ODE

第二次大作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 28 日

习题 1 设 $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且以 1 为周期. 考虑如下周期系数二阶齐次方程

$$-\ddot{x}+q(t)x=0. \tag{1}$$

与之等价的周期系数一阶方程形如

$$\dot{x}=Q(t)x;\quad \text{这里}Q(t):=\begin{bmatrix}0 & 1\\ q(t) & 0\end{bmatrix}. \tag{2}$$

设 $\Pi(t;q)$ 为初值问题

$$\dot{X}=Q(t)X;\quad X(0)=I_2$$

的解. 定义系统的首次回归矩阵 $M:=\Pi(1;q)$.

1) 证明：$\det\Pi(t;q)=1$.

2) 证明：若 $|\operatorname{tr}M|<2$, 则 (1) 的所有解均有界.

3) 证明：若 $\operatorname{tr}M=2$, 则 (1) 有一个周期为 1 的非零解. (1) 的所有解均是周期为 1 的解当且仅当 $M=I_2$. 若 $\operatorname{tr}M=2$ 但 $M\neq I_2$, 则 (1) 的非 1-周期解必无界.

解： 1) 对于相流 Π, 有

$$\det\Pi(t;q)=e^{\int_0^t\operatorname{tr}(Q(s))ds}.$$

对其求导可得

$$\frac{d}{dt}\det\Pi(t;q)=\operatorname{tr}(Q(t))\det\Pi(t;q).$$

注意到 $\operatorname{tr}(Q(t))=0$, 且 $\det\Pi(0;q)=\det I_2=1$, 因此

$$\det\Pi(t;q)\equiv 1.$$

2) 设 M 的特征值为 λ_1, λ_2, 则由 $\det M = 1$ 知 $\lambda_1\lambda_2 = 1$. 又由 $|\operatorname{tr} M| < 2$ 且 $\lambda_1+\lambda_2 = \operatorname{tr} M$ 知 $|\lambda_1 + \lambda_2| < 2$. 通过直接计算可知 $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ 且模长均为 1, 即存在实数 θ 使得 $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$.

设 v_1, v_2 分别为 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 则由线性代数的知识知 $\{v_1, v_2\}$ 线性无关, 因此可构造出矩阵 $P := [v_1 \quad v_2]$. 注意到

$$MP = P \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix},$$

因此

$$M = P \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

对任意初始值 $X(0) = X_0$, 有

$$X(n) = M^n X_0 = P \begin{bmatrix} e^{in\theta} & 0 \\ 0 & e^{-in\theta} \end{bmatrix} P^{-1} X_0.$$

$X(n)$ 可表示为 $e^{in\theta}$ 与 $e^{-in\theta}$ 的线性组合, 因为 $|e^{in\theta}| = |e^{-in\theta}| = 1$, 所以 $X(n)$ 有界. 又因为 $Q(t)$ 连续且以 1 为周期, 所以 $X(t)$ 在每个区间 $[n, n+1]$ 上均连续, 因此 $X(t)$ 有界.

3) 若 $\operatorname{tr} M = 2$, 则 M 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 设 v_1 为 λ_1 对应的特征向量, 则 $Mv_1 = v_1$. 定义 $X(0) := v_1$, 则由线性代数的知识知 $X(n) = M^n X(0) = v_1$. 因此由常微分方程解的唯一性定理知 $X(t)$ 为周期为 1 的非零解. ($X(n)$ 值相同, 于是 $X(t)$ 在 $[n, n+1]$ 上取相同值)

若 (1) 的所有解均为周期为 1 的解, 则对任意初始值 $X(0) = X_0$, 均有 $X(1) = X_0$, 因此 $MX_0 = X_0$. 由线性代数的知识知 $M = I_2$. 反之, 若 $M = I_2$, 则对任意初始值 $X(0) = X_0$, 均有 $X(1) = MX_0 = X_0$. 因此 (1) 的所有解均为周期为 1 的解.

