ODE
第十二次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 12 月 21 日

习题 1 对初值问题

$$\dot{x} = x; \quad x(0) = 1$$

使用 Picard-Lindelof 定理的证明方法定出一个尽可能大的解的定义区间.

解: 设 $f(t,x) = x$. 假设解的定义区间为 $[-\delta, \delta]$, 其中 $\delta = \min\{\rho, \frac{\eta}{M}\}$, $\eta = e^\rho$, $M = \max_{(t,x)\in R} |f(t,x)| = e^\rho$, 那么 $\delta = \min\{\rho, 1\}$. 取 $\rho = 1$, 则 $\delta = 1$. 于是解的定义区间为 $[-1, 1]$. $\square$

习题 2 考虑初值问题

$$\dot{x} = x^2; \quad x(0) = 1.$$

使用 Picard-Lindelof 定理的证明方法定出一个尽可能大的解的定义区间.

解: 设 $f(t,x) = x^2$. 假设解的定义区间为 $[-\delta, \delta]$, 其中 $\delta = \min\{\rho, \frac{\eta}{M}\}$, $\eta = \frac{1}{1-\rho}$, $M = \max_{(t,x)\in R} |f(t,x)| = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2$, 那么 $\delta = \min\{\rho, 1-\rho\}$. 取 $\rho = \frac{1}{2}$, 则 $\delta = \frac{1}{2}$. 于是解的定义区间为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\square$

习题 3 设 (X, d) 是一个完备度量空间. 设 $\theta_n > 0$ 满足 $\sum_{n=1}^\infty \theta_n < \infty$. 设 $T : X \to X$ 是一个映射满足对任意的 $n \geq 1$ 有

$$d\left(T^n(x), T^n(y)\right) \leq \theta_n d(x,y), \quad \forall x, y \in X.$$

证明 T 有唯一的不动点 x_* , 且对任意的 $x \in X$ 有

$$d\left(T^n(x), x_*\right) \leq \left(\sum_{j=n}^\infty \theta_j\right) d(T(x), x)$$

证明：任取 $x \in X$, 考虑序列 $\{x_n\}$, 其中 $x_n = T^n(x)$. 则对任意的 $m > n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_m\right) &= d\left(T^n(x), T^m(x)\right) \\ &\leq d\left(T^n(x), T^{n+1}(x)\right) + d\left(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)\right) + \cdots + d\left(T^{m-1}(x), T^m(x)\right) \\ &\leq \left(\theta_n + \theta_{n+1} + \cdots + \theta_{m-1}\right) d(T(x), x). \end{aligned} \tag{$*$}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$, 所以当 $n, m \to \infty$, $d\left(x_n, x_m\right) \to 0$, 即 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列. 由于 (X, d) 是完备度量空间, 故存在 $x_* \in X$ 使得 $x_n \to x_*$.

接下来证明 x_* 是 T 的不动点. 由于 T 是连续映射, 所以

$$T(x_*) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*.$$

最后证明不动点的唯一性. 假设存在另一个不动点 y_*, 则有

$$d\left(x_*, y_*\right) = d\left(T^n(x_*), T^n\left(y_*\right)\right) \leq \theta_n d\left(x_*, y_*\right), \quad \forall n \geq 1.$$

由于 $\theta_n \to 0$ 当 $n \to \infty$, 故 $d\left(x_*, y_*\right) = 0$, 即 $x_* = y_*$. 最后, 由 $(*)$ 式, 令 $m \to \infty$, 可得

$$d\left(T^n(x), x_*\right) \leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} \theta_j\right) d(T(x), x).$$

□

习题 4 从 $\varphi \equiv 0$ 开始计算如下 IVP 的 Picard 迭代序列

$$\dot{x} = 2t - 2\sqrt{\max\{0, x\}}, \quad x(0) = 0.$$

该序列收敛吗?

