ESTUDIOS
GENERALES
CIENCIAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

FUNDAMENTOS DE PROGRAMACIÓN
LABORATORIO 9
SEMESTRE ACADÉMICO 2020-1

Horarios: B302
Elaborado por Ian Paul Brossard

Duración: 100 minutos

ADVERTENCIAS:

- Es su responsabilidad verificar anticipadamente a la sesión, que el software que utilizará para desarrollar el laboratorio funcione adecuadamente.

INDICACIONES:

- Debe utilizar variables descriptivas, comentarios, constantes, mensajes descriptivos y debe validar los datos de entrada.
- El orden y la eficiencia de su implementación serán considerados en la calificación.

RESULTADOS ESPERADOS:

- Al finalizar la sesión, el alumno construirá programas usando diseño estructurado.

Implementación en ANSI C (20 puntos)- Deberá guardar el archivo con el nombre **L9_codigoalumno.c**

Función de Bessel (adaptado de F. J. Sanchis & A. Morales, 1978):

La función de Bessel de índice n viene definida por:

$$J_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k}{k!\left(n+k\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Para todo $(n+k) > 0$, es decir, esta sumatoria solo acumula aquellos términos en los que se cumple que $n+k$ permiten generar un factorial válido (ya que no se puede calcular el factorial de un número negativo), e ignora a todos aquellos términos en los que no se cumple que $n+k \geq 0$.

Usted deberá implementar una función $J_n(x)$ que reciba como parámetros los valores n y x, para generar la sumatoria de todos los términos que tienen $(n+k)!$ válido, ignorando todos aquellos términos en los que $n+k$ es menor a cero. Esta función $J_n(x)$ deberá hacer uso de una función llamada ***calcularFactorial***, la cual recibirá como parámetro un número num mayor o igual a cero, y retornará 1 si es que num es 0, y el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta num en todos los demás casos.

$$5! = \text{calcularFactorial}(5) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$3! = \text{calcularFactorial}(3) = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$0! = \text{calcularFactorial}(0) = 1$$

Una vez que usted haya implementado estas 2 funciones, usted deberá demostrar la siguiente propiedad:

$$J_{-n}\left(x\right) = \left(-1\right)^n J_n\left(x\right)$$

Es decir:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(-n+k\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\left(-1\right)^{n}J_{n}\left(x\right)$$

Esto es, porque según lo señalado párrafos arriba, la sumatoria de la función de Bessel solo acumula a los términos que hagan posible el factorial $(-n+k)!$, por ejemplo, si $-n$ fuera, por ejemplo -3, la sumatoría no tomaría en cuenta los valores de k=0, k=1 y k=2, motivo por el que el índice k realmente iría desde 3 hasta infinito.

Aplicando este criterio a nuestra fórmula, podríamos decir que el valor inicial de k debe ser n y no 0, motivo por el cual $J_{-n}(x)$ podría ser representado como:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(-n+k\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

Usando la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{a=b}^{\infty}f\left(a\right)=\sum_{a=0}^{\infty}f\left(a+b\right)$$

Podríamos escribir la función de Bessel de -n como con una sumatoria que empiece en $k=0$ y, dentro de la fórmula, cambiamos cada k por $(k+n)$, obteniendo la siguiente forma:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+n}}{\left(k+n\right)!\left(-n+k+n\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)-n}$$

Haciendo las simplificaciones adecuadas y resolviendo el exponente $2(k+n)-n$, nuestra fórmula quedaría así:

$$J_{-n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(-1\right)^{n}}{(k+n)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n-n}$$

El exponente $2k+2n-n$ se reduciría a simplemente 2k+n, y la constante $(-1)^{n}$ puede salir de la sumatoria, obeniendo exactamente $(-1)^{n}J_{n}(x)$, tal y como se aprecia a continuación:

$$J_{-n}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(n+k\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\left(-1\right)^{n}J_{n}\left(x\right)$$

Para más detalle acerca de esta demostración, usted puede consultar el siguiente recurso: `https://www.youtube.com/watch?v=laFNOBpb3KI`, correspondiente al canal de MateFacil, importante cuenta de youtube con más de 672,000 suscriptores. Duración total del vídeo: 6 minutos con 48 segundos.

