ODE
第十一次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 6 日

习题 1 构造一族向量场 $F_\lambda(X) = F(\lambda, X)$ 使得 $F : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 C^2 光滑使得 $\dot{X} = F_0(X)$ 为梯度系统, $\dot{X} = F_1(X)$ 为 Hamilton 系统.

解: 设 $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 C^3 光滑函数, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 C^3 光滑函数. 定义

$$F_\lambda(X) = F(\lambda, X) = -(1-\lambda)\nabla G(X) + \lambda J\nabla H(X),$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

则当 $\lambda = 0$ 时, 有

$$F_0(X) = -\nabla G(X),$$

因此 $\dot{X} = F_0(X)$ 为梯度系统. 当 $\lambda = 1$ 时, 有

$$F_1(X) = J\nabla H(X),$$

因此 $\dot{X} = F_1(X)$ 为 Hamilton 系统. □

习题 2 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-y); \quad x(0) = 1; \\ \dot{y} = y(x-1); \quad y(0) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

定义 $F : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$F(x,y) := x - \log x + y - \log y.$$

定义水平集

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in (0,\infty)^2 : F(x,y) = F(1,2) = 3 - \log 2\right\}.$$

设 $a \in (0,1)$ 使得 $F(a,1) = 3 - \log 2$.

1) 证明 F 为凸函数, 并画出 F 的典型水平集简图.

2) 设 $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ 是初值问题的极大解. 定义 $\eta(t) := F(\phi(t))$. 证明 $\eta'(t) \equiv 0$, 由此证明 $\phi(I) \subset \Gamma$, 以及 $I = \mathbb{R}$.

3) 任取 $b \in (a,1)$. 证明存在 $c^* > 1, c_* \in (0,1)$ 使得 $(b,c_*),(b,c^*) \in \Gamma$.

4) 通过计算 x 分量, 证明存在 $T_1 > 0$ 使得 $\phi(T_1) = (b,c^*)$.

5) 通过计算 y 分量, 证明存在 $T_2 > T_1$ 使得 $\phi(T_2) = (b,c_*)$.

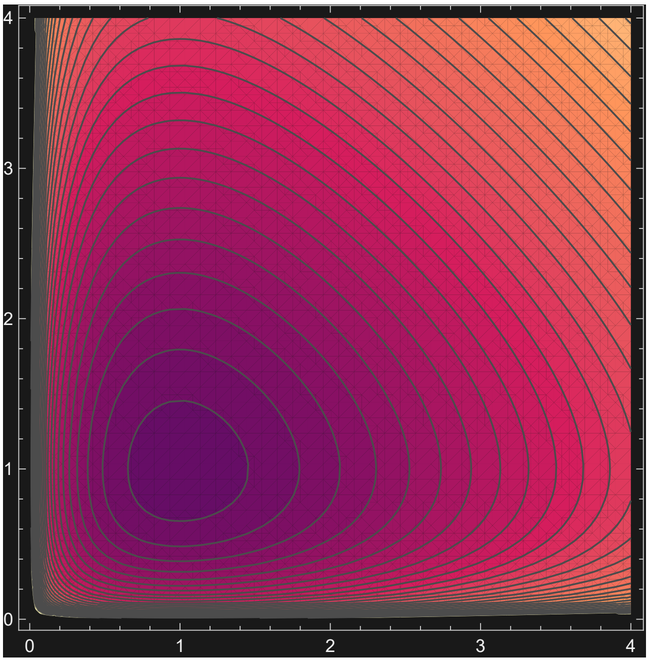
6) 证明存在 $T_* > 0$ 使得 $\phi(T_*) = (1,2)$, 从而证明 ϕ 是一个周期解.

证明: 1) 计算 F 的 Hessian 矩阵:

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

由于 $x, y > 0$, 所以 $H_F(x,y)$ 是正定的, 因此 F 是凸函数.