解：设 $f(t, x) = 2t - 2\sqrt{\max\{0, x\}}$ .Picard 迭代序列定义为

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_0^t f\left(s, \varphi_n(s)\right) ds.$$

计算前几项：

- $\varphi_0(t) \equiv 0$
- $\varphi_1(t) = \int_0^t 2s ds = t^2$
- $\varphi_2(t) = \int_0^t \left(2s - 2\sqrt{s^2}\right) ds = 0$
- $\varphi_3(t) = \int_0^t 2s ds = t^2$
- $\varphi_4(t) = \int_0^t \left(2s - 2\sqrt{s^2}\right) ds = 0$

由此可见, Picard 迭代序列在 φ_0 和 φ_1 之间交替, 因此该序列不收敛. $\square$

习题 5 构造一个系统 $\dot{x}=f(t,x)$ 使得其某个初值问题 $\mathcal{I}(\omega)$ 有两个极大解 (ϕ_ω, I_ω) 和 $\left(\hat{\phi}_\omega, \hat{I}_\omega\right)$ 满足 $I_\omega \neq \hat{I}_\omega$.

解: 考虑如下系统:

$$\dot{x}=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sqrt{x}+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$$

及其初值 $\omega=(0,0)$. 下面给出该初值问题的两个极大解:

- $\phi_\omega(t)=0, \quad \forall t\in\mathbb{R}$;
- $\hat{\phi}_\omega(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \text{由隐式方程} t=\int_0^{\hat{\phi}_\omega(t)}\frac{du}{\sqrt{u}+u^2} \text{ 确定}, & t\geq 0 \end{cases}$.

下面验证上述两个解均为极大解且定义区间不同.

解 $\hat{\phi}_\omega$ 的定义区间为 $[0,t_{\max})$, 其中 $t_{\max}=\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}+u^2}<\infty$. 显然, ϕ_ω 和 $\hat{\phi}_\omega$ 在各自定义区间内均为初值问题的极大解, 但是定义区间不同, 即 $I_\omega=\mathbb{R}\neq[0,t_{\max})=\hat{I}_\omega$. $\square$

习题 6 设 $U\subset\mathbb{R}^d$ 是开集, 设 $f\in C\left(U,\mathbb{R}^d\right)$, 设 $\omega=(t_0,x_0)\in U$. 本题的目的是证明 $\mathcal{I}(\omega)$ 的极大解存在.

1) 称 (ϕ, I_ϕ) 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的一个局部解, 若 I_ϕ 是包含 t_0 的开区间, 且 ϕ 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的解. 令

$$\mathcal{S}:=\left\{(\phi,I_\phi):(\phi,I_\phi) \text{ 是}\mathcal{I}(\omega) \text{ 的一个局部解}\right\} .$$

在 $\mathcal{S}$ 上定义如下关系 $\preceq$:

$$(\phi,I_\phi)\preceq(\psi,I_\psi)\Leftrightarrow I_\phi\subset I_\psi; \quad \psi|_{I_\phi}=\phi$$

证明 $\preceq$ 是 $\mathcal{S}$ 上的一个偏序.

2) 设 $\{(\phi_\alpha,I_\alpha):\alpha\in A\}\subset\mathcal{S}$ 是一个链, 即任给 $\alpha,\beta\in A$,

$$(\phi_\alpha,I_\alpha)\preceq(\phi_\beta,I_\beta) \quad \text{或者} \quad (\phi_\beta,I_\beta)\preceq(\phi_\alpha,I_\alpha).$$

证明 $\{(\phi_\alpha,I_\alpha):\alpha\in A\}$ 有上界, 即存在 $(\phi,I_\phi)\in\mathcal{S}$ 使得

$$(\phi_\alpha,I_\alpha)\preceq(\phi,I_\phi), \quad \forall\alpha\in A$$

3) 利用 Zorn 引理证明 $\mathcal{I}(\omega)$ 存在一个极大解.

