ODE

第九次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 27 日

习题 1 考虑两个一维向量场 $F:(0,1)\to\mathbb{R}; G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$F(r)=\frac{r\left(1-r^2\right)}{2};\quad G(r)=\frac{r}{2}.$$

1) 证明 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 的相流均存在, 并分别计算它们的相流.

2) 证明 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 拓扑共轭.

3) 证明 $\dot X=F(X)$ 与 $\dot Y=G(Y)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭, 这里

$$\begin{aligned}&F(x,y):=\left(x/2-y-x\left(x^2+y^2\right)/2, x+y/2-y\left(x^2+y^2\right)/2\right);\\&G(x,y):=(x/2-y,x+y/2).\end{aligned}$$

解: 1) 对于 $\dot r=F(r)$, 分离变量得

$$\int\frac{2}{r(1-r^2)}dr=\int dt\Rightarrow \ln\frac{r^2}{1-r^2}=t+C.$$

由此解得

$$r=r_0\sqrt{\frac{e^t}{1+r_0^2\left(e^t-1\right)}},$$

因此相流为

$$\varphi_t(r_0)=r_0\sqrt{\frac{e^t}{1+r_0^2\left(e^t-1\right)}}.$$

对于 $\dot r=G(r)$, 同样分离变量得

$$\int\frac{1}{r}dr=\int\frac{1}{2}dt\Rightarrow\ln|r|=\frac{t}{2}+C.$$

解得

$$r=r_0e^{t/2},$$

因此相流为

$$\psi_t(r_0)=r_0e^{t/2}.$$

2) 定义 $h:(0,1)\to(0,\infty)$ 为

$$h(r)=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

则 h 为 $(0,1)$ 到 $(0,\infty)$ 的同胚. 下面验证 h 为 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 的拓扑共轭映射. 对任意的 $r_0\in(0,1)$, 有

$$h\left(\varphi_t(r_0)\right)=\frac{r_0\sqrt{\frac{e^t}{1+r_0^2(e^t-1)}}}{\sqrt{1-\frac{r_0^2e^t}{1+r_0^2(e^t-1)}}}=\frac{r_0e^{t/2}}{\sqrt{1-r_0^2}}=\psi_t\left(h\left(r_0\right)\right).$$

于是 h 为拓扑共轭映射.

3) 将 F 和 G 分别写成极坐标形式. 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 F 的极坐标形式为

$$\begin{aligned}
\dot r&=\frac{x\dot x+y\dot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta\left(x/2-y-x\left(x^2+y^2\right)/2\right)+r\sin\theta\left(x+y/2-y\left(x^2+y^2\right)/2\right)}{r}\\
&=\frac{r}{2}-\frac{r^3}{2}=F(r);\\
\dot\theta&=\frac{x\dot y-y\dot x}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta\left(\dot r\sin\theta+r\cos\theta\right)-r\sin\theta\left(\dot r\cos\theta-r\sin\theta\right)}{r^2}=1;
\end{aligned}$$

G 的极坐标形式为

$$\begin{aligned}
\dot r&=\frac{x\dot x+y\dot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta(x/2-y)+r\sin\theta(x+y/2)}{r}=\frac{r}{2}=G(r);\\
\dot\theta&=1.
\end{aligned}$$

由 2), 可知 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭. 又由于 $\dot\theta=1$ 对于极坐标恒成立, 故 $\dot X=F(X)$ 与 $\dot Y=G(Y)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭. □

习题 2 设 $F\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$, 且 $F(0)=0, F'(0)=D$, 其中

$$D=\begin{bmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{bmatrix};\quad \lambda\leqslant\mu<0.$$

本题的目的是证明 $\dot X=F(X)$ 与 $\dot Y=DY$ 在平衡点附近局部拓扑共轭. 我们用 $\phi(t,z)$ 表示初值问题

$$\dot X=F(X);\quad X(0)=z$$

的极大解, 其定义域记为 I_z . 承认(以后会证明)ϕ 作为 (t,z) 的映射在其定义域上为 C^1 光滑.

