하여, $X + (-X) = O$ 가 성립하는 원소 $-X \in V$ 가 항상 존재한다. 이 때, $-X$ 를 덧셈의 역원이라 한다.

(5) a, b 가 스칼라일 때, $a(bX) = b(aX)$ 가 성립한다.

(6) a, b 가 스칼라일 때, $(a + b)X = aX + bX$ 가 성립한다.

(7) a 가 스칼라일 때, $a(X + Y) = aX + aY$ 가 성립한다.

(8) 스칼라 1 에 대해, $1X = X$ 가 성립한다.

Example

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T, x_i \in \mathbb{R}$ 이라 정의되는 벡터 $\mathbf{x}$ 로 구성된 집합 V 는 벡터공간임을 보여라.

(풀이)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in V, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in V \tag{7.1}$$

라 하자.

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, (덧셈의 결합법칙)

(3) $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$ 이라 하면, $\mathbf{0} \in V$ 이며, 임의의 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대하여 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ 가 성립.

(4) 임의의 벡터 $\mathbf{x} \in V$ 에 대하여, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 이고 $-\mathbf{x} \in V$ 이다.

Example (continue)

(5) a, b 가 스칼라에 대하여,
$a(b\mathbf{x}) = a(bx_1, bx_2, bx_3)^T = (abx_1, abx_2, abx_3)^T = b(ax_1, ax_2, ax_3)^T = b(a\mathbf{x})$ 가 성립한다.

(6) a, b 가 스칼라일 때, $(a+b)\mathbf{x} = ((a+b)x_1, (a+b)x_2, (a+b)x_3)^T = (ax_1, ax_2, ax_3)^T + (bx_1, bx_2, bx_3)^T = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ 가 성립한다.

(7) a 가 스칼라일 때,
$a(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = a(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)^T = a(x_1, x_2, x_3)^T + a(y_1, y_2, y_3)^T = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ 가 성립한다.

(8) 스칼라 1 에 대해, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 가 성립한다.

따라서 V 는 벡터공간이다.

Remark 행렬 $A_{m\times n}$이 정의되는 공간도 벡터공간임을 동일한 과정을 통해 확인할 수 있다.

Example

임의의 실수 $m_{ij} \in \mathbb{R}$ 를 원소로 하는 $M_{2\times 2}$ 행렬의 집합 V 도 벡터공간임을 보여라.

(힌트) 2×2 행렬 A, B, C 에 대하여 (1)-(8) 이 성립함을 보여라

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

7.2 부분공간(Subspace)

부분공간은 벡터공간 V 의 부분집합이며 원소 간의 덧셈과 스칼라 곱에 대해 닫혀(closed) 있는 성질을 갖고 있다.

Definition

벡터공간 V 의 공집합이 아닌 부분집합 $W \subset V$ 에 대하여,

1. 임의의 $v, w \in W$ 에 대하여, $v + w \in W$ 이고
2. 임의의 스칼라 a 에 대하여, $v \in W$ 이면 $av \in W$

를 만족하면 W 는 V 의 부분공간이다.

Remark W 가 V 의 부분공간임을 증명하기 위해

1. $W \subset V$
2. 임의의 스칼라 $a, b \in \mathbb{R}$ 와 임의의 원소 $v, w \in W$ 에 대하여, $av + bw \in W$

임을 보여도 충분하다.

Example

크기가 2×2 인 행렬의 집합을 V 라고 할 때,

$$W = \left\{ A \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R} \right\} \tag{7.2}$$

라고 정의되는 집합 W 가 V 의 부분공간임을 증명하라

(풀이) 먼저 $W \subset V$ 는 자명하다. 그리고,

1. $A, B \in W$ 이면,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W. \tag{7.4}$$

2. 임의의 스칼라 c 에 대하여

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \tag{7.5}$$

이므로 W 는 V 의 부분공간이다.

7.3 선형독립(Linear Independence)

벡터공간 V 에 속한 원소 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ 의 선형결합(linear combination)은 동일한 수의 스칼라 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 에 대하여

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v} \tag{7.6}$$

라고 표현이 가능하다.

Definition

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ 에 대하여,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v} = 0 \tag{7.7}$$

을 만족하는 $\boldsymbol{\lambda}$ 가 오직 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T = \mathbf{0}$ 이라고 할 때, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 은 선형독립(linearly independent)이라고 하고, 위의 식을 만족하는 $\mathbf{0}$ 이 아닌 $\boldsymbol{\lambda}$ 가 존재할 때, 이를 선형종속(linearly dependent)이라고 한다.

만일 식 (7.7) 에서 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 중 적어도 한개가 0이 아니라고 가정하자. 예를 들어 i 번째 λ_i 가 0 이 아니라고 하자. 그러면,

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}v_n \tag{7.8}$$

으로 표현가능하다. 즉, v_i 가 나머지 원소들의 선형결합으로 표현되는 종속관계를 보이게 된다.

