

群与 Galois 理论

作业 3

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 26 日

目录

1	A. 60 阶的单群	2
2	B. 与 Sylow p -子群相关的补充	6

A. 60 阶的单群

A1)

证明: 由 Sylow 第二定理,

$$s_5 \equiv 1 \pmod{5},$$

故 s_5 可能的取值为 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56. 同时 $s_5 \mid |G| = 60$, 故 $s_5 = 1$ 或 6. 由假设知 $s_5 \neq 1$, 所以 $s_5 = 6$. \square

A2)

证明: (a)

由于课上命题, 通过对大群的 Sylow p -子群共轭可以得到子群的 Sylow p -子群. 于是 $\exists g \in G$, s.t. $H \cap gS_1g^{-1}$ 是 H 的 Sylow p -子群. 由于 $|H|$ 是 5 的倍数, H 的 Sylow p -子群的阶为 5, 所以 $gS_1g^{-1} \subset H$. 又由 Sylow 第二定理, $\exists g_i \in G$, s.t. $S_i = g_iS_1g_i^{-1}$, 其中 $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. 由于 H 是正规子群, 于是 $S_i \subset H, \forall i$. 可得 $|H| \geq 1 + (5-1) \times 6 = 25$. 又 $|H| \mid 60$, 得到 $|H| = 30$.

(b)

由 (a) 中证明过程, H 有 1 个单位元, $(5-1) \times 6 = 24$ 个阶为 5 的元素有 $(5-1) \times 6 = 24$ 个, 于是其他阶的元素只剩下 5 个, 有 $(3-1)s_3 \leq 5$. 由 Sylow 第二定理,

$$s_3 \equiv 1 \pmod{3},$$

于是 s_3 可能的取值为 1, 4, 7, 10, \dots . 于是 $s_3 = 1$. H 只有一个 Sylow 3-子群 T .

(c)

$\forall s_1t_1, s_2t_2 \in S_1T$, 如果 $s_1t_1 = s_2t_2$, 那么 $s_2^{-1}s_1 = t_2t_1^{-1}$. 因为 $s_2^{-1}s_1 \in S_1$, $t_2t_1^{-1} \in T$, $S_1 \cap T = \{1_H\}$, 所以 $s_2^{-1}s_1 = t_2t_1^{-1} = 1_H \Rightarrow s_1 = s_2, t_1 = t_2$. 故 $\forall s_1 \neq s_2 \in S_1, t_1 \neq t_2 \in T, s_1t_1 \neq s_2t_2$. 于是 $|S_1T| = 15$.

由于 H 只有一个 Sylow 3-子群 T , 故 $T \triangleleft H$. $\forall s_1t_1, s_2t_2 \in S_1T$, 有 $(t_1t_2^{-1})s_2 = s_3t_3 \in S_1T$, 于是

$$(s_1t_1)(s_2t_2)^{-1} = s_1(t_1t_2^{-1}s_2) = s_1(s_3t_3) = (s_1s_3)t_3 \in S_1T.$$

故 S_1T 是 H 的子群, 且阶为 15.

(d)

S_1T 在 H 中的指数为 2, 故 S_1T 是 H 的正规子群. 由于 $S_1 \subset S_1T$, 故 $S_i = g_iS_1g_i^{-1} \subset S_1T$. 但同时对于 S_1T , 有 $(5-1)s_5 \leq 15$, 故 S_1T 只有 1 个 Sylow 5-子群. 即所有 $S_i, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 都是相同的, 故 H 将只有 1 个 Sylow 5-子群. 而这与 (a) 中结论矛盾.

综上, $|H|$ 不是 5 的倍数.

□

A3)

证明: (a)

G/H 的阶只能是 15, 20, 30. 对于 G/H , $(5-1)s_5 \leq |G/H| - 1$.

如果 $|G/H| = 15$, $s_5 < 4$, 故 $s_5 = 1$.

如果 $|G/H| = 20$, $s_5 < 5$, 故 $s_5 = 1$.

