

群与 Galois 理论

作业 6

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 6 日

目录

1 用模的观点看线性代数	2
--------------	---

用模的观点看线性代数

K 是域, $n \geq 1$, V 是 n 维 K -线性空间, $T \in \text{End}_K(V)$ 是 V 到自身的 K -线性映射. 那么, V 可以被视为 $K[X]$ -模:

$$K[X] \times V \rightarrow V, \quad P(X) \mapsto (v \mapsto P(T)v).$$

根据主理想整环 $K[X]$ 上的有限生成模的分类定理, 存在唯一的首一多项式 $P_1, \dots, P_s \in K[X]$, 使得 $P_1 | P_2, P_2 | P_3, \dots, P_{s-1} | P_s$ 并且有如下 $K[X]$ -模的分解:

$$V \simeq K[X]/(P_1(X)) \oplus K[X]/(P_2(X)) \oplus \cdots \oplus K[X]/(P_s(X)).$$

我们称 P_1, \dots, P_s 为 T 的不变因子.

1. 证明, $\{P \in K[X] \mid P(T) = 0\}$ 为 $K[X]$ 的理想并且由其中唯一的次数最低的首一多项式 $m_T(X)$ 生成. 这个多项式被称作是 T 的极小多项式.

证明: 设 $I = \{P \in K[X] \mid P(T) = 0\}$. 对于任意 $P(X), Q(X) \in I$, 有

$$(P(X) + Q(X))(T) = P(T) + Q(T) = 0 + 0 = 0,$$

因此 $P(X) + Q(X) \in I$. 对于任意 $P(X) \in I$ 和 $R(X) \in K[X]$, 有

$$(R(X)P(X))(T) = R(T)P(T) = R(T) \cdot 0 = 0,$$

因此 $R(X)P(X) \in I$. 而显然零多项式属于 I . 综上所述, I 为 $K[X]$ 的理想.

由于 $K[X]$ 是主理想整环, 存在唯一的首一多项式 $m_T(X)$, 使得 $I = (m_T(X))$. 显然, $m_T(X)$ 是 I 中次数最低的首一多项式. 反过来, 设 $Q(X) \in I$ 是次数最低的首一多项式, 则有 $m_T(X) | Q(X)$, 从而 $Q(X)$ 与 $m_T(X)$ 相等 (因为它们都是首一多项式). 因此, $m_T(X)$ 是唯一的. \square

2. 证明, $m_T(X) = P_s(X)$.

证明: 由 V 的分解可知, 在同构意义下, 对于任意 $v \in V$, 存在 $f_i(X) \in K[X]$, 使得

$$v = (f_1(X) + (P_1(X)), f_2(X) + (P_2(X)), \dots, f_s(X) + (P_s(X))).$$

因此, 有

$$P_s(T)v = (P_s(X)f_1(X) + (P_1(X)), P_s(X)f_2(X) + (P_2(X)), \dots, P_s(X)f_s(X) + (P_s(X))) = 0.$$

这说明 $P_s(X) \in I$, 因此 $m_T(X) | P_s(X)$.

反过来, 设 $Q(X) \in I$, 则对于任意 $v \in V$, 有

$$Q(T)v = (Q(X)f_1(X) + (P_1(X)), Q(X)f_2(X) + (P_2(X)), \dots, Q(X)f_s(X) + (P_s(X))) = 0.$$

这说明对于任意 $v \in V, 1 \leq i \leq s$, 有 $Q(X)f_i(X) \in (P_i(X))$. 特别地, 取 $f_s(X) = 1$, 可得 $Q(X) \in (P_s(X))$. 因此, 有 $P_s(X) | Q(X)$. 由此可知, $P_s(X) | Q(X)$. 因此, 有 $P_s(X) | m_T(X)$.

综上所述, 以及两者都是首一多项式, 有 $m_T(X) = P_s(X)$. \square

3. 令 $p_T(X)$ 为 T 的特征多项式. 证明,

$$p_T(X) = P_1(X)P_2(X) \cdots P_s(X).$$

证明: 由于 V 在同构意义下可分解为

$$V \simeq K[X] /_{(P_1(X))} \oplus K[X] /_{(P_2(X))} \oplus \cdots \oplus K[X] /_{(P_s(X))},$$

因此, 在适当选择基的情况下, T 对应的矩阵可以写成如下的块对角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

其中, 每个块 A_i 对应于 $K[X] /_{(P_i(X))}$ 上的线性变换.