1) 证明存在 $\rho>0$ 使得对任意的 $r\in(0,\rho]$, 向量场 $F(X)$ 限制在

$$S_r := \left\{X\in\mathbb{R}^2 : |X|=r\right\}$$

上朝向圆内, 即

$$F(X)\cdot X<0,\quad \forall X\in S_r.$$

2) 固定 $r\in(0,\rho)$. 对任意的 $z\in B_\rho := \{X:|X|<\rho\}$ 且 $z\neq 0$, 证明存在 $T(z)\in I_z$ 使得 $\phi(T(z),z)\in S_r$.

3) 证明 $T: B_\rho\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ 连续.

4) 定义 $h: B_\rho\to\mathbb{R}^2$ 为 $h(0)=0$,

$$h(z) := e^{-T(z)D}\phi(T(z),z),\quad z\in B_\rho\backslash\{0\}.$$

证明 h 连续.

5) 证明 $h(B_\rho)$ 为开集, 且 $h: B_\rho\to h(B_\rho)$ 为同胚.

6) 证明 h 为 $\dot{X}=F(X)$ 与 $\dot{Y}=DY$ 的局部拓扑共轭, 即对任意的 $z\in B_\rho$ 以及 $t\in I_z$ 使得 $\phi(t,z)\in B_\rho$ 有

$$h(\phi(t,z))=e^{tD}h(z).$$

解： 1) 由于 F 在原点处可微, 故

$$F(X)=DX+|X|\varepsilon(X),$$

其中 $\lim_{X\to 0}\varepsilon(X)=0$. 那么 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$, 当 $|X|<\delta$ 时有 $|\varepsilon(X)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\frac{|\mu|}{2}$, 则当 $|X|<\delta$ 时,

$$|\varepsilon(X)|<\frac{|\mu|}{2}.$$

取 $\rho=\min\left\{\delta,\frac{|\mu|}{2}\right\}$, 则当 $|X|=r\leqslant\rho$ 时,

$$F(X)\cdot X=X^TDX+|X|\varepsilon(X)\cdot X\leqslant\mu|X|^2+|X|^2|\varepsilon(X)|<0.$$

2) 对任意的 $z\in B_\rho$ 且 $z\neq 0$, 由 1) 可知存在 $\rho>0$ 使得当 $|X|\leqslant\rho$ 时有 $F(X)\cdot X<0$. 如果 $r<|z|<\rho$, 由于 $\overline{B_\rho}\backslash B_r$ 为紧集, 而 ϕ C^1 光滑, 故存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $|X|\in[\rho,r]$ 时有

$$F(\phi(t,z))\cdot\phi(t,z)\leqslant-\varepsilon<0.$$

设 $g(t)=|\phi(t,z)|^2$, 则

$$g'(t)=2\phi(t,z)\cdot F(\phi(t,z))\leqslant-2\varepsilon,$$

因此当 $t\geq 0$ 时,

$$g(t)\leqslant|z|^2-2\varepsilon t.$$

取 $T_1(z)=\frac{|z|^2-r^2}{2\varepsilon}>0$, 则有 $g(T_1(z))\leqslant r^2$. 再由介质定理即知, 存在 $T(z)$, s.t. $g(T(z))=r^2$, 即 $\phi(T(z),z)\in S_r$.

如果 $|z|<r$, 则类似地可得当 $t\leqslant 0$ 时,

$$g(t)\geqslant |z|^2-2\varepsilon t.$$

取 $T_2(z)=\frac{r^2-|z|^2}{-2\varepsilon}<0$, 则有 $g(-T_2(z))\geqslant r^2$. 再由介质定理即知, 存在 $T(z)\leqslant 0$, 使得 $\phi(T(z),z)\in S_r$.

3) 对任意的 $z_0\in B_\rho\backslash\{0\}$, 设 $T(z_0)=t_0$, 则有 $|\phi(t_0,z_0)|=r$. 由于 ϕ 在其定义域上为 C^1 光滑, 故 ϕ 在 (t_0,z_0) 处连续. 又由于

$$\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t,z)|^2|_{(t_0,z_0)}=2\phi(t_0,z_0)\cdot F(\phi(t_0,z_0))<0,$$

由隐函数定理可知存在 $T:B_\rho\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ 在 z_0 处连续. 由于 z_0 为任意选取, 故 T 在 $B_\rho\backslash\{0\}$ 上连续.