Example

아래의 벡터들은 서로 선형독립이다.

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,-1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (1,-2,1)^T.$$

왜냐하면,

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = (\lambda_3, \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^T = (0,0,0)^T \tag{7.9}$$

에서 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T = (0,0,0)^T$ 일 수 밖에 없기 때문이다.

Example

아래의 벡터들이 서로 선형종속임을 증명하라.

$$\mathbf{v}_1 = (0,0,1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,-1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (1,-2,1)^T, \quad \mathbf{v}_4 = (4,2,3)^T.$$

Example

아래의 행렬들이 서로 선형독립인지, 선형종속인지 구분하라.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

7.4 생성(Span)

Definition

벡터공간의 원소 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ 에 대하여,

$$W = \{w \mid w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

으로 정의되는 집합 W 를 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 의 생성(span)이라고 하며,

$$W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \tag{7.10}$$

이라 표기한다.

Example

생성으로 정의된 집합 W 가 부분공간임을 증명하라.

(풀이) 벡터공간 V 는 덧셈 및 스칼라 곱에 대하여 닫혀있으므로 $V \subset W$ 임을 알 수 있다. 또한 $x, y \in W$ 라 하면, 생성의 정의에 의해

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

$$y = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$$

로 표현 가능하다. 한편,

$$x + y = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (a_n + b_n) v_n \in W \tag{7.11}$$

이고

$$\lambda x = (\lambda a_1) v_1 + (\lambda a_2) v_2 + \cdots + (\lambda a_n) v_n \in W \tag{7.12}$$

이므로 W 는 V 의 부분공간이다.

Example

집합 W 가 아래와 같이 정의될 때, $\mathbf{x} = (7, 3)^T$ 이 W 의 원소임을 보여라.

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7.5 기저(Basis)

벡터공간을 구성하는 기본원소들을 벡터공간의 기저(basis)라고 하며, 기저의 수는 벡터공간의 차원(dimension)이 된다.

Definition

벡터공간 W 의 원소 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 이 다음의 조건을 만족한다고 하면 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 을 벡터공간 W 의 기저(basis)라고 하며, W 의 차원(dimension)은 n 이고, $\dim(W) = n$ 이라고 표시한다.

1. $W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
2. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 은 선형독립

Example

$\mathbb{R}^2$ 의 두 벡터 $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ 가 공간 $\mathbb{R}^2$ 의 기저임을 보여라

(풀이) 먼저 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 가 선형독립임을 보이기 위해

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{7.13}$$

이라 하면 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 이 유일한 해이므로, $\mathbf{e}_1$ 과 $\mathbf{e}_2$ 는 선형독립이다. 그리고, 임의의 원소 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

이므로 $\mathbf{x} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 이다. 따라서 $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 임을 의미한다. 같은 방식으로 $\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ 임을 증명할 수 있다. 따라서 $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 이다. 따라서 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 가 공간 $\mathbb{R}^2$ 를 생성하는 선형독립인 원소이므로 이는 $\mathbb{R}^2$ 의 기저이다.

Example

아래의 두 벡터도 $\mathbb{R}^2$ 의 기저가 됨을 보여라.

$$\mathbf{d}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{d}_2 = (1, -1)^T.$$

7.6 생성의 기하학적 해석

한개의 벡터 $\mathbf{v}$ 에 의한 생성은

$$W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = a\mathbf{v}, \quad a \in \mathbb{R}\}$$

로 정의되며, 이는 Figure 7.1 과 같이 벡터 $\mathbf{v}$ 를 지나는 직선 상의 모든 점의 집합이다.

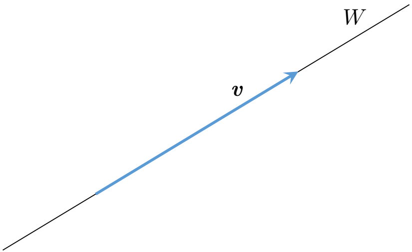

Figure 7.1: 벡터 $\mathbf{v}$ 에 의한 생성, $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}\}$

두개의 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 에 의한 생성은

$$W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

로 정의되며, 이는 Figure 7.2 의 왼쪽 그림과 같이 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 를 포함하는 평면 상의 모든 점의 집합이다. 또한 세개의 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 에 의한 생성은 오른쪽 그림과 같이 세개의 벡터를 포함하는 3차원공간상의 모든 점을 말한다.

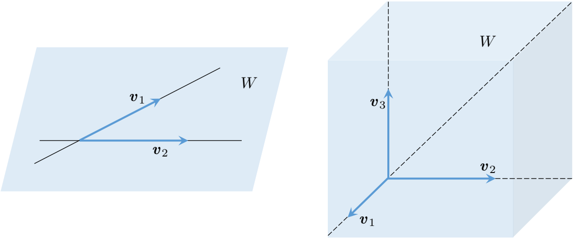

Figure 7.2: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 에 의한 생성 $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 와 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 에 의한 생성 $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

Example

다음이 성립함을 증명하라.

$$\operatorname{Span}\{\cos^2 t, \sin^2 t\} = \operatorname{Span}\{\cos^2 t, 1\}$$

Example

다음이 성립함을 증명하라.

