

ODE

第十三次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 28 日

习题 1 考虑自治系统 $\dot{x} = \sin^3 x$ 。

1) 证明对任意初值 $z \in \mathbb{R}$, 初值问题

$$\dot{x} = \sin^3 x; \quad x(0) = z$$

的极大解的定义区间均为 \mathbb{R} 。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解: 1) 设

$$f(x) = \sin^3 x.$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 由 Picard–Lindelöf 定理可知: 对任意初值 $z \in \mathbb{R}$, 初值问题

$$\dot{x} = \sin^3 x, \quad x(0) = z$$

存在唯一极大解 $(x(t), I)$, 其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$ 。

注意到对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有

$$|\sin^3 x| \leq 1.$$

因此沿着解 $x(t)$,

$$|\dot{x}(t)| = |\sin^3 x(t)| \leq 1, \quad \forall t \in I.$$

对任意 $t \in I$, 由积分形式,

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) ds.$$

取绝对值得

$$|x(t) - z| \leq \int_0^{|t|} |\dot{x}(s)| ds \leq |t|.$$

从而

$$|x(t)| \leq |z| + |t|, \quad \forall t \in I.$$

因此解 $x(t)$ 在任意有限时间区间上都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$, 则解 $x(t)$ 在区间 $[0, \beta)$ 上有界。又因为 $f(x) = \sin^3 x$ 在整个 \mathbb{R} 上连续, 根据常微分方程解的延拓定理, 解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta + \varepsilon)$, 这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$ 。

同理可证 $\alpha = -\infty$ 。

综上, 极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程 $\frac{dx}{dt} = \sin^3 x$ 给出. 分离变量得

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int dt$$

计算左侧积分:

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \left(\csc x \cot x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + C$$

因此, 相曲线方程为

$$-\frac{1}{2} \left(\csc x \cot x + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) = t + C$$

其中 C 为常数. 不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述.

□

习题 2 考虑单摆系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

1) 证明对所有的初值 $z \in \mathbb{R}^2$ 相应的初值问题的极大解的定义区间均为 \mathbb{R} 。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解: 1) 考虑单摆系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

设

$$f(x, y) = (y, -\sin x).$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由 Picard–Lindelöf 定理可知: 对任意初值 $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 初值问题

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

存在唯一极大解 $((x(t), y(t)), I)$, 其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$ 。

考虑系统的能量函数

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x.$$

沿着解 $(x(t), y(t))$ 求导, 得

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = y(t)\dot{y}(t) + \sin x(t)\dot{x}(t) = y(t)(-\sin x(t)) + \sin x(t)y(t) = 0.$$

因此

$$E(x(t), y(t)) \equiv E(x_0, y_0), \quad \forall t \in I.$$

由此可得

$$\frac{1}{2}y(t)^2 \leq E(x_0, y_0),$$

从而

$$|y(t)| \leq \sqrt{2E(x_0, y_0)}, \quad \forall t \in I.$$

又因为

$$\dot{x}(t) = y(t),$$

在任意有限时间区间上, $x(t)$ 也保持有界。因此解 $(x(t), y(t))$ 在任意有限时间区间内都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$, 则解在区间 $[0, \beta)$ 上有界。又由于向量场 $f(x, y)$ 在整个 \mathbb{R}^2 上连续, 根据常微分方程解的延拓定理, 解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta + \varepsilon)$, 这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$ 。

同理可证 $\alpha = -\infty$ 。

综上, 极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{y}$$

给出. 分离变量得

$$ydy = -\sin x dx$$

积分两边得到

$$\frac{y^2}{2} = \cos x + C$$

其中 C 为常数. 因此, 相曲线方程为

$$\frac{y^2}{2} - \cos x = C$$

不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述. \square

习题 3 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

- 1) 证明对所有的初值 $z \in \mathbb{R}^2$ 相应的初值问题的极大解的定义区间均为 \mathbb{R} 。
- 2) 列出系统所有的极大相曲线。

解: 1) 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

设

$$f(x, y) = (\sin y, -\sin x).$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由 Picard–Lindelöf 定理可知: 对任意初值 $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 该初值问题存在唯一极大解 $((x(t), y(t)), I)$, 其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$ 。