如果 $|G/H| = 30$, $s_5 < 8$, 故 $s_5 = 1$ 或 6. 如果 $s_5 = 6$, 类似于 A2)(b)(c)(d) 的讨论, 可以推出矛盾. 故 $s_5 = 1$.

综上, $s_5 = 1$, G/H 只有一个 Sylow 5-子群.

(b)

取 G/H 的 Sylow 5-子群 $S = \{H = g_0H, g_1H, g_2H, g_3H, g_4H\}$, 那么令

$$H' = \bigcup_{i=0}^4 g_iH,$$

我们断言这是 G 的一个正规子群. 下面证明:

首先, $\forall h'_1 = g_ih_1, h'_2 = g_jh_2 \in H'$,

$$h'_1(h'_2)^{-1} = (g_ih_1)(g_jh_2)^{-1} = g_i(h_1h_2^{-1})g_j = g_i(g_jh_3) \in (g_i g_j)H \subset H',$$

于是 H' 是 G 的子群. 而 $\forall g \in G$, 有 $gSg^{-1} = S \Rightarrow \forall h' \in H', gh'g^{-1} \in H'$. 于是 $H' \triangleleft G$, 且 $H' \neq G$, $|H'|$ 是 5 的倍数. 由 A2) 推出矛盾. □

A4)

证明: 对于 $|H| = 6$ 的情况, $s_2 = 1, 3, \dots, s_3 = 1, 4, \dots, s_2|6, s_3|6$, 并且 $s_2 + 2s_3 \leq 5$, 只能有 $s_3 = 1, s_2 = 1$ 或 3.

对于 $|H| = 12$ 的情况, $s_2 = 1, 3, \dots, s_3 = 1, 4, \dots, s_2|12, s_3|12$, 并且 $3s_2 + 2s_3 \leq 11$, 只能有 $s_2 = 1, s_3 = 1; s_2 = 3, s_3 = 1$ 或者 $s_2 = 1, s_3 = 4$.

综上, H 只有一个 Sylow 2-子群或只有一个 Sylow 3-子群. 不妨记为 H' 其为 Sylow p -子群, 有 $H' \triangleleft H$, $|H'| \leq 4$. $\forall g \in G, h' \in H'$, 有 $gh'g^{-1} \in H$. 并且由于 $gh'g^{-1}$ 与 h' 在 H 中的阶相同, 于是 $|gh'g^{-1}| \mid p^2$. 由于 H' 是 H 中唯一的 Sylow p -子群, 于是 $gh'g^{-1} \in H'$. 这推出 $H' \triangleleft G$, 由 A3) 可知矛盾呢. □

A5)

证明: 考虑 G 在 G/H 的作用, 这显然是传递的. 这又诱导了一个群同态 φ :

$$G \rightarrow \mathfrak{S}_{G/H} \cong \mathfrak{S}_d,$$

其中 $d = |G/H| = [G : H]$. 由于 $\ker \varphi \triangleleft G$ 以及 G 是单群, $\ker \varphi = 1$ (显然 $\ker \varphi \neq G$). 于是 φ 是一个单射. 从而有 $|G| \mid d!$, 于是 $d \geq 5$.

如果 $d = 5$, 可以将 G 视为 \mathfrak{S}_5 的一个子群, 此时 $[\mathfrak{S}_5 : G] = 2$, 于是 $G \triangleleft \mathfrak{S}_5$. 由作业二知 $G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A6)

证明: 考虑 G 在 Sylow p -子群的集合 X 上的作用:

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, S_i) \mapsto gS_i g^{-1},$$

X 记为 $\{S_1, S_2, \dots, S_{s_p}\}$. 于是由 Sylow p -子群的共轭性质, 其诱导了一个群同态 φ :

$$G \rightarrow \mathfrak{S}_X \cong \mathfrak{S}_{s_p}, \quad g \mapsto \{S_i \mapsto gS_i g^{-1}\}.$$

同 A5) 的证明, 可以得到 $\ker \varphi = \{1\}$, 且 $|X| \geq 5$, 即 $s_p \geq 5$. 再结合 $s_p \equiv 1 \pmod{p}$, $s_p | 60$, 可以得到 $s_2 \in \{5, 15\}$, $s_3 = 10$, $s_5 = 6$. □

A7)

证明: 如果 $s_2 = 5$, 那么由 A6) 中的 φ 知 $G < \mathfrak{S}_5 \Rightarrow G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A8)

证明: 首先我们有, 两个 p 阶循环群, 除去单位元之外无共同元素. 假设 R, S 是两个阶为 p 的循环群, 且有非单位元的共同元素 r , 那么 $R = \{1, r, r^2, \dots, r^{p-1}\} = S$.