4) 设 (ϕ_ω,I_ω) 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的一个极大解. 证明对应的极大积分曲线会离开 U 的每个紧子集.

解: 1) 显然, $\preceq$ 满足自反性和反对称性. 下面验证传递性. 设 $(\phi,I_\phi),(\psi,I_\psi),(\eta,I_\eta)\in\mathcal{S}$ 满足 $(\phi,I_\phi)\preceq(\psi,I_\psi)$ 且 $(\psi,I_\psi)\preceq(\eta,I_\eta)$. 则 $I_\phi\subset I_\psi\subset I_\eta$ 且 $\psi|_{I_\phi}=\phi$, $\eta|_{I_\psi}=\psi$. 因此, $\eta|_{I_\phi}=\left(\eta|_{I_\psi}\right)\Big|_{I_\phi}=\psi|_{I_\phi}=\phi$. 故 $(\phi,I_\phi)\preceq(\eta,I_\eta)$. 综上所述,$\preceq$ 是 $\mathcal{S}$ 上的一个偏序.

2) 设 $I_\phi=\bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$, 则 I_ϕ 是包含 t_0 的开区间. 定义 $\phi: I_\phi \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为 $\phi(t)=\phi_\alpha(t)$, 其中 $\alpha \in A$ 满足 $t \in I_\alpha$. 由于 $\{(\phi_\alpha, I_\alpha): \alpha \in A\}$ 是一个链, 故 ϕ 定义良好且连续. 又由于对任意的 $\alpha \in A$, ϕ_α 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的解, 故 ϕ 也是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的解. 因此, $(\phi, I_\phi) \in \mathcal{S}$ 且对任意的 $\alpha \in A$ 有 $(\phi_\alpha, I_\alpha) \preceq (\phi, I_\phi)$.

3) 由 Zorn 引理, $\mathcal{S}$ 中存在极大元, 即存在 $(\phi_\omega, I_\omega) \in \mathcal{S}$ 使得对任意的 $(\psi, I_\psi) \in \mathcal{S}$, 若 $(\phi_\omega, I_\omega) \preceq (\psi, I_\psi)$ 则 $(\phi_\omega, I_\omega)=(\psi, I_\psi)$. 因此, (ϕ_ω, I_ω) 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的一个极大解.

4) 设 $K \subset U$ 是一个紧子集. 假设 ϕ_ω 的积分曲线未离开 K , 则存在 $t_1 \in \partial I_\omega$ 使得 $(t_1, \phi_\omega(t_1)) \in K$. 由于 f 在 U 上连续, 故存在包含 $(t_1, \phi_\omega(t_1))$ 的开邻域 $V \subset U$ 使得 f 在 V 上有界且满足 Lipschitz 条件. 取 $a, b>0$ 使得矩形区域

$$R=\left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d:|t-t_1| \leq a,\|x-\phi_\omega(t_1)\| \leq b\right\} \subset V.$$

设 $M=\max_{(t, x) \in R}\|f(t, x)\|$, L 是 f 在 R 上的 Lipschitz 常数. 取 $h=\min\{a, b / M\}$. 则初值问题

$$\dot{x}=f(t, x); \quad x(t_1)=\phi_\omega(t_1)$$

在区间 $[t_1-h, t_1+h]$ 上存在唯一解 ψ . 定义

$$\tilde{\phi}(t)=\begin{cases}\phi_\omega(t), & t \in I_\omega \\ \psi(t), & t \in[t_1, t_1+h]\end{cases}$$

则 $\left(\tilde{\phi}, I_\omega \cup[t_1, t_1+h]\right)$ 是 $\mathcal{I}(\omega)$ 的一个局部解, 且 $(\phi_\omega, I_\omega) \preceq\left(\tilde{\phi}, I_\omega \cup[t_1, t_1+h]\right)$, 这与 (ϕ_ω, I_ω) 的极大性矛盾. 因此, ϕ_ω 的积分曲线会离开 U 的每个紧子集. $\square$