ODE

第十次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 30 日

习题 1 本题的目的是说明平衡点渐近稳定的定义中，首先要求平衡点稳定这个条件不是多余的。

1) 求系统 $\dot{\theta} = \sin\frac{\theta}{2}$ 的相流。

2) 考虑极坐标系下的系统

$$\dot{r} = r(1-r); \quad \dot{\theta} = \sin\frac{\theta}{2}.$$

求系统的相流。

3) 将该系统转化为直角坐标系下的自治系统，并求其平衡点以及相流。

4) 证明该平衡点 p 不稳定，但是存在 p 的一个小邻域 U 使得对任意的 $z \in U$ 有

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(z) = p.$$

解： 1) 分离变量得

$$\int \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} d\theta = \int dt \Rightarrow 2\ln(\tan\frac{\theta}{4}) = t + C.$$

由此解得相流为

$$\varphi_t(\theta_0) = 4\arctan\left(e^{\frac{t}{2}}\tan\frac{\theta_0}{4}\right).$$

2) $\dot{r} = r(1-r)$ 可分离变量得

$$\int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r}\right) dr = \int dt \Rightarrow \ln\left|\frac{r}{1-r}\right| = t + C.$$

解得

$$r(t)=\frac{r_0e^t}{1+r_0\left(e^t-1\right)}.$$

于是可知该系统的相流为

$$\psi_t(r_0,\theta_0)=\left(\frac{r_0e^t}{1+r_0\left(e^t-1\right)},4\arctan\left(e^{\frac{t}{2}}\tan\frac{\theta_0}{4}\right)\right).$$

3) 通过极坐标变换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

将极坐标系下的系统转化为直角坐标系下的自治系统, 有

$$\begin{cases}\dot{x}&=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta=r(1-r)\cos\theta-r\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}=x-x\sqrt{x^2+y^2}-y\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{x}\right),\\ \dot{y}&=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta=r(1-r)\sin\theta+r\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}=y-y\sqrt{x^2+y^2}+x\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{x}\right).\end{cases}$$

易求得平衡点为 $(0,0)$ 和 $(1,0)$. 将相流 $\psi_t(r_0,\theta_0)$ 转化为直角坐标系下的相流, 有

$$\phi_t(x_0,y_0)=(\psi_{t,r}(r_0,\theta_0)\cos\psi_{t,\theta}(r_0,\theta_0),\psi_{t,r}(r_0,\theta_0)\sin\psi_{t,\theta}(r_0,\theta_0))=$$
$$\left(\frac{r_0e^t}{1+r_0\left(e^t-1\right)}\cos\left(4\arctan\left(e^{\frac{t}{2}}\tan\frac{\theta_0}{4}\right)\right),\frac{r_0e^t}{1+r_0\left(e^t-1\right)}\sin\left(4\arctan\left(e^{\frac{t}{2}}\tan\frac{\theta_0}{4}\right)\right)\right),$$

其中, $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2},\theta_0=\arctan\frac{y_0}{x_0}$.

4) $(0,0)$ 是该系统的一个不稳定平衡点, 但我们的讨论重点不在这里.

我们主要关心 $p=(1,0)$. 考虑初值 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 根据相流表达式可知

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t(x_0,y_0)=(1,0).$$

而对于 $(1,0)$ 的一个小邻域 $U=\{(x,y)|\sqrt{(x-1)^2+y^2}<\varepsilon<1\}$, 若对于 $(x_0,y_0)\in U$, 其中 $y_0>0$, 则有 $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$, 根据 θ 的相流表达式可知, 随着 $t\to\infty$, $\theta(t)$ 单调增加趋向于 2π. 因此存在 $t_0>0$, 使得 $\theta(t_0)=\pi$. 此时 $(x,y)\notin U$, 并且这样的初值 (x_0,y_0) 在 $(1,0)$ 的任意小邻域中都存在. 因此 $p=(1,0)$ 不稳定. □

习题 2 设 $a\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}^2$。考虑初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2-1,\\ \dot{y}=-xy+a\left(x^2-1\right)\end{cases};\quad (x(0),y(0))=z.$$

1) 求解初值问题。

2) 设 $a<0$ ，画出系统的相图（即画出典型的相曲线）。

解： 1) 首先解 $\dot{x}=x^2-1$. 分离变量得

$$\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int dt\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=t+C.$$

解得

$$x(t)=\frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}},$$

其中 $A=\frac{x_0-1}{x_0+1}$。接下来解 $\dot{y}=-xy+a\left(x^2-1\right)$。将 $x(t)$ 代入得

$$\dot{y}=-\frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}}y+a\left(\frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}}\right)^2-a.$$

