

群与 Galois 理论

作业 5

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 28 日

目录

1 A. 分式域的推广：局部化	2
2 B. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 与 Pell 方程, $d \neq \square, d > 0$	13
3 练习题	21

A. 分式域的推广：局部化

在此问题中，字母 A 表示是某个给定的交换环，

A1) 给定子集 $S \subset A$ ，如果

- $1 \in S$ ；
- 对任意的 $s_1, s_2 \in S$ ，有 $s_1 \cdot s_2 \in S$ 。

我们就称 S 是乘性子集。证明，以下两个集合是乘性子集： $\{1, f, f^2, \dots\}$ ，其中， $f \in A; A - \mathfrak{p}$ ，其中， \mathfrak{p} 是素理想（特别的，如果 A 是整环， $A - \{0\}$ 是乘性子集）。

证明：设 $S_1 = \{1, f, f^2, \dots\}$ ，则 $1 \in S_1$ 显然成立。对于任意的 $s_1, s_2 \in S_1$ ，存在非负整数 m, n ，使得 $s_1 = f^m, s_2 = f^n$ 。因此， $s_1 \cdot s_2 = f^{m+n} \in S_1$ 。所以， S_1 是乘性子集。

设 $S_2 = A - \mathfrak{p}$ ，则 $1 \in S_2$ 显然成立，否则 $\mathfrak{p} = A$ ，这与 \mathfrak{p} 为素理想矛盾。对于任意的 $s_1, s_2 \in S_2$ ，如果 $s_1 \cdot s_2 \notin S_2$ ，则 $s_1 \cdot s_2 \in \mathfrak{p}$ 。由于 \mathfrak{p} 是素理想，所以 $s_1 \in \mathfrak{p}$ 或 $s_2 \in \mathfrak{p}$ ，这与 $s_1, s_2 \in S_2$ 矛盾。因此， $s_1 \cdot s_2 \in S_2$ 。所以， S_2 是乘性子集。□

A2) 我们在 $A \times S$ 上定义等价关系： $(a, s) \sim (a', s')$ 指的是存在 $t \in S$ ，使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$ 。证明，以上给出了 $A \times S$ 上的一个等价关系。令 $A_S = A \times S / \sim$ ，我们用 $\frac{a}{s}$ 表示 (a, s) 所在的等价类。证明，对任意的 $s' \in S$ ，我们有 $\frac{s'a}{s's} = \frac{a}{s}$ 。

证明：设 $(a, s), (a', s'), (a'', s'') \in A \times S$ 。

(自反性) 取 $t = 1 \in S$ ，则 $as \cdot t = as \cdot t$ ，所以 $(a, s) \sim (a, s)$ 。

(对称性) 如果 $(a, s) \sim (a', s')$ ，则存在 $t \in S$ ，使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$ 。自然有 $a's \cdot t = as' \cdot t$ ，因此， $(a', s') \sim (a, s)$ 。

(传递性) 如果 $(a, s) \sim (a', s')$ 且 $(a', s') \sim (a'', s'')$ ，则存在 $t_1, t_2 \in S$ ，使得 $as' \cdot t_1 = a's \cdot t_1$ 且 $a's'' \cdot t_2 = a''s' \cdot t_2$ 。对前式两边同乘 $s'' \cdot t_2$ ，对后式两边同乘 $s \cdot t_1$ ，由 A 为交换环有

$$as's'' \cdot (t_1 t_2) = a'ss'' \cdot (t_1 t_2), \quad a's''s \cdot (t_1 t_2) = a''s's \cdot (t_1 t_2).$$

从而有

$$as'' \cdot (s't_1 t_2) = a'ss'' \cdot (t_1 t_2) = a's''s \cdot (t_1 t_2) = a''s \cdot (s't_1 t_2)$$

由 S 为乘性子群，知 $s't_1 t_2 \in S$ ，从而有 $(a, s) \sim (a'', s'')$ 。

综上， \sim 是 $A \times S$ 上的等价关系。

下面证明对于任意的 $s' \in S$ ，有 $\frac{s'a}{s's} = \frac{a}{s}$ 。只需证明 $(s'a, s's) \sim (a, s)$ 即可。对于任意的 $s' \in S$ ，

$$(s'a)s \cdot 1 = s'as = as's \cdot 1,$$

$1 \in S$ ，所以 $(s'a, s's) \sim (a, s)$ 。□

注：要求 $s' \in S$ 是保证 $s's \in S$. 因此就算 $s' \notin S$, 但只要 $s's \in S$ 也能保证有 $(s'a, s's) \sim (a, s)$.

A3) 我们在 A_S 上定义如下的加法和乘法：

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

通过验证以上是良定义的来证明, A_S 在以上运算下成为一个环并指出它的乘法和加法单位元.

进一步, 我们还有自然的环同态:

$$\iota : A \rightarrow A_S, a \mapsto \frac{a}{1}.$$

我们把 A_S 称作是 A 对乘性子集 S 的局部化.

证明：设 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 且 $\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$.