若 $\operatorname{tr} M = 2$ 但 $M \neq I_2$, 则

$$M = P \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

M 只有一个线性无关的特征向量 v_1. 设初始值 $X(0) = X_0$ 与 v_1 线性无关, 则由线性代数的知识知 $X(n) = M^n X(0) = P \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n P^{-1} X_0$, 随着 n 增大而无界. 因此由常微分方程解的唯一性定理知 $X(t)$ 亦无界. $\square$

称 ϕ 是 (1) 的一个 1-反周期解, 若 ϕ 是 (1) 的解且满足

$$\phi(t+1) = -\phi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

由定义知, 若 ϕ 是一个 1-反周期解, 则其是一个 2-周期解.

4) 证明：若 $\operatorname{tr} M = -2$, 则 (1) 有一个非零 1-反周期解. (1) 的所有解均是 1-反周期解当且仅当 $M = -I_2$. 若 $\operatorname{tr} M = -2$ 但 $M \neq -I_2$, 则 (1) 的非 1-反周期解必无界.

5) 证明：若 $|\operatorname{tr} M| > 2$, 则 (1) 的任何非零解均无界. 进而证明：(1) 有一个非零有界解当且仅当 $|\operatorname{tr} M| \leq 2$.

解： 4) 若 $\operatorname{tr} M = -2$, 则 $-M$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 设 v_1 为 λ_1 对应的特征向量, 则 $-Mv_1 = v_1$. 定义 $X(0) := v_1$, 则由线性代数的知识知 $X(n) = -M^n X(0) = v_1$. 因此由常微分方程的唯一性定理知 $X(t)$ 为 1-反周期解.

若 (1) 的所有解均为 1-反周期解, 则对任意初始值 $X(0) = X_0$, 均有 $X(1) = -X_0$, 因此 $MX_0 = -X_0$. 由线性代数的知识知 $M = -I_2$.

若 $\operatorname{tr} M = -2$ 但 $M \neq -I_2$, 则 $-M$ 只有一个线性无关的特征向量 v_1. 设初始值 $X(0) = X_0$ 不为 v_1 的数倍, 则由线性代数的知识知 $X(n) = -M^n X(0)$ 随着 n 增大而无界. 因此由常微分方程的唯一性定理知 $X(t)$ 亦无界.

5) 设 M 的特征值为 λ_1, λ_2, 则由 $\det M = 1$ 知 $\lambda_1\lambda_2 = 1$. 又由 $|\operatorname{tr} M| > 2$ 知 $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} M$ 满足 $|\lambda_1 + \lambda_2| > 2$. 因此 λ_1, λ_2 均为实数且其中一个的模长大于 1.

设初始值 $X(0) = X_0$ 不为 λ_1 对应的特征向量的数倍, 则由线性代数的知识知 $X(n) = M^n X(0)$ 随着 n 增大而无界. 因此由常微分方程的唯一性定理知 $X(t)$ 亦无界.

综上所述, (1) 有一个非零有界解当且仅当 $|\operatorname{tr} M| \leq 2$. $\square$

接下来, 我们引入参数 $\lambda \in \mathbb{R}$. 考虑一族方程

$$\mathscr{E}(\lambda): \quad -\ddot{x} + (q(t) - \lambda)x = 0. \tag{3}$$

设 $\phi(t, \lambda)$ 与 $\psi(t, \lambda)$ 分别为 (3) 的满足如下初值的解：

$$\phi^{\langle 2 \rangle}(0, \lambda) = (1, 0)^t; \quad \psi^{\langle 2 \rangle}(0, \lambda) = (0, 1)^t. \tag{4}$$

则我们有

$$\Pi(t; q - \lambda) = \left[\phi^{\langle 2 \rangle}(t, \lambda), \psi^{\langle 2 \rangle}(t, \lambda)\right]. \tag{5}$$

定义稳定参数集为

$$\mathcal{S} := \{\lambda \in \mathbb{R} : (3) \text{ 有一个有界的非零解}\}.$$

记与 (3) 等价的一阶系统的首次回归矩阵为

$$M(\lambda) := \Pi(1; q - \lambda).$$

定义关于参数的判别式函数 $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$\Delta(\lambda) := \operatorname{tr} M(\lambda).$$

6) 证明 Δ 为 C^∞ 光滑函数, 且

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\}.$$

7) 在 $q \equiv 0$ 的假设下计算 $\Delta(\lambda)$, 并求 $\mathcal{S}$.