假设每两个 Sylow 2-子群共同元素只有单位元, 那么 G 中将有 $1 + 3s_2 + 2s_3 + 4s_5 = 90$ 个不同的元素, 这与 $|G| = 60$ 矛盾. 于是存在两个不同的 Sylow 2-子群 P, Q 有共同的非单位元的元素. 并且每个 Sylow 2-子群都共轭, 所以结构相同, 又不是循环群, 故都是 Klein 四元群. Klein 四元数群中每个元素都为 2 阶, 且这是交换群.

接下来考虑 $|P \cap Q|$. $|P \cap Q| = 4$ 导致 $P = Q$. 若 $|P \cap Q| = 3$, 由 Klein 四元数群的结构, 剩下一个不同元素又可以由两个共同的非单位元元素生成, 导致 $|P \cap Q| = 4$, 矛盾. 于是 $|P \cap Q| = 2$.

现在记 $D = P \cap Q = \{1, s\}$, 这是 G 的一个 2 阶子群. 注意到 P 是 Klein 四元群从而是交换的, 故而 P 中元素都与 s 交换, 从而 $R < N_G(D)$. 于是 $4 || N_G(D)$, 又 $|N_G(D)| | 60$, $P \cup Q \subset N_G(D) \Rightarrow |N_G(D)| \geq 6$, 故 $|N_G(D)| = 12$ 或 20.

又 $N_G(D) < G$, 由 A5), $[G : N_G(D)] \geq 5 \Rightarrow |N_G(D)| \leq 12$.

故只能有 $|N_G(D)| = 12$, $[G : N_G(D)] = 5$. 意味着 $G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A9)

证明: 由 A7), A8), 无论 s_2 取值为 5 还是 15, 都有 $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

只需计算 \mathfrak{A}_5 的 s_2 即可. 由 A8) 讨论知, 其中 Sylow 2-子群都为 Klein 四元群. 只需考察

(12)(34) 在哪些 Klein 四元群中. 有以下几种不同的情况:

$$((13)(24))((12)(34)) = (14)(23),$$

$$((12)(35))((12)(34)) = (345),$$

$$((13)(25))((12)(34)) = (15234).$$

只有第一种情况, (12)(34), (13)(24), (14)(23) 构成 Klein 四元群. 故 Sylow 2-子群共有 $15/3=5$ 个, 即 $s_2 = 5$. □

B. 与 Sylow p -子群相关的补充

B1)

证明：考虑 S 在 $G/N_G(S)$ 上的作用：

$$S \times G/N_G(S) \rightarrow G/N_G(S), \quad (g, hN_G(S)) \mapsto ghg^{-1}N_G(S).$$

注意到 $N_G(S) \in G/N_G(S)$ 被 S 固定, 而对于其他 $hN_G(S) \in G/N_G(S)$, 有 $ghg^{-1} \notin N_G(S)$, 否则 $h \in g^{-1}N_G(S)g \Rightarrow h \in N_G(S) \Rightarrow hN_G(S) = N_G(S) \in G/N_G(S)$. 于是由讲义引理 28, $[G : N_G(S)] \equiv 1 \pmod{p}$. \square

B2)

证明：由 Sylow 定理可知, $\exists g \in G$, s.t. $H \cap gSg^{-1}$ 是 H 的 Sylow p -子群. 于是自然地有 $g^{-1}(H \cap gSg^{-1})g = g^{-1}Hg \cap S$ 是 $g^{-1}Hg$ 的 Sylow p -子群. 又 $H \triangleleft G$, 于是 $g^{-1}Hg = H$. 故 $H \cap S$ 是 H 的 Sylow p -子群. \square

B3)

证明：设 $|G| = p^a m$, 其中 $p \nmid m$, 则 $|S| = p^a$. 设 $|H| = p^c n$, 其中 $p \nmid n$. 由于 $H \triangleleft G$, 于是 $|G/H| = p^{a-c}(m/n)$, 由于 $p \nmid (m/n)$, 故 G/H 的 Sylow p -子群的阶为 p^{a-c} .

