ODE
第十四次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2026 年 1 月 4 日

习题 1 设 $\phi : [0, T] \to \mathbb{R}$ 连续。设 $a, c \in \mathbb{R}, b > 0$ 。设对任意的 $t \in [0, T]$ 有

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t (b\phi(s) + c)ds$$

证明对任意的 $t \in [0, T]$ 有

$$\phi(t) \leq ae^{bt} + \frac{c}{b}\left(e^{bt} - 1\right).$$

解： 设

$$\psi(t) = a + \int_0^t (b\phi(s) + c)ds.$$

则 ψ 可导，且

$$\psi'(t) = b\phi(t) + c \leq b\psi(t) + c.$$

即

$$\psi'(t) - b\psi(t) \leq c.$$

两边乘以积分因子 e^{-bt} ，得

$$\left(\psi(t)e^{-bt}\right)' \leq ce^{-bt}.$$

对上式从 0 到 t 积分，得

$$\psi(t)e^{-bt} - \psi(0) \leq \int_0^t ce^{-bs}ds.$$

即

$$\psi(t) \leq ae^{bt} + \frac{c}{b}\left(e^{bt} - 1\right).$$

由于 $\phi(t) \le \psi(t)$ ，所以

$$\phi(t) \le ae^{bt} + \frac{c}{b}\left(e^{bt} - 1\right).$$

$\square$

习题 2 考虑自治系统

$$\dot{x} = |y|; \quad \dot{y} = |x|.$$

1) 任取 $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ，证明初值问题 $\mathcal{I}(0, z)$ 的解局部存在且唯一。

2) 记 $\mathcal{I}(0, z)$ 的极大解为 $(\phi(t, z), I_z)$ ，确定解的极大定义区间 I_z 。

3) 确定 $\phi(t, z)$ 的定义域，并证明 ϕ 在其上连续。ϕ 是 C^1 光滑函数吗？说明理由。

4) 证明该自治系统的相流存在。

5) 画出系统的典型极大相曲线。

解： 1) 设 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} |y| \\ |x| \end{pmatrix}.$$

则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续且局部 Lipschitz 连续. 由 Picard-Lindelöf 定理可知，初值问题 $\mathcal{I}(0, z)$ 的解局部存在且唯一.

2) 设 $z = (x_0, y_0)$. 当 $x_0 = y_0 = 0$ 时, 解为恒等于 0 的常函数, 极大定义区间为 $\mathbb{R}$. 当 $x_0 \ne 0$ 或 $y_0 \ne 0$ 时, 分象限讨论.

当 $x_0 \ge 0, y_0 \ge 0$ 时, 解为

$$\phi(t, z) = (x_0 \cosh t + y_0 \sinh t, x_0 \sinh t + y_0 \cosh t),$$

极大定义区间为 $\mathbb{R}$. 第三象限同理得

$$\phi(t, z) = (x_0 \cosh t - y_0 \sinh t, -x_0 \sinh t + y_0 \cosh t),$$

其在有限时间内到达坐标轴, 情况归纳到第二、四象限情形.

当 $x_0 < 0, y_0 \ge 0$ 时, 解为

$$\phi(t, z) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t),$$

第四象限同理得

$$\phi(t, z) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t),$$

这两个象限的情况在有限时间内到达坐标轴, 情况归纳到第一象限情形.

综上所述, 解的极大定义区间为 $\mathbb{R}$.

3) 由 2) 可知, 解的定义域为

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

由于 $f \in C(U, \mathbb{R}^2) \cap Lip_{x,loc}(U)$, ϕ 在 D 上连续.

下面证明 ϕ 不是 C^1 光滑函数. 取 $z = (0,0)$, 则

$$\phi(t, (0,0)) = (0,0).$$

计算 ϕ 在 $(0,0)$ 处的偏导数, 有

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(t,(h,0)) - \phi(t,(0,0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h\cosh t, h\sinh t) - (0,0)}{h} = (\cosh t, \sinh t),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(t,(0,h)) - \phi(t,(0,0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h\sinh t, h\cosh t) - (0,0)}{h} = (\sinh t, \cosh t).$$

若 ϕ 在 $(0,0)$ 处可微, 则有

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(t,(0,0)) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