解: 6) 由常微分方程解对参数的光滑依赖性知, $\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda)$ 关于 λ 光滑依赖. 因此知 $M(\lambda)$ 关于 λ 光滑依赖, 进而 $\Delta(\lambda) = \operatorname{tr} M(\lambda)$ 关于 λ 光滑依赖. 由前述结论知 (3) 有一个非零有界解当且仅当 $|\operatorname{tr} M(\lambda)| \leq 2$. 因此

$$\mathcal{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\}.$$

7) 在 $q \equiv 0$ 的假设下, (3) 化为

$$-\ddot{x} - \lambda x = 0.$$

当 $\lambda > 0$ 时, 设 $\lambda = \mu^2, \mu > 0$, 则 (3) 的通解为

$$x(t) = C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t).$$

因此由 (4) 式知

$$\phi(t,\lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\mu t) \\ -\mu \sin(\mu t) \end{bmatrix}; \quad \psi(t,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}\sin(\mu t) \\ \cos(\mu t) \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda = 0$ 时, (3) 的通解为

$$x(t) = C_1 + C_2 t.$$

因此由 (4) 式知

$$\phi(t,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \psi(t,0) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda < 0$ 时, 设 $\lambda = -\mu^2, \mu > 0$, 则 (3) 的通解为

$$x(t) = C_1 \cosh(\mu t) + C_2 \sinh(\mu t).$$

因此由 (4) 式知

$$\phi(t,\lambda) = \begin{bmatrix} \cosh(\mu t) \\ \mu \sinh(\mu t) \end{bmatrix}; \quad \psi(t,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu}\sinh(\mu t) \\ \cosh(\mu t) \end{bmatrix}.$$

综上所述, 知

$$M(\lambda)=\begin{cases}\begin{bmatrix}\cos(\sqrt{\lambda}) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda})\\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) & \cos(\sqrt{\lambda})\end{bmatrix}, & \lambda>0;\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, & \lambda=0;\\ \begin{bmatrix}\cosh(\sqrt{-\lambda}) & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda})\\ \sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}) & \cosh(\sqrt{-\lambda})\end{bmatrix}, & \lambda<0.\end{cases}$$

因此

$$\Delta(\lambda)=\begin{cases}2\cos(\sqrt{\lambda}), & \lambda>0;\\ 2, & \lambda=0;\\ 2\cosh(\sqrt{-\lambda}), & \lambda<0.\end{cases}$$

由此可见

$$\mathcal{S}=[0,+\infty).$$

□

以下回到一般情形.

8) 证明存在 $\lambda_*\in\mathbb{R}$ 使得

$$\Delta(\lambda)>2,\quad (\forall\lambda\leq\lambda_*).$$

9) 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda\neq\mu_0$. 设 f 和 g 分别是 $\mathscr{E}(\lambda)$ 和 $\mathscr{E}(\mu)$ 的解. 证明

$$(\lambda-\mu)\langle f,g\rangle=g(0)\dot{f}(0)-f(0)\dot{g}(0)-g(1)\dot{f}(1)+f(1)\dot{g}(1) \tag{6}$$

这里

$$\langle f,g\rangle:=\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

10) 证明如下等式:

$$\langle\phi,\phi\rangle=-\phi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda) \tag{7}$$

$$\langle\psi,\psi\rangle=-\psi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda) \tag{8}$$

$$\langle\phi,\psi\rangle=\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\phi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda) \tag{9}$$

$$\langle\phi,\psi\rangle=\dot{\psi}(1,\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\psi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda). \tag{10}$$

11) 证明:

$$\Delta'(\lambda)=-\psi(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle+[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\langle\phi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle. \tag{11}$$

12) 证明：若 $|\Delta(\lambda)|<2$, 则 $\psi(1,\lambda)\neq 0$ 或者 $\dot\phi(1,\lambda)\neq 0$.

13) 证明：若 $|\Delta(\lambda)|<2$, 则 $\Delta'(\lambda)\neq 0$.

14) 设 $\Delta(\lambda)=2(-2)$. 证明

$$\Delta'(\lambda)=0 \Leftrightarrow M(\lambda)=I_2\,(-I_2)\,.$$

15) 证明：若 $\Delta(\lambda)=2(-2),\Delta'(\lambda)=0$, 则必有 $\Delta''(\lambda)<0(>0)$.