因此, 有

$$p_T(X) = \det(X \cdot I - A) = \det \begin{pmatrix} X \cdot I_1 - A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X \cdot I_2 - A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \cdot I_s - A_s \end{pmatrix},$$

其中 I_i 是与块 A_i 大小相同的单位矩阵. 由行列式的性质可知,

$$p_T(X) = \prod_{i=1}^s \det(X \cdot I_i - A_i).$$

注意到 T 在 V 上的作用就等价于 X 在 $K[X] /_{(P_i(X))}$ 上的作用, 因此, A_i 的特征多项式就是 $P_i(X)$. 因此, 有

$$p_T(X) = P_1(X)P_2(X) \cdots P_s(X).$$

\square

注: 由此可见, 线性代数中的一些经典结论可以通过模的观点得到更为简洁的证明. 例如, Cayley-Hamilton 定理 (即 $p_T(T) = 0$) 可以通过上述结果直接得到, 因为 $p_T(X)$ 显然是 T 的不变因子的乘积, 因此 $p_T(X)$ 整除极小多项式 $m_T(X)$, 从而有 $p_T(T) = 0$.

对于 A_i 的特征多项式就是 $P_i(X)$ 再做更加具体的说明:

设 $P_i(X) = X^{d_i} + c_{i,d_i-1}X^{d_i-1} + \cdots + c_{i,1}X + c_{i,0}$, 则 $K[X] / (P_i(X))$ 的基为 $\{1 + (P_i(X)), X + (P_i(X)), \dots, X^{d_i-1} + (P_i(X))\}$. 在该基下, X 的矩阵表示为

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{i,0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_{i,1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_{i,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{i,d_i-1} \end{pmatrix}.$$

恰为 $P_i(x)$ 的伴随矩阵, 其特征多项式为

$$\det(X \cdot I_i - A_i) = X^{d_i} + c_{i,d_i-1}X^{d_i-1} + \cdots + c_{i,1}X + c_{i,0} = P_i(X).$$

4. 给定 V 的一组基 $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$, 用 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(K)$ 表示 T 对应的矩阵, 其中, $a_{ij} \in K$;

$$I$$
 为 $n \times n$ 的单位矩阵. 令 $L = X \cdot I - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(K[X]).$

我们考虑 $K[X]$ -模之间的同态:

$$L : K[X]^n \rightarrow K[X]^n, \quad \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{pmatrix}$$

以及

$$\pi : K[X]^n \rightarrow V, \quad \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n F_i(T) \cdot e_i.$$

证明, 我们有 $K[X]$ 一模之间的正合列:

$$K[X]^n \xrightarrow{L} K[X]^n \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0,$$

即证明 $\text{Ker}(\pi) = \text{Im } L$ 并且 $V \simeq K[X]^n / \text{Im } L$.

证明: 首先, 证明 $\text{Im } L \subseteq \text{Ker}(\pi)$. 对于任意 $\mathbf{F}(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{pmatrix} \in K[X]^n$, 有

$$L(\mathbf{F}(X)) = \left((XI - A) \cdot \mathbf{F}(X) \right).$$

因此, 有

$$\pi(L(\mathbf{F}(X))) = \sum_{i=1}^n ((XI - A) \cdot \mathbf{F}(X))_i(T) \cdot e_i.$$

注意到 $(XI - A) \cdot \mathbf{F}(X)$ 的第 i 个分量为

$$(X - a_{ii})F_i(X) - \sum_{j \neq i} a_{ij}F_j(X),$$

因此, 有

$$\pi(L(\mathbf{F}(X))) = \sum_{i=1}^n \left((T - a_{ii}I)F_i(T) - \sum_{j \neq i} a_{ij}F_j(T) \right) \cdot e_i.$$

由于 $T(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$, 可得

$$\begin{aligned} \pi(L(\mathbf{F}(X))) &= \sum_{i=1}^n \left(T(F_i(T) \cdot e_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}F_j(T) \cdot e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n T(F_i(T) \cdot e_i) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}F_j(T) \cdot e_i \right) \\ &= T \left(\sum_{i=1}^n F_i(T) \cdot e_i \right) - T \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}F_j(T) \cdot e_i \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

这说明 $L(\mathbf{F}(X)) \in \text{Ker}(\pi)$. 因此, 有 $\text{Im } L \subseteq \text{Ker}(\pi)$.