考虑函数

$$E(x, y) = \cos x + \cos y.$$

沿着解 $(x(t), y(t))$ 求导, 得

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = -\sin x(t)\dot{x}(t) - \sin y(t)\dot{y}(t).$$

代入系统方程,

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = -\sin x(t)\sin y(t) - \sin y(t)(-\sin x(t)) = 0.$$

因此

$$E(x(t), y(t)) \equiv E(x_0, y_0), \quad \forall t \in I.$$

由 $|\cos x| \leq 1$ 可知,

$$-2 \leq E(x(t), y(t)) \leq 2.$$

同时, 由系统本身有

$$|\dot{x}(t)| = |\sin y(t)| \leq 1, \quad |\dot{y}(t)| = |\sin x(t)| \leq 1.$$

于是对任意 $t \in I$,

$$|x(t) - x_0| \leq \int_0^{|t|} |\dot{x}(s)| ds \leq |t|, \quad |y(t) - y_0| \leq \int_0^{|t|} |\dot{y}(s)| ds \leq |t|.$$

从而

$$|x(t)| \leq |x_0| + |t|, \quad |y(t)| \leq |y_0| + |t|, \quad \forall t \in I.$$

因此解 $(x(t), y(t))$ 在任意有限时间区间内都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$, 则解在区间 $[0, \beta)$ 上有界。又由于向量场 $f(x, y)$ 在整个 \mathbb{R}^2 上连续, 根据常微分方程解的延拓定理, 解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta + \varepsilon)$, 这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$ 。

同理可证 $\alpha = -\infty$ 。

综上, 极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\sin y}$$

给出. 分离变量得

$$\sin y dy = -\sin x dx$$

积分两边得到

$$-\cos y = \cos x + C$$

其中 C 为常数. 因此, 相曲线方程为

$$\cos x + \cos y = -C$$

不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述. \square

习题 4 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \\ \dot{y} = \sin y \end{cases}$$

1) 证明对所有的初值 $z \in \mathbb{R}^2$ 相应的初值问题的极大解的定义区间均为 \mathbb{R} 。

2) 列出系统所有的极大相曲线。

解： 1) 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = \sin y. \end{cases}$$

设

$$f(x, y) = (\sin x, \sin y).$$

由于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 由 Picard–Lindelöf 定理可知: 对任意初值 $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 该初值问题存在唯一极大解 $((x(t), y(t)), I)$, 其中 $I = (\alpha, \beta)$ 是包含 0 的开区间。

下面证明 $\alpha = -\infty$ 且 $\beta = +\infty$ 。

注意到对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\sin y| \leq 1.$$

因此沿着解 $(x(t), y(t))$,

$$|\dot{x}(t)| = |\sin x(t)| \leq 1, \quad |\dot{y}(t)| = |\sin y(t)| \leq 1, \quad \forall t \in I.$$

对任意 $t \in I$, 由积分形式,

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s) ds, \quad y(t) - y(0) = \int_0^t \dot{y}(s) ds.$$

取绝对值得

$$|x(t) - x_0| \leq \int_0^{|t|} |\dot{x}(s)| ds \leq |t|, \quad |y(t) - y_0| \leq \int_0^{|t|} |\dot{y}(s)| ds \leq |t|.$$

从而

$$|x(t)| \leq |x_0| + |t|, \quad |y(t)| \leq |y_0| + |t|, \quad \forall t \in I.$$

因此解 $(x(t), y(t))$ 在任意有限时间区间内都是有界的。

若假设 $\beta < +\infty$, 则解在区间 $[0, \beta)$ 上有界。又由于向量场 $f(x, y)$ 在整个 \mathbb{R}^2 上连续, 根据常微分方程解的延拓定理, 解可以延拓到区间 $(\alpha, \beta + \varepsilon)$, 这与 β 是极大右端点矛盾。故 $\beta = +\infty$ 。同理可证 $\alpha = -\infty$ 。综上, 极大解的定义区间为

$$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2) 系统的相曲线由方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x}$$

给出. 分离变量得

$$\frac{1}{\sin y} dy = \frac{1}{\sin x} dx$$

积分两边得到

$$\ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

其中 C 为常数. 因此, 相曲线方程为

$$\ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = C$$

不同的 C 对应不同的相曲线. 综上, 系统所有的极大相曲线由上述方程描述.

□