解： 8) 取 $\lambda<\min_{t\in[0,1]}q(t)$, 则对任意 $t\in[0,1]$ 均有 $q(t)-\lambda>0$. 于是 $Q(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ q(t)-\lambda & 0\end{bmatrix}$ 中的元素均为正数. 于是相流

$$\Pi(t;q-\lambda)=I_2+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}Q\left(t_1\right)Q\left(t_2\right)\cdots Q\left(t_n\right)dt_n\cdots dt_2dt_1$$

其中后面所有项的元素都为正数. 因此

$$\Delta(\lambda)=\operatorname{tr}\Pi(1;q-\lambda)>2.$$

9) 设 f 与 g 分别为 $\mathscr{E}(\lambda)$ 和 $\mathscr{E}(\mu)$ 的解, 则有

$$-\ddot f+(q(t)-\lambda)f=0;\quad -\ddot g+(q(t)-\mu)g=0.$$

两式相乘后相减, 得

$$(\lambda-\mu)fg=f\ddot g-\ddot f g=f\ddot g+\dot f\dot g-\dot g\dot f-\ddot f g=\frac{d}{dt}(f\dot g-g\dot f).$$

对上式在 $[0,1]$ 上积分, 得

$$(\lambda-\mu)\langle f,g\rangle=\left[f(t)\dot g(t)-g(t)\dot f(t)\right]\Big|_0^1=g(0)\dot f(0)-f(0)\dot g(0)-g(1)\dot f(1)+f(1)\dot g(1).$$

这即为 (9) 式.

10) 回忆第 9 题已证得：对 $\lambda\neq\mu$, 若 f 是 $\mathscr{E}(\lambda)$ 的解, g 是 $\mathscr{E}(\mu)$ 的解, 则

$$(\lambda-\mu)\langle f,g\rangle=g(0)\dot f(0)-f(0)\dot g(0)-g(1)\dot f(1)+f(1)\dot g(1),$$

其中

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

取

$$f(t)=\phi(t,\lambda),\quad g(t)=\phi(t,\mu),$$

由于

$$\phi(0,\lambda)=1,\quad \dot\phi(0,\lambda)=0;\qquad \phi(0,\mu)=1,\quad \dot\phi(0,\mu)=0,$$

初值项恒为零, 因此

$$(\lambda-\mu)\langle\phi(\cdot,\lambda),\phi(\cdot,\mu)\rangle=-\phi(1,\mu)\dot{\phi}(1,\lambda)+\phi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\mu).$$

两边同时除以 $\lambda-\mu$, 再配项, 得

$$\begin{aligned}\langle\phi(\cdot,\lambda),\phi(\cdot,\mu)\rangle&=\frac{-\phi(1,\mu)\dot{\phi}(1,\lambda)+\phi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)}{\lambda-\mu}+\frac{\phi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\mu)-\phi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)}{\lambda-\mu}\\&=-\phi(1,\lambda)\frac{\dot{\phi}(1,\lambda)-\dot{\phi}(1,\mu)}{\lambda-\mu}+\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\phi(1,\lambda)-\phi(1,\mu)}{\lambda-\mu}.\end{aligned}$$

令 $\mu\to\lambda$, 利用光滑性得到

$$\langle\phi,\phi\rangle=-\phi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda),$$

即公式 (7).

同理, 取

$$f(t)=\psi(t,\lambda),\qquad g(t)=\psi(t,\mu),$$

注意到

$$\psi(0,\lambda)=0,\quad\dot{\psi}(0,\lambda)=1;\qquad\psi(0,\mu)=0,\quad\dot{\psi}(0,\mu)=1,$$

初值项同样为零. 重复上述极限过程, 得到

$$\langle\psi,\psi\rangle=-\psi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda),$$

即公式 (8).