Demostración:
Dado que usted no puede generar infinitos términos para cada sumatoria (pues de hacerlo, su programa nunca terminaría), deberá trabajar con una cantidad de términos ingresada por teclado, y deberá validar, mediante una función llamada ***validarTerminos***, que el número de términos a usar sea mayor o igual a 1 y menor o igual a 10.

Para realizar la demostración solicitada en este problema, usted simplemente deberá hacer uso de estructuras algorítmicas iterativas anidadas para generar los siguientes valores de x, n, y $-n$, e imprimir su correspondietnte valor de Bessel:

$$J_{n}\left(x\right)\text{para}\begin{cases} x=1;\ 1.1;\ 1.2;\ ...\ ;\ 1.9;\ 2\\ n=0\ ;\ \ 1\ ;\ \ 2\ ;\ ...;\ \ 9\ ;\ \ 10\\ -n=0;-1;-2;...;-9;-10\end{cases}$$

Es decir, para cada uno de los 10 valores de x, desde $x=1$ hasta $x=2$, con un incremento de 0.1 en cada iteración, usted debera generar una función de Bessel para n y $-n$ e imprimir los valores de $J_{n}(x)$, $J_{-n}(x)$, y $(-1)^{n}J_{n}(x)$ para todos los valores desde $n=0$ hasta $n=10$ con un incremento de 1.0 en cada iteración. Esta immpresión de valores Bessel se hace con el objetivo de poder analizarlos visualmente y que el usuario pueda comprobar si es verdad que $J_{-n}(x)=(-1)^{n}J_{n}(x)$.

Nota: recuerde que al sumarle 10 veces el valor de 0.1 a una variable de tipo *double* inicializada en 1, usted obtendrá el valor de 2.0000000000000009, en vez de 2, por tal motivo, usted deberá usar una condición de final de iteración que contemplen este detalle. Por ejemplo, usted puede usar $x <= 2.01$ o $x <= 2.001$ en vez de $x <= 2$.

Por favor, solo imprima los valores, y no haga la comparación de $J_{-n}(x)$ y $(-1)^n J_n(x)$, debido a que por la precisión de decimales, es probable que esta propiedad no se cumpla en lenguaje C. La comparación la hará visualmente el usuario. Para facilitar su lectura y hacer posible la comparación de sus valores Bessel visualmente, utilice impresión con 10 decimales (ver ejemplos de salida).

A continuación, se muestran algunos ejemplos de ejecución:

```
Por favor, ingrese el número de términos a usar: 10
para x = 1.0
para n = 0, J(x) = 0.7651976866
para -n = 0, J(x) = 0.7651976866
(-1)^n*J(x) =    0.7651976866

para n = 1, J(x) = 0.4400505857
para -n = -1, J(x) = -0.4400505857
(-1)^n*J(x) =    -0.4400505857

para n = 2, J(x) = 0.1149034849
para -n = -2, J(x) = 0.1149034849
(-1)^n*J(x) =    0.1149034849

para n = 3, J(x) = 0.0195633540
para -n = -3, J(x) = -0.0195633540
(-1)^n*J(x) =    -0.0195633540

... [hemos eliminado algunas líneas de la impresión] ...

para x = 1.1
para n = 0, J(x) = 0.7196220185
para -n = 0, J(x) = 0.7196220185
(-1)^n*J(x) =    0.7196220185

para n = 1, J(x) = 0.4709023949
para -n = -1, J(x) = -0.4709023949
(-1)^n*J(x) =    -0.4709023949

... [hemos eliminado algunas líneas de la impresión] ...
```

Por motivos de espacio, solo estamos incluyendo una porción del ejemplo de salida. En este recuadro se muestran solo los primeros 4 casos evaluados para $x = 1.0$ (es decir, los casos desde $n = 0$ hasta $n = 3$). En seguida, se muestran los 2 primeros casos evaluados para $x = 1.1$ (es decir, los casos desde $n = 0$ hasta $n = 2$). Usted debe imprimir la totalidad de casos.

```
Por favor, ingrese el número de términos a usar: 0
El número de términos debe ser mayor o igual a 1 y menor o igual a 10
```

Bibliografia:

- F. J. Sanchis & A. Morales (1978), Problemas de Programación, enunciados, soluciones y listados. Ediciones Pirámide S.A., Madrid, España, ISBN: 84-368-0092-3, p.152.