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{x}, 2\mathbf{x}\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

7.7 열공간(Column Space)

Definition

행렬 $A_{n\times n} = (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{a}}_n)$ 에 대하여 $W = \mathrm{Span}\{\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{a}}_n\}$ 라 하면, W 는 행렬 A 의 열공간(column space)이며, $W = \mathcal{C}(A)$ 라고 표기한다.

Example

벡터 $\mathbf{x} = (1, 4, -3)^T$ 는 아래 행렬의 열공간에 속한 원소이다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2).$$

왜냐하면 $\mathbf{x} = (-1)\tilde{\mathbf{a}}_1 + (1)\tilde{\mathbf{a}}_2$ 이기 때문이다.

Example

행렬 A가 아래와 같을 때, 어떤 임의의 벡터 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여, 벡터 $\mathbf{x}$ 는 A의 열공간 원소임을 보여라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(풀이) $\mathbb{R}^3$ 에 속한 임의의 벡터를 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 라고 하면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(A)$ 이다.

7.8 선형방정식과 열공간

아래의 x, y, z 에 대한 선형연립방정식에 대하여

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

이를 행렬로 표현하면 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 라는 선형방정식이 된다.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}. \tag{7.14}$$

Theorem (정리 7.1)

행렬 $A_{m\times n}$*에 대하여, 선형방정식* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *가 해를 갖기 위한 조건은* $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ *이다.*

Proof.

선형방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 를 만족하는 $\mathbf{x}$ 가 존재한다는 것은

$$A\mathbf{x} = x_1\tilde{\mathbf{a}}_1 + x_2\tilde{\mathbf{a}}_2 + \cdots + x_n\tilde{\mathbf{a}}_n = \mathbf{b}$$

를 만족하는 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 가 존재한다는 의미이다. 따라서 $\mathbf{b}$ 가 행렬 A 의 열벡터에 의한 선형결합으로 표현되므로 $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ 이다. □

Example

아래 선형연립방정식이 해를 가지기 위한 a, b 의 조건을 구하라.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 4x + 8y + 12z = b \end{cases} \tag{7.15}$$

(풀이) 위의 연립방정식을 행렬표현으로 표시하면

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

이고

$$\mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

이다. 따라서 필요 조건은

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

이다. 즉, $b = 4a$ 인 모든 (a, b) 에 대해 방정식의 해가 존재한다.

7.9 행공간과 영공간

Definition

행렬 $A_{m\times n}$ 이

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{pmatrix}$$

라고 할 때, $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ 는 행렬 A 의 행공간(row space) 이며, 이를 $W = \mathcal{R}(A)$ 라 표기한다.

Example

아래 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

에 대하여 벡터 $(2, 3, -1, 0)^T$ 는 A 의 행공간의 원소이다. 왜냐하면

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

이므로 $(2, 3, -1, 0)^T \in \mathcal{R}(A)$ 이다.

Definition

행렬 $A_{m\times n}$에 대하여, $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 을 만족하는 $\mathbf{x}$ 의 집합을 A의 영공간(null space)이라 하며 $\mathcal{N}(A)=\{\mathbf{x}\mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$ 으로 표기한다.

Proposition (7.2)

행렬 $A_{m\times n}$에 대하여, $\mathcal{N}(A)$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.

Proof.

벡터 $\mathbf{x}$ 가 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 을 만족하면 $\mathbf{x}$ 가 $n\times 1$ 벡터이므로 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 이다. 따라서 $\mathcal{N}(A)\subset\mathbb{R}^n$ 이다.
만일 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathcal{N}(A)$ 라고 한다면, 스칼라 c_1,c_2 에 대하여

$$A(c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2)=c_1A\mathbf{x}_1+c_2A\mathbf{x}_2=c_1\mathbf{0}+c_2\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

이므로 $c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2\in\mathcal{N}(A)$ 이다. 따라서 $\mathcal{N}(A)$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다. $\square$

Example

아래의 행렬 A의 영공간은 $\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = c(1,-1,1)^T,\ c$는 실수$\}$ 임을 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(풀이) 다음을 만족하는 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 는 영공간의 원소이다.

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

따라서 $x_1 + x_2 = 0$ 및 $x_1 - x_3 = 0$ 을 만족하는 모든 $\mathbf{x}$ 는 $\mathcal{N}(A)$ 의 원소이며 이는

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, -x_1, x_1)^T = c(1,-1,1)^T, \quad c \text{ 는 임의의 실수}$$

의 형태를 띈다.