取

$$f(t)=\phi(t,\lambda),\qquad g(t)=\psi(t,\mu).$$

此时有

$$\phi(0,\lambda)=1,\quad\dot{\phi}(0,\lambda)=0;\qquad\psi(0,\mu)=0,\quad\dot{\psi}(0,\mu)=1,$$

因此

$$(\lambda-\mu)\langle\phi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\mu)\rangle=-1-\psi(1,\mu)\dot{\phi}(1,\lambda)+\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\mu).$$

又有

$$(\lambda-\lambda)\langle\phi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\lambda)\rangle=\psi(0,\lambda)\dot{\phi}(0,\lambda)-\phi(0,\lambda)\dot{\psi}(0,\lambda)-\psi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)+\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\lambda)=0,$$

代入上式得

$$(\lambda-\mu)\langle\phi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\mu)\rangle=\psi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)-\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\lambda)-\psi(1,\mu)\dot{\phi}(1,\lambda)+\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\mu).$$

除以 $\lambda-\mu$, 得

$$\langle\phi(\cdot,\lambda),\psi(\cdot,\mu)\rangle=\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\psi(1,\lambda)-\psi(1,\mu)}{\lambda-\mu}-\phi(1,\lambda)\frac{\dot{\psi}(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\mu)}{\lambda-\mu}.$$

$$\langle\phi,\psi\rangle=\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\phi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda),$$

即公式 (9).

交换 f,g 的角色, 取

$$f(t)=\psi(t,\lambda),\qquad g(t)=\phi(t,\mu),$$

重复相同的极限过程, 即得

$$\langle\phi,\psi\rangle=\dot{\psi}(1,\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\psi(1,\lambda)\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda),$$

这就是公式 (10).

11) 由 (5) 式知

$$\Delta(\lambda)=\phi(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda).$$

因此

$$\Delta'(\lambda)=\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda).$$

联立 (7)(8)(9)(10) 式得

$$\begin{aligned}
&-\psi(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle+[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\langle\phi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle\\
&=\psi(-\phi\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}+\dot{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda})+\phi(\dot{\psi}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}-\psi\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda})-\dot{\psi}(\dot{\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\phi\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda})+\dot{\phi}(-\psi\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}+\dot{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda})\\
&=(\phi\dot{\psi}-\psi\dot{\phi})\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\\
&=1\cdot(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)+\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda))\\
&=\Delta'(\lambda).
\end{aligned}$$

这即为 (11) 式.

12) 若 $|\Delta(\lambda)|<2$, 则由 (5) 式知

$$-2<\phi(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda)<2.$$

假设 $\psi(1,\lambda)=0$ 且 $\dot{\phi}(1,\lambda)=0$. 又由 $\det M(\lambda)=1$ 知

$$\mathrm{det}M(\lambda)=\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\lambda)-\psi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)=\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\lambda)=1.$$

上述两式不可能同时满足. 因此假设不成立. 综上所述, $\psi(1,\lambda)\neq 0$ 或者 $\dot{\phi}(1,\lambda)\neq 0$.(实际上是两者都不能为 0)

13) 若 $|\Delta(\lambda)|<2$, 则由 12) 知 $\psi(1,\lambda)\neq 0$ 且 $\dot{\phi}(1,\lambda)\neq 0$. 假设 $\Delta'(\lambda)=0$. 则由 (11) 式知

$$-\psi(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle+[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\langle\phi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle=0.$$

从而

$$\langle\phi,\phi\rangle=\frac{[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\langle\phi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle}{\psi(1,\lambda)}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\langle\phi,\psi\rangle^2\leqslant\langle\phi,\phi\rangle\langle\psi,\psi\rangle=\frac{[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]}{\psi(1,\lambda)}\langle\phi,\psi\rangle\langle\psi,\psi\rangle+\frac{\dot{\phi}(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle^2.$$

于是有以 $\langle\phi,\psi\rangle$ 为变量的二次不等式

$$x^2-\frac{[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle x-\frac{\dot{\phi}(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle^2\leqslant 0,$$

考虑其判别式

$$\begin{aligned}D&=\left(\frac{[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle\right)^2+4\frac{\dot{\phi}(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle^2\\&=\frac{\langle\psi,\psi\rangle^2}{\psi^2(1,\lambda)}\Big((\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda))^2+4\dot{\phi}(1,\lambda)\psi(1,\lambda)\Big)\\&=\frac{\langle\psi,\psi\rangle^2}{\psi^2(1,\lambda)}\Big((\phi(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda))^2-4\Big)\\&<0.\end{aligned}$$

那么

$$x^2-\frac{[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle x-\frac{\dot{\phi}(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}\langle\psi,\psi\rangle^2>0,\quad\forall x\in\mathbb{R},$$

这与前述不等式矛盾. 因此假设不成立, 即 $\Delta'(\lambda)\neq 0$.

