陈宏泰

1. (5.7)

(1) 取 $e_1=\frac{1}{\sqrt{u+v}}\vec{r}_u$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{u+v}}\vec{r}_v$

$$\omega_1=\sqrt{u+v}\,du \qquad \omega_2=\sqrt{u+v}\,dv$$

$$d\omega_1=-\frac{v'}{2\sqrt{u+v}}du\wedge dv \qquad d\omega_2=\frac{u'}{2\sqrt{u+v}}du\wedge dv$$

得 $\omega_{12}=\frac{d\omega_1}{\omega_1\wedge\omega_2}\omega_1+\frac{d\omega_2}{\omega_1\wedge\omega_2}\omega_2$

$$=-\frac{v'}{2u+2v}du+\frac{u'}{2u+2v}dv$$

结构方程为 $\begin{cases} d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2 \\ d\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1 \end{cases}$

$$d\omega_{12}=\left(\frac{v''(2u+2v)-(v')^2}{2(u+v)^2}+\frac{u''(2u+2v)-(u')^2}{2(u+v)^2}\right)du\wedge dv.$$

$$=\frac{(u''+v'')(2u+2v)-(u'^2+v'^2)}{2(u+v)^2}du\wedge dv$$

得 Gauss 曲率 $K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}=-\frac{(u''+v'')(2u+2v)-(u'^2+v'^2)}{2(u+v)^3}$

(2) 取 $e_1=2\sqrt{u-v^2}\,\vec{r}_u \qquad e_2=\vec{r}_v+2v\vec{r}_u$

$$\omega_1=\sqrt{E}du+\frac{F}{\sqrt{E}}dv=\frac{du-2v\,dv}{2\sqrt{u-v^2}} \qquad \omega_2=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dv=dv$$

而 $d\omega_1=-\frac{-2v}{2(u-v^2)^{\frac{3}{2}}}dv\wedge du+\frac{2v}{2(u-v^2)^{\frac{3}{2}}}du\wedge dv=0$

$$d\omega_2=0$$

故 $\omega_{12}=0$

$\Rightarrow \quad K=0$

2. 5.8

球面： $\vec{r} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$

赤道 $(u=0)$ 是测地线，于是其单位切向量场是平行的.

对任意切向量 $\vec{v}$，它平移（沿赤道）保持与 $\vec{e}$ 的内积，从而夹角不变.

又由平移的唯一性，$\vec{v_0}$ 平移得到的切向量场 $\vec{v}$ 与 $\vec{e}$ 保持固定夹角 $\theta \in [0, 2\pi)$.

设 $\vec{v_0} = b(\cos\theta\,\vec{r_u} + \sin\theta\,\vec{r_v})$，那么

$$\vec{v}(t) = b(\cos\theta\,\vec{r_u}(t) + \sin\theta\,\vec{r_v}(t)).$$

3. 证明引理1.1.

$\forall s\in[0,l]$，存在包含 s 的小开区间 I_s，使得 I_s 在Gauss映射下的像落在 S^1 的一个半圆内，这样可以在 I_s 上适当定义连续函数 θ，使得

$$\theta(s)=\tilde{\theta}(s)\pmod{2\pi}.$$

因为 $\{I_s\mid s\in[0,l]\}$ 是闭区间的开覆盖，有有限子覆盖 $I_{s_1}, I_{s_2},\cdots, I_{s_n}$

$(s_1<s_2<\cdots<s_n)$.

相应的连续函数记为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$，在区间 $I_{s_k}\cap I_{s_{k+1}}$ 上，

由 $\theta_k=\theta_{k+1}\pmod{2\pi}$ 及 θ_k, θ_{k+1} 均连续，知：存在 $n_k\in\mathbb{Z}$，

$$\theta_k(s)=\theta_{k+1}(s)+2n_k\pi,\quad \forall s\in I_{s_k}\cap I_{s_{k+1}}.$$

所以适当地修改 θ_k 的定义（在 mod 2π 的意义下），可以拼成 $[0,l]$ 上的一个连续函数，使得

$$\theta(s)=\tilde{\theta}(s)\pmod{2\pi},\quad \forall s\in[0,l]$$

若另一个连续函数 $\bar{\theta}(s)$ 也满足要求，则

$$\theta(s)-\bar{\theta}(s)=0\pmod{2\pi},\quad \forall s\in[0,l]$$

因为 $\theta(s)-\bar{\theta}(s)$ 为连续函数，所以存在整数 k 使得

$$\theta(s)-\bar{\theta}(s)=2k\pi,\quad \forall s\in[0,l].$$

#

4. Wirtinger 不等式

设 f 的 Fourier 级数为 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$\int_0^{2\pi}f(t)dt=0\implies a_0=0$$

$$\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt=a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$$

$$\int_0^{2\pi}(f'(t))^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$$

显然 $\int_0^{2\pi}(f'(t))^2dt\geq\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt$

且等号成立当且仅当 $f(t)=a\cos t+b\sin t$.

5. 简单闭曲线的旋转指数

$$i(C)=\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\,ds=\pm 1$$

由 $0<\kappa\leq\frac{1}{R}$，得 $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\,ds\leq\frac{L}{R}$

$$\Rightarrow \quad L\geq 2\pi R$$

取得等号当且仅当 $\kappa(s)\equiv\frac{1}{R}$，此时 C 为圆

6.

$$\kappa(t)=\frac{|\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}=\frac{1}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{r}\,'=(-a\sin t,b\cos t,0)$

$r''=(-a\cos t,-b\sin t,0)$

（在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑）

κ 的极值点即为 $\underbrace{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}_{\varphi(t)}$ 的极值点

$$\varphi'(t)=a^2\sin 2t-b^2\sin 2t=0$$

$$a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$$

7. $\vec{t}\,''\parallel\vec{t}\Leftrightarrow\vec{t}\,''\perp\vec{n}\Leftrightarrow\langle\vec{t}\,'',\vec{n}\rangle=0$

又 $\vec{t}\,''=(\vec{t}\,')'=(\kappa\vec{n})'=\kappa'\vec{n}+\kappa\vec{n}\,'$

故 $\Leftrightarrow \kappa'=0$ 即顶点处.

结论由四顶点定理立得.