再证明 $\text{Ker} \pi \subset \text{Im } L$. $\forall \mathbf{F}(X) \in \text{Ker} \pi$, 将其按照 X 的次数展开:

$$\mathbf{F}(X) = \sum_{k=0}^m \mathbf{X}^k v_k = X^m v_m + X^{m-1} v_{m-1} + \cdots + X v_1 + v_0,$$

其中, $v_k \in K^n$. 利用代数恒等式 $X^k \cdot I - A^k = (X \cdot I - A)(X^{k-1} + X^{k-2}A + \cdots + XA^{k-2} + A^{k-1})$, 可得

$$X^k \cdot I \equiv A^k \pmod{\text{Im } L}.$$

因此, 有

$$\mathbf{F}(X) \equiv \sum_{k=0}^m A^k v_k \pmod{\text{Im } L}.$$

由于 $\mathbf{F}(X) \in \text{Ker}(\pi)$, 以及 $\text{Im } L \subset \text{Ker}(\pi)$, 可知 $G(X) := \sum_{k=0}^m A^k v_k \in \text{Ker}(\pi)$. 注意到 $G(X)$ 是常数向量, 不妨设为 $(r_1, r_2, \dots, r_n)^T$, 于是

$$\pi(G(X)) = \sum_{i=1}^n r_i e_i = 0.$$

又由于 $\{e_i\}$ 是 V 的一组基, 可知 $r_i = 0$ 对任意 i 成立, 即 $G(X) = 0$. 于是有 $\mathbf{F}(X) \in \text{Im } L$. 因此, 有 $\text{Ker}(\pi) \subset \text{Im } L$.

综上所述, 有 $\text{Ker}(\pi) = \text{Im } L$. 由同态基本定理可知, $V \simeq K[X]^n /_{\text{Ker}(\pi)} \simeq K[X]^n /_{\text{Im } L}$.

□

注: 个人认为, 利用代数恒等式 $X^k \cdot I - A^k = (X \cdot I - A)(X^{k-1} + X^{k-2}A + \cdots + XA^{k-2} + A^{k-1})$ 是证明 $\text{Ker}(\pi) \subset \text{Im } L$ 的关键所在.

如果记性好, 能够想起高代中同样代表带余除法的引理, 参看《高等代数学》(谢启鸿姚慕生吴泉水) 中的引理 7.1.1.

如果存在可逆的 $P \in \mathbf{End}_K(V)$, 使得 $P \circ S \circ P^{-1} = T$, 就称 S 与 T 是 (通过 P) 相似的.

另外, 根据 S 和 T 可分别在 V 上定义出 (两个) $K[X]$ -模的结构. 第一个记作 V_S :

$$K[X] \times V \rightarrow V, \quad P(X) \mapsto (v \mapsto P(S)v);$$

第二个记作 V_T :

$$K[X] \times V \rightarrow V, \quad P(X) \mapsto (v \mapsto P(T)v).$$

5. 证明, 若 S 与 T 是通过 P 相似的, 则以下映射是 $K[X]$ -模同构:

$$V_S \longrightarrow V_T, \quad v \mapsto P(v).$$

证明: 记此映射为 φ . 由于 $P \in \mathbf{End}_K(V)$, φ 是双射. 对于任意 $v \in V_S$ 和 $Q(X) \in K[X]$, 有

$$\varphi(Q(X) \cdot v) = \varphi(Q(S)v) = P(Q(S)v) = Q(T)P(v) = Q(X) \cdot \varphi(v).$$

因此, φ 是 $K[X]$ -模同构. □

6. 证明, S 与 T 相似当且仅当 $K[X]$ -模 V_S 与 V_T 同构.

证明: 必要性: 由题 5 的结论可知.

充分性: 设 $\varphi : V_S \longrightarrow V_T$ 为 $K[X]$ -模同构. 由于 φ 是双射, 因此, 存在 $P = \varphi \in \mathbf{End}_K(V)$ 使得对于任意 $v \in V$, 有 $\varphi(v) = P(v)$. 对于任意 $v \in V$, 有

$$P(S(v)) = P(X \cdot v) = X \cdot P(v) = T(P(v)) = T(\varphi(v)) = T(P(v)).$$

因此, 有 $P \circ S = T \circ P$, 即 $P \circ S \circ P^{-1} = T$. 这说明 S 与 T 相似. □

7. 证明, S 与 T 相似当且仅当 S 与 T 具有同样的不变因子.