注：这个解法我从卢浩天同学那里学来, 解决了我的烦恼.

14) 当 $\Delta(\lambda)=2$ 时.

若 $M(\lambda)=I_2$, 则由 (5) 式知 $\phi(1,\lambda)=1,\dot{\phi}(1,\lambda)=0,\psi(1,\lambda)=0,\dot{\psi}(1,\lambda)=1$. 代入 11) 式得

$$\Delta'(\lambda)=-\psi(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle+[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\langle\phi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle=0.$$

若 $\Delta'(\lambda)=0$, 如果 $\psi(1,\lambda)\neq 0$($\dot{\phi}(1,\lambda)\neq 0$ 将导出同样的结果), 可知 13) 中的判别式 $D=0$. 因此不等式

$$\langle\phi,\psi\rangle^2\leqslant\langle\phi,\phi\rangle\langle\psi,\psi\rangle$$

的等号成立. 由 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件知, 存在常数 $c\in\mathbb{R}$ 使得

$$\psi(t,\lambda)=c\phi(t,\lambda),\quad\forall t\in[0,1].$$

代入初值条件 (4) 式得 $c=0$. 因此 $\psi(t,\lambda)\equiv 0$, 这与 $\det M(\lambda)=1$ 矛盾. 于是 $\psi(1,\lambda)=0$, 同理可知 $\dot{\phi}(1,\lambda)=0$. 再结合

$$\det M(\lambda)=\phi(1,\lambda)\dot{\psi}(1,\lambda)-\psi(1,\lambda)\dot{\phi}(1,\lambda)=1$$
$$\Delta(\lambda)=\phi(1,\lambda)+\dot{\psi}(1,\lambda)=2,$$

可知 $\phi(1,\lambda)=1,\dot{\psi}(1,\lambda)=1$, 即 $M(\lambda)=I_2$. 当 $\Delta(\lambda)=-2$ 时, 同理可证 $M(\lambda)=-I_2\Leftrightarrow\Delta'(\lambda)=0$.

15) 当 $\Delta(\lambda)=2$ 且 $\Delta'(\lambda)=0$ 时, 由 14) 知 $M(\lambda)=I_2$.

对 (11) 式再对 λ 求导一次, 得

$$\begin{aligned}\Delta''(\lambda)=&-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle-\psi(1,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\phi,\phi\rangle\\&+\left[\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\right]\langle\phi,\psi\rangle+[\phi(1,\lambda)-\dot{\psi}(1,\lambda)]\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\phi,\psi\rangle\\&+\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle+\dot{\phi}(1,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\psi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

代入 $\phi(1,\lambda)=1,\dot{\phi}(1,\lambda)=0,\psi(1,\lambda)=0,\dot{\psi}(1,\lambda)=1$, 得

$$\Delta''(\lambda)=-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda)\langle\phi,\phi\rangle+\left[\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda)-\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\right]\langle\phi,\psi\rangle+\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\langle\psi,\psi\rangle.$$

再由 10) 中 4 个式子, 可知

$$\begin{aligned}\langle\phi,\phi\rangle&=-\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\lambda}(1,\lambda),\\\langle\psi,\psi\rangle&=\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda),\\\langle\phi,\psi\rangle&=-\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\lambda}(1,\lambda)\\\langle\phi,\psi\rangle&=\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(1,\lambda).\end{aligned}$$

代入上式, 得

$$\Delta''(\lambda)=-2\langle\phi,\phi\rangle\langle\psi,\psi\rangle+2\langle\phi,\psi\rangle^2<0.$$

其中不能取等的原因与 14) 中相同.

□

15) 说明方程 $\Delta(\lambda)\pm 2=0$ 的每个根至多为二重根. 定义两个集合

$$\begin{cases}\Lambda_+:=\{\lambda\in\mathbb{R}:\Delta(\lambda)-2=0\};\\\Lambda_-:=\{\lambda\in\mathbb{R}:\Delta(\lambda)+2=0\}.\end{cases}$$

已知 Λ_+, Λ_- 均为可数无穷集 (我们直接承认这一点) .

16) 证明 Λ_+, Λ_- 均为离散集, 有最小元, 无聚点.