4) 由第 3 小题可知 h 在 $B_\rho\backslash\{0\}$ 上连续. 下面证明 h 在 0 处连续. 首先有

$$|h(z)|=\left|e^{-T(z)D}\phi(T(z),z)\right|\leqslant e^{-\lambda T(z)}\,|\phi(T(z),z)|=re^{-\lambda}e^{T(z)}.$$

只需要说明 $\lim_{z\to 0}T(z)=-\infty$ 即可.

采用反证法: 假设 $T(z)$ 在某个子列上有下界, 即存在常数 $M>0$ 使得对某个子列 $\{z_n\}$ 有 $T(z_n)\geq -M$. 由于 $T(z)<0$，有 $T(z_{n_k})\in[-M,0]$, 故存在收敛子列 $T(z_{n_k})\to T_0\in[-M,0]$. 由 ϕ 的连续性, 有

$$\phi(T(z_{n_k}),z_{n_k})\to\phi(T_0,0)=0.$$

但 $|\phi(T(z_{n_k}),z_{n_k})|=r>0$, 矛盾. 因此, $T(z_n)\to-\infty$.

于是有

$$|h(z)|\leqslant re^{-\lambda}e^{T(z_n)}\to 0,$$

即 h 在 $z=0$ 处连续.

5) 首先证明 h 为单射. 对任意的 $z_1,z_2\in B_\rho$ 且 $z_1\neq z_2$, 若 $h(z_1)=h(z_2)$, 则

$$e^{-T(z_1)D}\phi(T(z_1),z_1)=e^{-T(z_2)D}\phi(T(z_2),z_2).$$

不妨设 $T(z_1)\leqslant T(z_2)$, 则

$$\phi(T(z_2),z_2)=e^{(T(z_2)-T(z_1))D}\phi(T(z_1),z_1).$$

对两边取范数, 有

$$r=|\phi(T(z_2),z_2)|=\left|e^{(T(z_2)-T(z_1))D}\phi(T(z_1),z_1)\right|\leqslant e^{\mu(T(z_2)-T(z_1))}r\leqslant r.$$

因此 $e^{\mu(T(z_2)-T(z_1))}=1$, 即 $T(z_2)=T(z_1)$. 代入上式得

$$\phi(T(z_1),z_1)=\phi(T(z_1),z_2).$$

又由于 ϕ 的唯一性, 可知 $z_1=z_2$, 与假设矛盾. 因此 h 为单射.

下面证明 h 为同胚. 对任意的 $w_0\in h(B_\rho)$, 设 $w_0=h(z_0)$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B_\varepsilon(z_0)\subset B_\rho$. 由于 ϕ 在其定义域上为 C^1 光滑, 故 h 在 z_0 处可微. 又由于

$$h'(z_0)=e^{-T(z_0)D}\phi_z\left(T(z_0),z_0\right),$$

且 $\phi_z\left(T(z_0),z_0\right)$ 为可逆矩阵, 这是因为 $\phi_z(0,z_0)=I$, 且 $\phi_z(t,z_0)$ 满足矩阵值微分方程

$$\frac{d}{dt}\phi_z(t,z_0)=F'(\phi(t,z_0))\phi_z(t,z_0),$$

故 $h'(z_0)$ 也为可逆矩阵. 由逆映射定理可知存在 h 的逆映射 h^{-1}, 且由 h 的连续性也可以得到 h^{-1} 的连续性. 因此 h 为同胚.

6) 对任意的 $z\in B_\rho$ 以及 $t\in I_z$ 使得 $\phi(t,z)\in B_\rho$, 有

$$h(\phi(t,z))=e^{-T(\phi(t,z))D}\phi(T(\phi(t,z)),\phi(t,z)).$$

由 T 的定义知 $T(\phi(t,z))=T(z)-t$, 则

$$\begin{aligned}h(\phi(t,z))&=e^{-(T(z)-t)D}\phi(T(z)-t,\phi(t,z))\\&=e^{tD}e^{-T(z)D}\phi(T(z),z)\\&=e^{tD}h(z).\end{aligned}$$

于是 h 为 $\dot{X}=F(X)$ 与 $\dot{Y}=DY$ 的局部拓扑共轭. $\square$