以下是 F 的典型水平集简图 (图中灰线):



2) 设 $\phi(t) = (x(t), y(t))$, 则

$$\eta(t) = F(x(t), y(t)) = x(t) - \log x(t) + y(t) - \log y(t).$$

计算 $\eta'(t)$:

$$\eta'(t) = \left(1 - \frac{1}{x(t)}\right)\dot{x}(t) + \left(1 - \frac{1}{y(t)}\right)\dot{y}(t).$$

代入初值问题的方程, 有

$$\eta'(t) = \left(1 - \frac{1}{x(t)}\right) x(t)(1 - y(t)) + \left(1 - \frac{1}{y(t)}\right) y(t)(x(t) - 1).$$

展开并化简, 得到

$$\eta'(t) = (x(t) - 1)(1 - y(t)) + (y(t) - 1)(x(t) - 1) = 0.$$

因此, $\eta(t) \equiv \eta(0) = F(1, 2) = 3 - \log 2$, 所以 $\phi(I) \subset \Gamma$.

$I = \mathbb{R}$ 是因为如果 I 有界，比如 $I = (\alpha, \beta)$，则当 $t \to \beta^-$ 时，$\phi(t)$ 趋近于 Γ 上的某一点，而由于 Γ 是闭合曲线，$\phi(t)$ 在 $t \to \beta^-$ 时不会发散，从而可以将解延拓到 $t = \beta$，这与 I 为极大区间矛盾。因此，I 必须是整个实数轴 $\mathbb{R}$.

3) 通过求导容易得到 $F(b, 1) \leq F(a, 1) = 3 - \log 2$. 又由于 F 在 $(0, \infty)^2$ 上连续且严格凸, 且 $\lim_{y \to 0^+} F(b, y) = +\infty$, $\lim_{y \to \infty} F(b, y) = +\infty$. 由零点存在定理知, 存在唯一的 $c_* \in (0, 1)$ 和 $c^* > 1$ 使得 $F(b, c_*) = F(b, c^*) = 3 - \log 2$.

4) 设 $x(t)$ 为 $\phi(t)$ 的 x 分量. 由初值问题的方程, 有

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - y(t)).$$

当 $y(t) > 1$ 时, $\dot{x}(t) < 0$, 所以 $x(t)$ 单调递减. 并且 $\Gamma \cap [1, 2] \times [a + \delta, 1]$ 是紧集, 因此 $\dot{x}(t)$ 有上界 a. 故其中没有稳定点. 由于 $\phi(0) = (1, 2)$, 所以存在 $T_1 > 0$ 使得 $x(T_1) = b$. 由 $\phi(I) \subset \Gamma$, 可得 $y(T_1) = c^*$.

5) 类似地, 设 $y(t)$ 为 $\phi(t)$ 的 y 分量. 由初值问题的方程, 有

$$\dot{y}(t) = y(t)(x(t) - 1).$$

当 $x(t) < 1$ 时, $\dot{y}(t) < 0$, 所以 $y(t)$ 单调递减. 由于 $y(T_1) = c^* > 1$, 所以存在 $T_2 > T_1$ 使得 $y(T_2) = c_*$. 由 $\phi(I) \subset \Gamma$, 可得 $x(T_2) = b$.

6) 类似 3), 4), 5) 的过程, 可以证明存在 T_3, T_4, s.t. $\phi(T_3) = (b_1, c_1), \phi(T_4) = (b_2, c_2)$, 其中 $b_1, b_2, c_2 \in [1, 2], c_1 \in [0, 1]$, 并且满足 $T_2 < T_3 < T_4$. 进一步可证明存在 $T_* > 4$ 使得 $\phi(T_*) = (1, 2)$, 说明 ϕ 是一个周期解. □

注：我们在任何一段都可以取一个紧集合, 这样就能保证没有稳定点.

习题 3 证明 Arzela-Ascoli 定理：设 $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C[a, b]$ 满足:

1) 存在 $M > 0$ 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\|\phi_n\|_\infty \leq M$;

2) 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 n , 当 $|t - s| \leq \delta$ 时有

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq \epsilon$$

则存在子列 $n_k \to \infty$ 以及 $\phi \in C[a, b]$ 使得 $\phi_n \rightrightarrows \phi$.