解： 16) 设 $\lambda_0 \in \Lambda_+$, 则 $\Delta(\lambda_0) = 2$. 若 $\Delta' \neq 0$, 则其一定不为聚点. 若 $\Delta' = 0$, 由 15) 知 $\Delta''(\lambda_0) < 0$. 因此存在 $\delta > 0$ 使得在区间 $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ 上, Δ 除了在 λ_0 处外均不等于 2. 因此 Λ_+ 为离散集, 且 λ_0 非 Λ_+ 的聚点. 同理可证 Λ_- 亦为离散集, 且其元素非聚点. $\square$

由 16) , 我们可以列出 Λ_+ 和 Λ_- 中的元素：

$$\Lambda_+ = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$$

$$\Lambda_- = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots\}$$

其中所有的零点按从小到大的顺序排列, 并记重数（即二重根会重复一次）. 从而当 $n \to \infty$ 时

$$\lambda_n, \mu_n \to \infty.$$

17) 证明 $\lambda_1 < \mu_1$ 且 $\Delta'(\lambda_1) < 0$.

18) 证明 Δ 在 $[\lambda_1, \mu_1]$ 上严格单调下降, 从而

$$\Delta([\lambda_1, \mu_1]) = [-2, 2].$$

19) 证明：$\Delta((\mu_1, \mu_2)) \subset (-\infty, -2)$. 证明：$\lambda_2 > \mu_2$ 且 Δ 在 $[\mu_2, \lambda_2]$ 上严格单调上升, 从而

$$\Delta([\mu_2, \lambda_2]) = [-2, 2].$$

20) 证明如上的零点满足

$$\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_4 \leq \cdots$$

进一步证明：

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 1} [\lambda_{2n-1}, \mu_{2n-1}] \cup \bigcup_{n \geq 1} [\mu_{2n}, \lambda_{2n}].$$

解： 17) 由 8) 式知存在 λ_* 使得当 $\lambda \leq \lambda_*$ 时, $\Delta(\lambda) > 2$. 因此 $\lambda_* < \lambda_1 < \mu_1$. 又由 15) 式知 $\Delta'(\lambda_1) \neq 0$. 若 $\Delta'(\lambda_1) > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得在区间 $(\lambda_1 - \delta, \lambda_1 + \delta)$ 上, Δ 单调递增, 因此在 $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ 上, $\Delta(\lambda) > 2$, 这与 λ_1 为 $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ 的最小根矛盾. 因此 $\Delta'(\lambda_1) < 0$.

18) 由 17) 式知 $\Delta'(\lambda_1) < 0$. 又由 13) 知 $\Delta'(\lambda) \neq 0$ 对任意 $\lambda \in (\lambda_1, \mu_1)$ 成立. 因此 Δ 在 $[\lambda_1, \mu_1]$ 上严格单调下降. 又因为 $\Delta(\mu_1) = -2$, 所以

$$\Delta([\lambda_1, \mu_1]) = [-2, 2].$$

19) $\Delta(\mu_1) = -2$. 若 $\Delta''(\mu_1) = 0$, 则 μ_1 为重根, 自动满足题意. 若 $\Delta'(\mu_1) \neq 0$, 则由 18) 知, $\Delta'(\mu_1) < 0$. 因此 $\Delta'(\mu_2) > 0$, 否则 Δ 在 (μ_1, μ_2) 内还有至少一根, 这与 μ_2 的定义矛盾. 从而

$$\Delta((\mu_1, \mu_2)) \subset (-\infty, -2).$$

由 13) 知 $\Delta'(\lambda) \neq 0$ 对任意 $\lambda \in (\mu_2, \lambda_2)$ 成立. 因此 Δ 在 $[\mu_2, \lambda_2]$ 上严格单调上升. 又因为 $\Delta(\lambda_2) = 2$, 所以

$$\Delta([\mu_2, \lambda_2]) = [-2, 2].$$

20) 由 18) 和 19) 知 $\lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_2$. 同理可证

$$\lambda_3 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_4 \leq \cdots$$

由 6) 知

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \geq 1} [\lambda_{2n-1}, \mu_{2n-1}] \cup \bigcup_{n \geq 1} [\mu_{2n}, \lambda_{2n}].$$

$\square$