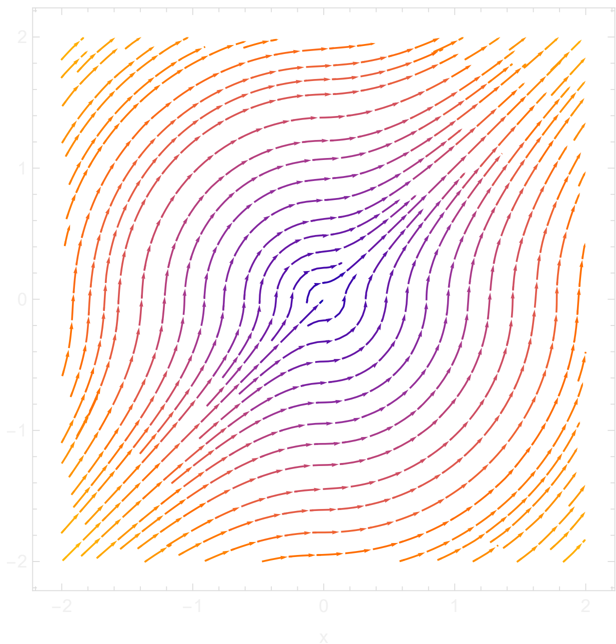
但是

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(t,(-h,-h)) - \phi(t,(0,0))}{\sqrt{2}h} = \lim_{h\to 0} \frac{(he^{-t}, he^{-t}) - (0,0)}{\sqrt{2}h} = \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}\right)$$

这显然与其 Jacobi 矩阵矛盾. 因此, ϕ 在 $(0,0)$ 处不可微, 故 ϕ 不是 C^1 光滑函数.

4) 将 2) 中各象限的解拼接起来为 $\Phi_t(Z)$, 并且可以轻松验证在每个象限 Φ_t 均为同胚映射, 而其在各象限交界处连续, 因此该自治系统的相流存在.

5) 如图: □



注: 2) 的极大定义区间可以类似第十三次作业证明, 即证明解不会在有限区间内达到无穷证明.

习题 3 考虑含参数的自治系统

$$\dot{x} = x^2 + \lambda.$$

记初值问题 $\mathcal{I}(0, z, \lambda)$ 的解为 $\phi(t, z, \lambda)$。求 ϕ 的定义域。

解： 记 $z = x_0$. 当 $\lambda > 0$ 时, 通过分离变量法得到解为

$$\phi(t, x_0, \lambda) = \sqrt{\lambda} \tan\left(\sqrt{\lambda} t + \arctan \frac{x_0}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

定义域为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan \frac{x_0}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan \frac{x_0}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right).$$

当 $\lambda = 0$ 时, 解为

$$\phi(t, x_0, 0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

定义域为

$$\begin{cases} (-\infty, \frac{1}{x_0}), & x_0 > 0; \\ \mathbb{R}, & x_0 = 0; \\ (\frac{1}{x_0}, +\infty), & x_0 < 0. \end{cases}$$

当 $\lambda < 0$ 时, 得到

$$\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \ln \left|\frac{x - \sqrt{-\lambda}}{x + \sqrt{-\lambda}}\right| = t + C.$$

当 $|x_0| = \sqrt{-\lambda}$ 时, 由初值条件可得解为

$$\phi(t, x_0, \lambda) = x_0,$$

定义域为

$$(-\infty, +\infty).$$

当 $|x_0| < \sqrt{-\lambda}$ 时, 由初值条件可得解为

$$\phi(t, x_0, \lambda) = \sqrt{-\lambda} \tanh\left(\sqrt{-\lambda} t + \operatorname{artanh} \frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}\right),$$

定义域为

$$(-\infty, +\infty).$$

当 $|x_0| > \sqrt{-\lambda}$ 时, 由初值条件可得解为

$$\phi(t, x_0, \lambda) = \sqrt{-\lambda} \coth\left(\sqrt{-\lambda} t + \operatorname{arcoth} \frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}\right),$$

当 $x_0 > \sqrt{-\lambda}$ 时, 定义域为

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{arcoth} \frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}\right);$$

当 $x_0 < -\sqrt{-\lambda}$ 时, 定义域为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{arcoth}\frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}, +\infty\right).$$

综上所述, ϕ 的定义域为

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{x_0}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{x_0}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right) \times \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\
&\cup (\frac{1}{x_0}, +\infty) \times (-\infty, 0) \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \times \{0\} \cup (-\infty, \frac{1}{x_0}) \times (0, +\infty) \times \{0\} \\
&\cup \mathbb{R} \times (-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}) \times (-\infty, 0) \\
&\cup \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{arcoth}\frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}\right) \times (\sqrt{-\lambda}, \infty) \times (-\infty, 0) \\
&\cup \left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{arcoth}\frac{x_0}{\sqrt{-\lambda}}, +\infty\right) \times (-\infty, -\sqrt{-\lambda}) \times (-\infty, 0).
\end{aligned}$$

□

注： $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$; $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$.