证明： 由于 $C[a,b]$ 在 $\|\cdot\|_\infty$ 下是赋范空间, 且 $\{\phi_n\}$ 在该范数下有界, 因此存在子列 $\{\phi_{n_k}\}$ 在 $C[a,b]$ 中逐点收敛于某个函数 ϕ. 更详细地, 由于 $[a,b]$ 上的有理数集 Q 是可数的, 我们可以对每个有理数点 $q \in Q$ 依次取子列, 使得在该点上收敛 (ϕ 的取值由聚点定理知存在). 通过可数次操作, 我们可以得到一个子列 $\{\phi_{n_k}\}$ 在所有有理数点上收敛到 ϕ. 由于 $\{\phi_n\}$ 满足条件 2), 对任意的实数点 $t \in [a,b]$, 可以通过有理数点的极限来定义 $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \lim_{q \to t, q \in Q} \phi(q).$$

这是因为对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|p-q| < \delta$ 时, 对任意的 n 有

$$|\phi_n(p) - \phi_n(q)| < \epsilon,$$

其中 $p, q \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. 再令 $n \to \infty$, 得到

$$|\phi(p) - \phi(q)| \leq \epsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知, $\lim_{q \to t, q \in Q} \phi(q)$ 收敛的定义与选取的有理数点序列无关. 因此, 通过有理数点的极限定义 $\phi(t)$ 是良定义的.

再证明 $\{\phi_{n_k}\}$ 在每一点上收敛到 ϕ. 对于任意的 $t \in [a,b]$ 和 $\epsilon > 0$, 由条件 2), 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|t-s| < \delta$ 时, 对任意的 n 有

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| < \epsilon/3.$$

又由 ϕ 的定义, 当 $|t-q| < \delta_1$ 时,

$$|\phi(q) - \phi(t)| < \epsilon/3.$$

由有理数的稠密性, 总可以取到 q 满足 $|t-q| < \min\{\delta, \delta_1\}$. 由于 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在有理数点上收敛, 存在 N 使得当 $k > N$ 时, 有

$$|\phi_{n_k}(q) - \phi(q)| < \epsilon/3.$$

因此, 当 $|t-q| < \min\{\delta, \delta_1\}$ 且 $k > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\phi_{n_k}(t) - \phi(t)| &\leq |\phi_{n_k}(t) - \phi_{n_k}(q)| + |\phi_{n_k}(q) - \phi(q)| + |\phi(q) - \phi(t)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

这说明 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在每一点上收敛.

接下来证明 ϕ 连续. 对于任意的 $t \in [a,b]$ 和 $\epsilon > 0$, 由条件 2), 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|t-s| < \delta$ 时, 对任意的 n 有

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| < \epsilon/3.$$

由于 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在每一点上收敛, 存在 N 使得当 $k > N$ 时, 有

$$|\phi_{n_k}(t) - \phi(t)| < \epsilon/3, \quad |\phi_{n_k}(s) - \phi(s)| < \epsilon/3.$$

因此, 当 $|t-s| < \delta$ 且 $k > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\phi(t) - \phi(s)| &\le |\phi(t) - \phi_{n_k}(t)| + |\phi_{n_k}(t) - \phi_{n_k}(s)| + |\phi_{n_k}(s) - \phi(s)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.\end{aligned}$$

这说明 ϕ 在 $x = t$ 处连续. 由于 t 是任意选取的, 故 ϕ 在 $[a,b]$ 上连续, 即 $\phi \in C[a,b]$.

最后证明 $\phi_{n_k} \rightrightarrows \phi$. 对于任意的 $\epsilon > 0$, 由条件 2), 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|t-s| < \delta$ 时, 对任意的 n 有

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| < \epsilon/3.$$

由于 $\phi_{n_k} \to \phi$ 在每一点上收敛, 对于每个 $t \in [a,b]$, 存在 N_t 使得当 $k > N_t$ 时, 有

$$|\phi_{n_k}(t) - \phi(t)| < \epsilon/3.$$

由于 $[a,b]$ 是紧集, 存在有限个点 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ 使得 $\{(t_i - \delta/2, t_i + \delta/2)\}_{i=1}^m$ 覆盖 $[a,b]$. 令 $N = \max\{N_{t_1}, N_{t_2}, \ldots, N_{t_m}\}$. 则当 $k > N$ 时, 对任意的 $t \in [a,b]$, 存在某个 t_i 使得 $|t - t_i| < \delta/2$, 因此

$$\begin{aligned}|\phi_{n_k}(t) - \phi(t)| &\le |\phi_{n_k}(t) - \phi_{n_k}(t_i)| + |\phi_{n_k}(t_i) - \phi(t_i)| + |\phi(t_i) - \phi(t)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\phi_{n_k} \rightrightarrows \phi$. 证毕. $\square$