这是一个非齐次线性微分方程, 可以通过分离变量求出其通解为

$$y_h(t)=\frac{Ae^{2t}-1}{Ae^t-e^t}y_0$$

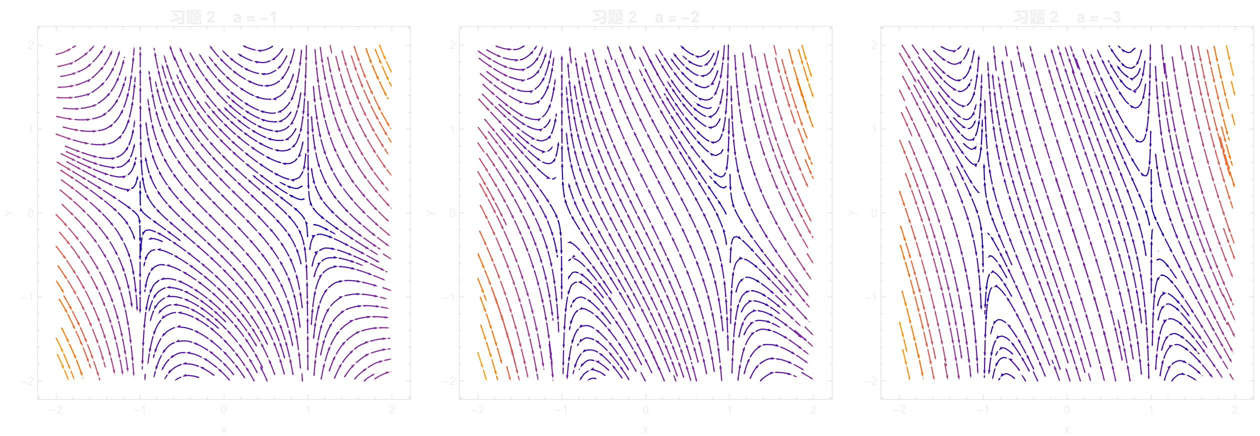
进一步求得一个特解为

$$\begin{aligned}
y_p(t)&=\int_0^t\frac{Ae^{2t}-1}{e^t}\cdot\frac{e^\tau}{Ae^{2\tau}-1}\cdot a\left(\left(\frac{1+Ae^{2\tau}}{1-Ae^{2\tau}}\right)^2-1\right)d\tau\\
&=4Aa\frac{1-Ae^{2t}}{e^t}\int_0^t\frac{e^{3\tau}}{(1-Ae^{2\tau})^3}d\tau\\
&=4Aa\frac{1-Ae^{2t}}{e^t}\cdot\left.\left(\frac{\mathrm{e}^\tau\left(1+Ae^{2\tau}\right)}{8A\left(1-Ae^{2\tau}\right)^2}-\frac{\ln\left(\left|Ae^\tau+\sqrt{A}\right|\right)-\ln\left(\left|Ae^\tau-\sqrt{A}\right|\right)}{16A^{\frac{3}{2}}}\right)\right|_{\tau=0}^{\tau=t}\\
&=\frac{a\left(1+Ae^{2t}\right)}{2\left(1-Ae^{2t}\right)}-\frac{a\left(1-Ae^{2t}\right)(1+A)}{2e^t\left(1-A\right)^2}+\frac{a\left(1-Ae^{2t}\right)}{4\sqrt{A}e^{2t}}\left(\ln\left|\frac{Ae^t-\sqrt{A}}{Ae^t+\sqrt{A}}\right|-\ln\left|\frac{A-\sqrt{A}}{A+\sqrt{A}}\right|\right).
\end{aligned}$$

因此初值问题的解为

$$\begin{cases}x(t)=\frac{1+Ae^{2t}}{1-Ae^{2t}},\\ y(t)=y_h(t)+y_p(t).\end{cases}$$

2) 系统的相图如下所示:



□

习题 3 考虑系统

$$\dot{x}=(\epsilon x+2y)(z+1)$$

$$\dot{y}=(-x+\epsilon y)(z+1)$$

$$\dot{z}=-z^3$$

1）证明：当 $\epsilon = 0$ 时，平衡点不是渐近稳定的。

2）证明：当 $\epsilon < 0$ 时，对任意的 $p = (x, y, z)$ 满足 $z > -1$ 均有

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(z) = (0,0,0)$$

解： 1) 当 $\epsilon = 0$ 时, 系统变为

$$\dot{x} = 2y(z+1)$$
$$\dot{y} = -x(z+1)$$
$$\dot{z} = -z^3$$

系统平衡点为 $(0,0,0)$. 考虑平面 $z = 0$ 上的运动, 有

$$\dot{x} = 2y$$
$$\dot{y} = -x$$

该系统的解为

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}y_0 \sin(\sqrt{2}t)$$
$$y(t) = y_0 \cos(\sqrt{2}t) - \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$$

因此在平面 $z = 0$ 上的运动是绕原点做周期运动的. 由此可知, 平衡点 $(0,0,0)$ 不是渐近稳定的.

2) 考虑 Lyapunov 函数 $L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$. 则

$$\dot{L}(x,y,z) = L'(X)\cdot F(X) = (2ax, 2by, 2cz)\begin{pmatrix}(\epsilon x+2y)(z+1)\\(-x+\epsilon y)(z+1)\\-z^3\end{pmatrix}$$
$$= 2ax(\epsilon x+2y)(z+1) + 2by(-x+\epsilon y)(z+1) + 2cz(-z^3)$$
$$= 2[(a\epsilon x^2 + (2a-b)xy + b\epsilon y^2)(z+1) - cz^4].$$

取 $a = 1, b = 2, c = 1$, 则有

$$\dot{L}(x,y,z) = 2[(\epsilon x^2 + 2\epsilon y^2)(z+1) - z^4].$$

由于 $\epsilon < 0$ 且 $z > -1$, 因此 $\dot{L}(x,y,z) < 0$ 对所有 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ 成立. 由 Lyapunov 稳定性定理可知, 平衡点 $(0,0,0)$ 渐近稳定. 进一步地, 对任意的初值 $p = (x_0, y_0, z_0)$ 满足 $z_0 > -1$, 有

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(z) = (0,0,0).$$

$\square$