一方面: 考虑 $S \cap H$, 由 B2) 结论知, $|S \cap H| = p^c$. 由于 $H \triangleleft G$, 有 $S \cap H \triangleleft S$. 考虑 π 在 S 上的限制 $\pi_1 : S \rightarrow G/H$, 有 $\ker \pi_1 = \{s \in S \mid sH = H\} = \{s \in S \mid s \in H\} = S \cap H$. 由第一同构定理, $S/S \cap H \simeq \pi_1(S) = \pi(S)$. 于是 $|\pi(S)| = |S/S \cap H| = |S|/|S \cap H| = p^a/p^c = p^{a-c}$, 这表明 $\pi(S)$ 是 G/H 的 Sylow p -子群.

反之: 如果 $S' < G/H$ 是 Sylow p -子群, 考虑 S' 的原像 $K = \pi^{-1}(S')$, 则 K 显然是 G 的一个子群, 并且 $|K| = |S'| |H| = p^{a-c} p^c n = p^a n$. 由 Sylow 第一定理, K 有 Sylow p -子群 S , 于是这也是 G 的 Sylow p -子群. 显然有 $\pi(S) < S'$, 另一方面由前可知 $\pi(S)$ 也是 G/H 的 Sylow p -子群, 故而 $|\pi(S)| = p^{a-c} = |S'|$, 从而 $\pi(S) = S'$. \square

B4)

证明：

- 显然有 $H \cdot \text{Stab}_G(x) \subset G$. $\forall g \in G$, 由于 $H \curvearrowright X$ 是传递的, $\exists h \in H$, s.t. $g(x) = h(x)$, 于是 $h^{-1}g(x) = x \Rightarrow h^{-1}g \in \text{Stab}_G(x)$. 从而 $g \in h\text{Stab}_G(x) \Rightarrow G \subset H \cdot \text{Stab}_G(x)$. 综上, $G = H\text{Stab}_G(x)$.
- 考虑 H 所有 Sylow p -子群构成的集合 $X = \{S_i \mid S_i < H \text{ 为 Sylow } p\text{-子群}\}$, 考虑 G 在 X 上的共轭作用:

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, S_i) \mapsto gS_i g^{-1}.$$

先说明这个作用是良定义的. 由于 $S_i \subset H$, 又 $H \triangleleft G$, 所以 $gS_i g^{-1} \subset H$. 又由 Sylow 定理, $gS_i g^{-1} \in X$, 从而这个共轭作用是良定义的.

同时 Sylow 定理第二定理指出 ${}^H X$ 是传递的. 对于这个作用, $\text{Stab}_G(S) = N_G(S)$, 故由前一问知 $G = H \cdot N_G(S)$.

□

B5)

证明: 由于 $S < G$ 是一个 Sylow p -子群, 又 $S < N_G(S) \subset H < G$, 于是 S 也是 H 的 Sylow p -子群. $\forall g \in N_G(H), gSg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$. 故 gSg^{-1} 也是 H 的一个 Sylow p -子群. 由 Sylow 第二定理, $\exists h \in H, \text{s.t. } hSh^{-1} = gSg^{-1}$, 即 $h^{-1}gSg^{-1}h = S \Rightarrow h^{-1}g \in N_G(S)$. 从而 $g \in hN_G(S) \subset hH = H$, 即 $N_G(H) \subset H$. 结合 $H \subset N_G(H)$, 有 $H = N_G(H)$. □

B6)

证明: 在 B5) 中令 $H = N_G(S)$ 即得 $N_G(H) = N_G(N_G(H))$. □