定义域中的 t 由 x_0, λ 决定, x_0 又由 λ 决定.

习题 4 设 $n \in \mathbb{N}$ 。考虑自治系统

$$\mathcal{A}(n): \quad \dot{x} = x^n \sin x.$$

1) 证明系统 $\mathcal{A}(n)$ 存在相流。

2) $\{\mathcal{A}(n) : n \geq 1\}$ 有几个拓扑共轭等价类？说明理由。

3) 证明系统 $\dot{x} = e^x \sin x$ 存在相流。

4) 是否存在 n 使得 $\mathcal{A}(n)$ 与系统 $\dot{x} = e^x \sin x$ 拓扑共轭？说明理由。

解： 1) 设 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为

$$f_n(x) = x^n \sin x.$$

则 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上连续且局部 Lipschitz 连续, 初值问题 $\mathcal{I}(0, z)$ 的解局部存在且唯一.

注意到对于初值 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $f_n(x) = 0$, 这是系统的平衡点; 对于初值 $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, 此时 $\dot{x} = x^n \sin x$ 保持符号不变, 于是在两个平衡点之间是解是单调的, 从而解在有限时间内不会达到无穷大, 故解的极大定义区间为 $\mathbb{R}$.

从而系统 $\mathcal{A}(n)$ 存在相流.

2) 有两个拓扑共轭等价类. 理由如下:

注意到解的单调性与 n 的奇偶性有关. 并且当 m, n 同奇偶性时, 解的单调性在每个区间 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 上是一致的. 从而可以证明 $A(m)$ 与 $A(n)$ 拓扑共轭. 具体细节如下.

对于同奇偶的 $m, n \in \mathbb{N}$, 设 $A(m), A(n)$ 的相流分别为 ϕ, ψ. 定义同胚 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为

$$F(x) = \begin{cases} \psi_{-T}(\phi_T(x)), & x \in (k\pi, (k+1)\pi); \\ k\pi, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

其中 T 为 $\phi_t(x)$ 到达 $(k+\frac{1}{2})\pi$(或者任意 $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$) 的时间. 由隐函数定理可知 T 是连续函数, 从而 F 也是连续函数. 另外, 由 ϕ 与 ψ 的单调性相同, 知当 $x\to k\pi$ 时, $F(x)\to k\pi$, 从而 F 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 同理 $F^{-1}=\phi_{-T}(\psi_T(x))$ 也是连续函数. 因此 F 同胚映射, 并且

$$
\begin{aligned}
F(\phi_t(x)) &= \psi_{T(\phi_t(x))}\circ\phi_{T(\phi_t(x))}(\phi_t(x)) \\
&= \psi_{t-T(x)}\circ\phi_{T(x)-t}(\phi_t(x)) \\
&= \psi_t(\psi_{-T(x)}\circ\phi_{T(x)}(x)) \\
&= \psi_t(F(x)).
\end{aligned}
$$

因此 F 是 $A(m)$ 到 $A(n)$ 的拓扑共轭.

再证明当 m,n 奇偶性不同, $A(m),A(n)$ 不拓扑共轭. 设 $A(m),A(n)$ 的相流分别为 ϕ,ψ. 不妨 m 为奇数, n 为偶数. 一个重要观察是 $A(m)$ 有一个鞍点 0, 而 $A(n)$ 只有源与汇. 而同胚映射会保持平衡点的类型, 因此 $A(m),A(n)$ 不拓扑共轭.

3) 证明与 1) 完全类似.

4) 存在, 就是所有的偶数. 因为 2) 中的证明实质上只需要光滑性和单调性即可. 而 $e^x\sin x$ 在每个区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上的单调性与 $x^{2n}\sin x$ 相同, 因此它们拓扑共轭. $\square$