证明: 由于 $K[X]$ -模 V_S 与 V_T 同构, 由有限生成模的分类定理的唯一性可知, S 与 T 具有同样的不变因子. 于是由题 6, S 与 T 相似当且仅当 $K[X]$ -模 V_S 与 V_T 同构, 当且仅当 S 与 T 具有同样的不变因子 □

8. 给定 V 一组基使得 S 和 T 可以用矩阵表示 (仍然记作 S 和 T) 证明, S 与 T 相似当且仅当 $X \cdot I - S$ 与 $X \cdot I - T$ 在 $\mathbf{M}_n(K[X])$ 中共轭, 即存在 $P \in \mathbf{GL}(n; K[X])$, 使得 $P \cdot (X \cdot I - S) \cdot P^{-1} = X \cdot I - T$.

证明: 必要性: 设 S 与 T 相似, 则有 $P \cdot S \cdot P^{-1} = T$. 同时 $P \cdot X \cdot I \cdot P^{-1} = X \cdot I$. 因此, 有

$$P \cdot (X \cdot I - S) \cdot P^{-1} = X \cdot I - T.$$

充分性: 设存在 $P \in \mathbf{GL}(n; K[X])$, 使得 $P \cdot (X \cdot I - S) \cdot P^{-1} = X \cdot I - T$. 类似题 4 的带余除法, 可知 P 可以写成 $P = Q \cdot (X \cdot I - S) + R$, 其中 $Q \in \mathbf{M}_n(K[X])$ 且 $R \in \mathbf{M}_n(K)$. 于是有

$$\begin{aligned} P \cdot (X \cdot I - S) &= (X \cdot I - T) \cdot P \\ \Rightarrow (Q \cdot (X \cdot I - S) + R) \cdot (X \cdot I - S) &= (X \cdot I - T) \cdot (Q \cdot (X \cdot I - S) + R) \\ \Rightarrow (Q \cdot (X \cdot I - S) + R - (X \cdot I - T) \cdot Q) \cdot (X \cdot I - S) &= (X \cdot I - T) \cdot R. \end{aligned}$$

上式右边是次数小于等于 1 的矩阵多项式, 因此左边也必须是次数小于等于 1 的矩阵多项式. 这说明 $Q \cdot (X \cdot I - S) + R - (X \cdot I - T) \cdot Q$ 也是一个常数矩阵, 记为 U . 于是有

$$U \cdot (X \cdot I - S) = (X \cdot I - T) \cdot R.$$

整理上式, 可得

$$X \cdot (U - R) = T \cdot R - U \cdot S.$$

再比较次数, 可知 $U = R$, $US = TR$. 于是只需要证明 R 是可逆的即可. 由于 P 是可逆的, 存在 $P^{-1} \in \mathbf{M}_n(K[X])$, 使得

$$P \cdot P^{-1} = I.$$

同样地, 设 $P^{-1} = Q' \cdot (X \cdot I - S) + R'$, 其中 $Q' \in \mathbf{M}_n(K[X])$ 且 $R' \in \mathbf{M}_n(K)$. 于是有

$$(Q \cdot (X \cdot I - S) + R) \cdot (Q' \cdot (X \cdot I - S) + R') = I.$$

展开上式, 可得

$$(Q \cdot (X \cdot I - S) \cdot Q') \cdot (X \cdot I - S) = I - R \cdot R'.$$

比较次数, 可知 $R \cdot R' = I$. 这说明 R 是可逆的. 综上所述, 有 S 与 T 相似. \square

注: 参看《高等代数学》(谢启鸿姚慕生吴泉水) 中的定理 7.1.2.

9. 应用: 试计算 $\mathbf{GL}(2; \mathbb{F}_3)$ 的共轭类的个数.

证明: 设 $K = \mathbb{F}_3$. 根据有限生成模的分类定理, $\mathbf{GL}(2; K)$ 中的每个元素 T 的不变因子有以下几种可能:

1. $P_1(X) = X - a$, $P_2(X) = X - a$, 其中 $a \in K$. 共有 3 种可能.
2. $P_1(X) = (X - a)^2$, 其中 $a \in K$. 共有 3 种可能.
3. $P_1(X) = Q(X)$, 其中 $Q(X) \in K[X]$ 为次数为 2 的首一不可约多项式. 共有 $3^3 - 3 - 3 = 3$ 种可能.

