ODE

第十三次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 24 日

习题 1 考虑自治系统 $\dot{x} = \sin^3 x$。

1) 证明对任意初值 $z \in \mathbb{R}$，初值问题

$$\dot{x} = \sin^3 x; \quad x(0) = z$$

的极大解的定义区间均为 $\mathbb{R}$。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解： 1) 设

$$f(x) = \sin^3 x.$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$，由 Picard–Lindelöf 定理可知：对任意初值 $z \in \mathbb{R}$，初值问题

$$\dot{x} = \sin^3 x, \qquad x(0) = z$$

存在唯一极大解 $(x(t), I)$，其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$。

注意到对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$|\sin^3 x| \le 1.$$

因此沿着解 $x(t)$，

$$|\dot{x}(t)| = |\sin^3 x(t)| \le 1, \qquad \forall\, t \in I.$$

对任意 $t \in I$，由积分形式，

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s)\, ds.$$

取绝对值得

$$|x(t)-z| \le \int_0^{|t|} |\dot{x}(s)|\, ds \le |t|.$$

从而

$$|x(t)| \le |z| + |t|, \qquad \forall\, t \in I.$$

因此解 $x(t)$ 在任意有限时间区间上都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$，则解 $x(t)$ 在区间 $[0,\beta)$ 上有界。又因为 $f(x)=\sin^3 x$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续，根据常微分方程解的延拓定理，解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta+\varepsilon)$，这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$。

同理可证 $\alpha = -\infty$。

综上，极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程 $\frac{dx}{dt} = \sin^3 x$ 给出. 分离变量得

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int dt$$

计算左侧积分:

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\left(\csc x \cot x + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) + C$$

因此, 相曲线方程为

$$-\frac{1}{2}\left(\csc x \cot x + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) = t + C$$

其中 C 为常数. 不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述.

□

习题 2 考虑单摆系统

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x \end{cases}$$

1) 证明对所有的初值 $z \in \mathbb{R}^2$ 相应的初值问题的极大解的定义区间均为 $\mathbb{R}$ 。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解： 1) 考虑单摆系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

设

$$f(x,y) = (y, -\sin x).$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，由 Picard–Lindelöf 定理可知：对任意初值 $z=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，初值问题

$$(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$$

存在唯一极大解 $((x(t),y(t)),I)$，其中 $I=(\alpha,\beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha=-\infty$ 且 $\beta=+\infty$。

考虑系统的能量函数

$$E(x,y)=\frac{1}{2}y^2+1-\cos x.$$

沿着解 $(x(t),y(t))$ 求导，得

$$\frac{d}{dt}E(x(t),y(t))=y(t)\dot{y}(t)+\sin x(t)\dot{x}(t)=y(t)(-\sin x(t))+\sin x(t)y(t)=0.$$

因此

$$E(x(t),y(t))\equiv E(x_0,y_0),\qquad \forall\, t\in I.$$

由此可得

$$\frac{1}{2}y(t)^2\le E(x_0,y_0),$$

从而

$$|y(t)|\le\sqrt{2E(x_0,y_0)},\qquad \forall\, t\in I.$$

又因为

$$\dot{x}(t)=y(t),$$

在任意有限时间区间上，$x(t)$ 也保持有界。因此解 $(x(t),y(t))$ 在任意有限时间区间内都是有界的。

若假设 $\beta<+\infty$，则解在区间 $[0,\beta)$ 上有界。又由于向量场 $f(x,y)$ 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上连续，根据常微分方程解的延拓定理，解可以延拓到区间 $(\alpha,\beta+\varepsilon)$，这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta=+\infty$。

同理可证 $\alpha=-\infty$。

综上，极大解的定义区间为

$$I=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin x}{y}$$

给出. 分离变量得

$$ydy=-\sin xdx$$

积分两边得到

$$\frac{y^2}{2} = \cos x + C$$

其中 C 为常数. 因此, 相曲线方程为

$$\frac{y^2}{2} - \cos x = C$$

不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述. □

习题 3 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} & = \sin y \\ \dot{y} & = -\sin x \end{cases}$$

1) 证明对所有的初值 $z \in \mathbb{R}^2$ 相应的初值问题的极大解的定义区间均为 $\mathbb{R}$。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解： 1) 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

设

$$f(x, y) = (\sin y, -\sin x).$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$，由 Picard–Lindelöf 定理可知：对任意初值 $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$，该初值问题存在唯一极大解 $((x(t), y(t)), I)$，其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$。

考虑函数

$$E(x, y) = \cos x + \cos y.$$

沿着解 $(x(t), y(t))$ 求导，得

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = -\sin x(t)\dot{x}(t) - \sin y(t)\dot{y}(t).$$

代入系统方程，

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = -\sin x(t) \sin y(t) - \sin y(t)(-\sin x(t)) = 0.$$

因此

$$E(x(t), y(t)) \equiv E(x_0, y_0), \qquad \forall\, t \in I.$$

由 $|\cos x| \le 1$ 可知，

$$-2 \le E(x(t), y(t)) \le 2.$$

同时，由系统本身有

$$|\dot{x}(t)| = |\sin y(t)| \le 1, \qquad |\dot{y}(t)| = |\sin x(t)| \le 1.$$

于是对任意 $t \in I$，

$$|x(t) - x_0| \le \int_0^{|t|} |\dot{x}(s)|\, ds \le |t|, \qquad |y(t) - y_0| \le \int_0^{|t|} |\dot{y}(s)|\, ds \le |t|.$$

从而

$$|x(t)| \le |x_0| + |t|, \qquad |y(t)| \le |y_0| + |t|, \qquad \forall\, t \in I.$$

因此解 $(x(t), y(t))$ 在任意有限时间区间内都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$，则解在区间 $[0, \beta)$ 上有界。又由于向量场 $f(x, y)$ 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上连续，根据常微分方程解的延拓定理，解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta + \varepsilon)$，这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$。

同理可证 $\alpha = -\infty$。

综上，极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\sin y}$$

给出. 分离变量得

$$\sin y dy = -\sin x dx$$

积分两边得到

$$-\cos y = \cos x + C$$

其中 C 为常数. 因此, 相曲线方程为

$$\cos x + \cos y = -C$$

不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述. □