综上所述, $\mathbf{GL}(2; \mathbb{F}_3)$ 的共轭类的个数为 $3 + 3 + 3 = 9$. \square

10. 应用: 给定域扩张 L/K 以及 $A, B \in \mathbf{M}_n(K)$. 证明, 若存在 $P \in \mathbf{GL}(n; L)$ 使得 $PAP^{-1} = B$, 则存在 $Q \in \mathbf{GL}(n; K)$ 使得 $QAQ^{-1} = B$. (提示: 参考 Smith 标准型唯一性的证明)

证明: 设 $X \cdot I - A$ 在 $\mathbf{M}_n(K[X])$ 中的 Smith 标准型为

$$D_A = \text{diag}(P_1(X), P_2(X), \dots, P_n(X)),$$

其中, $P_i(X) \in K[X]$ 且 $P_i(X) | P_{i+1}(X)$. 同理, 设 $X \cdot I - B$ 在 $\mathbf{M}_n(K[X])$ 中的 Smith 标准型为

$$D_B = \text{diag}(Q_1(X), Q_2(X), \dots, Q_n(X)),$$

其中, $Q_i(X) \in K[X]$ 且 $Q_i(X) | Q_{i+1}(X)$. 由题 8 的结论可知, D_A 与 D_B 在 $\mathbf{M}_n(L[X])$ 中共轭. 由 Smith 标准型的唯一性可知, 有 $P_i(X) = Q_i(X)$ 对任意 $1 \leq i \leq n$ 成立. 因此, $D_A = D_B$, 即 A 与 B 具有相同的不变因子. 由题 7 的结论可知, 存在 $Q \in \mathbf{GL}(n; K)$ 使得 $QAQ^{-1} = B$. \square

11. 给定 $\lambda \in K$. 证明, λ 是特征值等价于 $X - \lambda | p_T(\lambda)$, 即 λ 为 $p_T(\lambda)$ 的根. 令 V_λ 为 λ 对应的特征子空间 (若 λ 不是特征值, 则 $V_\lambda = 0$). 令 $\mu_a(\lambda)$ 为 λ 作为 $p_T(\lambda)$ 的根的重数, 我们称它为 λ 的代数重数; 令 $\mu_g(\lambda) = \dim_K V_\lambda$, 我们称它为 λ 的几何重数.

证明: λ 是特征值等价于存在非零向量 $v \in V$, 使得 $T(v) = \lambda v$. 这等价于 $(\lambda I - T)(v) = 0$, 即 $v \in \text{Ker}(\lambda I - T)$. 这等价于 $\det(\lambda I - T) = 0$. 由于 $p_T(X) = \det(XI - T)$ 是 T 的特征多项式, $\det(\lambda I - T) = 0$ 等价于 $X - \lambda | p_T(X)$. 因此, 有 λ 是特征值等价于 $X - \lambda | p_T(X)$. \square

12. 证明, $\mu_g(\lambda) = |\{i \mid X - \lambda \text{ 乘除 } P_i(X)\}|$, 其中, $\{P_i\}_{i \leq s}$ 为 T 的不变因子. (提示: 可以将 $K[X]$ -模 V 进一步分解为

$$V \simeq \left(\bigoplus_{\text{有限}} K[X] / (X - \lambda)^e \right) \oplus \left(\bigoplus_{\text{有限和, } Q \text{ 不可约, } Q(\lambda) \neq 0} K[X] / (Q(X))^e \right)$$

并研究 $X - \lambda$ 在分量上的作用)

证明: 由于 V 在同构意义下可分解为

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^s K[X] / (P_i(X)),$$

再考虑每个分量 $K[X] / (P_i(X))$ 的进一步分解. 设 $P_i(X)$ 在 $K[X]$ 中的分解为

$$P_i(X) = (X - \lambda)^{e_i} (Q_{i,1}(X))^{e_{i,1}} \cdots (Q_{i,k_i}(X))^{e_{i,k_i}},$$

其中, $Q_{i,j}(X)$ 为不可约多项式且 $Q_{i,j}(\lambda) \neq 0$. 由中国剩余定理可知, 在同构意义下, 有环同构

$$K[X] / (P_i(X)) \simeq K[X] / (X - \lambda)^{e_i} \oplus K[X] / (Q_{i,1}(X))^{e_{i,1}} \oplus \cdots \oplus K[X] / (Q_{i,k_i}(X))^{e_{i,k_i}},$$

故也可视为 $K[X]$ -模同构 (由商环性质保证). 由此可知, 在同构意义下, 有

$$\begin{aligned} V &\simeq \bigoplus_{i=1}^s \left(K[X] /_{(X-\lambda)^{e_i}} \oplus K[X] /_{(Q_{i,1}(X))^{e_{i,1}}} \oplus \cdots \oplus K[X] /_{(Q_{i,k_i}(X))^{e_{i,k_i}}} \right) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i=1}^s K[X] /_{(X-\lambda)^{e_i}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\text{有限和, } Q \text{ 不可约, } Q(\lambda) \neq 0} K[X] /_{(Q(X))^e} \right). \end{aligned}$$

由题 11 的结论可知, $V_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T)$. 注意到 $\lambda I - T$ 在 V 上的作用就等价于 $X - \lambda$ 在上述分解的各个分量上的作用. 于是有

$$V_\lambda \simeq \bigoplus \text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(X-\lambda)^e} \right) \oplus \bigoplus \text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(Q(X))^e} \right).$$

当 $X - \lambda$ 作用在 $K[X] /_{(X-\lambda)^e}$ 上时, 显然 $\text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(X-\lambda)^e} \right)$ 的基为 $\{(X-\lambda)^{e-1} + ((X-\lambda)^e)\}$, 因此, 有

$$\dim_K \text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(X-\lambda)^e} \right) = 1.$$

另一方面, 由于 $X - \lambda$ 在 $K[X] /_{(Q(X))^e}$ 上是可逆的 (因为 $\gcd(X - \lambda, Q(X)) = 1$, 由 Bezout 定理可知), 因此, 有

$$\text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(Q(X))^e} \right) = 0.$$

综上所述, 有

$$\begin{aligned} \mu_g(\lambda) &= \dim_K V_\lambda \\ &= \dim_K \bigoplus \text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(X-\lambda)^e} \right) \\ &\quad + \dim_K \bigoplus \text{Ker} \left(X - \lambda \text{ 作用在 } K[X] /_{(Q(X))^e} \right) \\ &= \left| \left\{ i \mid K[X] /_{(X-\lambda)^{e_i}}, \text{ 其中 } e_i \geq 1 \right\} \right| + 0 \\ &= \left| \left\{ i \mid X - \lambda \text{ 乘除 } P_i(X) \right\} \right|. \end{aligned}$$

□

13. 证明, $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$ 并且 $\sum_\lambda \mu_g(\lambda) \leq \dim_K V$.

证明: 由题 12 的结论可知, 有

$$\mu_g(\lambda) = \left| \left\{ i \mid X - \lambda \text{ 乘除 } P_i(X) \right\} \right|.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 \mu_a(\lambda) &= X - \lambda \text{ 作为 } p_T(X) \text{ 的根的重数} \\
 &= X - \lambda \text{ 作为 } \prod_{i=1}^s P_i(X) \text{ 的根的重数} \\
 &= \sum_{i=1}^s X - \lambda \text{ 作为 } P_i(X) \text{ 的根的重数} \\
 &\geq |\{i \mid X - \lambda \text{ 乘除 } P_i(X)\}| = \mu_g(\lambda).
 \end{aligned}$$

这说明 $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$.

进一步有

$$\sum_{\lambda} \mu_g(\lambda) \leq \sum_{\lambda} \mu_a(\lambda) = \deg p_T(X) = \dim_K V.$$

□

注: 对于不同特征值 $\lambda \neq \mu$, 其对应的特征子空间 V_λ, V_μ 的和为直和. 这是因为假设 $\exists v \in V_\lambda \cap V_\mu$, 则

$$Tv = \lambda v = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu)v = 0 \Rightarrow v = 0.$$

因此, 有

$$\sum_{\lambda} \mu_g(\lambda) = \sum_{\lambda} \dim_K V_\lambda \leq \dim_K V.$$

14. 证明, T 可被对角化当且仅当其极小多项式 $m_T(X)$ 分裂成一次多项式的乘积.

证明: 充分性: 设 $m_T(X)$ 分裂成一次多项式的乘积, 即

$$m_T(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k),$$

其中, λ_i 为 T 的特征值. 由题 13 的过程可知, 对于每个特征值 λ_i , 有 $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$. 因此, 有

$$\sum_{i=1}^k \mu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \mu_a(\lambda_i) = \dim_K V.$$

这说明 V 可以写成特征子空间的直和:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}.$$

因此, T 可被对角化.

必要性: 设 T 可被对角化, 则存在基 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 使得对于每个 v_i , 有

$$T(v_i) = \lambda_i v_i,$$

其中, λ_i 为 T 的特征值. 因此, 有

$$m_T(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

这说明 $m_T(X)$ 分裂成一次多项式的乘积. □