(加法良定义) 则存在 $t_1, t_2 \in S$, 使得 $as' \cdot t_1 = a's \cdot t_1$ 且 $bt' \cdot t_2 = b't \cdot t_2$. 对前式两边同乘 $tt't_2$, 后式两边同乘 $ss't_1$, 得

$$ats't' \cdot (t_1t_2) = a't'st \cdot (t_1t_2), \quad bts't' \cdot (t_1t_2) = b's't \cdot (t_1t_2).$$

将这两式相加, 即有

$$(at + bs)s't' \cdot (t_1t_2) = (a't' + b's')st \cdot (t_1t_2).$$

又由 S 为乘性子集, 知 $t_1t_2 \in S$. 因此, $(at + bs, st) \sim (a't' + b's', s't')$ 说明 $\frac{at+bs}{st} = \frac{a't'+b's'}{s't'}$, 从而加法良定义.

(乘法良定义) 则存在 $t_1, t_2 \in S$, 使得 $as' \cdot t_1 = a's \cdot t_1$ 且 $bt' \cdot t_2 = b't \cdot t_2$. 将上面两式相乘, 有

$$abs't' \cdot (t_1t_2) = a'b'st \cdot (t_1t_2).$$

又由 S 为乘性子集, 知 $t_1t_2 \in S$. 因此, $(ab, st) \sim (a'b', s't')$ 说明 $\frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}$, 从而乘法良定义.

综上, A_S 在以上运算下良定义. 下面验证环的公理.

(加法交换律) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} = \frac{bs + at}{ts} = \frac{b}{t} + \frac{a}{s}.$$

(加法结合律) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in A_S$, 有

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t} \right) + \frac{c}{u} = \frac{(at + bs)u + cst}{stu} = \frac{aut + bus + cst}{stu} = \frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u} \right).$$

(加法单位元) 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot s}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}.$$

(加法逆元) 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{as - as}{ss} = \frac{0}{1}.$$

(乘法交换律) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} = \frac{ba}{ts} = \frac{b}{t} \cdot \frac{a}{s}.$$

(乘法结合律) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in A_S$, 有

$$\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \frac{abc}{stu} = \frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right).$$

(乘法单位元) 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{s \cdot 1} = \frac{a}{s}.$$

(分配律) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bu + ct}{tu} = \frac{a(bu + ct)}{stu} = \frac{abu}{stu} + \frac{act}{stu} = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} + \frac{a}{s} \cdot \frac{c}{u}.$$

综上, A_S 在以上运算下成为一个环. 加法单位元为 $\frac{0}{1}$, 乘法单位元为 $\frac{1}{1}$.

下面验证 $\iota: A \rightarrow A_S, a \mapsto \frac{a}{1}$ 为环同态. 对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$\iota(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \iota(a) + \iota(b),$$

$$\iota(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \iota(a) \cdot \iota(b).$$

因此, ι 为环同态. □

A4) 令 $S_0 = \{a \in A \mid ab = 0 \Leftrightarrow b = 0\}$. 证明, S_0 是乘性子集. 我们称 A_{S_0} 为 A 的全分式环.

进一步证明 $\iota: A \rightarrow A_{S_0}$ 是单射并且此时 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 当且仅当 $as' = a's$.

证明: 设 $S_0 = \{a \in A \mid ab = 0 \Leftrightarrow b = 0\}$.

(乘性子集) 显然 $1 \in S_0$. 对于任意的 $s_1, s_2 \in S_0$, 如果 $s_1 s_2 b = 0$, 则 $s_1(s_2 b) = 0$. 由于 $s_1 \in S_0$, 所以 $s_2 b = 0$. 又由于 $s_2 \in S_0$, 所以 $b = 0$. 因此, $s_1 s_2 \in S_0$. 所以, S_0 是乘性子集.

(单射) 设 $\iota(a) = \iota(a')$, 则 $\frac{a}{1} = \frac{a'}{1}$. 根据等价关系的定义, 存在 $t \in S_0$, 使得 $a \cdot 1 \cdot t = a' \cdot 1 \cdot t$, 即 $at = a't$. 因为 $t \in S_0$, 所以 $a = a'$. 因此, ι 为单射.

(充要条件) 如果 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, 则存在 $t \in S_0$, 使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 因为 $t \in S_0$, 所以 $as' = a's$. 反之, 如果 $as' = a's$, 则对于任意的 $t \in S_0$, 有 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 因此, $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$.

综上, $\iota: A \rightarrow A_{S_0}$ 是单射并且 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 当且仅当 $as' = a's$. □

A5) 给定乘性子集 $S \subset A$. 证明, $\text{Ker}(\iota) = \{a \in A \mid \text{存在 } s \in S, \text{ 使得 } as = 0\}$. 进一步证明, ι 为单射当且仅当 $S \subset S_0$.

证明: 设 $K = \{a \in A \mid \text{存在 } s \in S, \text{ 使得 } as = 0\}$.

($\text{Ker}(\iota)$ 的刻画) 如果 $a \in \text{Ker}(\iota)$, 则 $\iota(a) = \frac{a}{1} = \frac{0}{1}$. 根据等价关系的定义, 存在 $t \in S$, 使得 $a \cdot 1 \cdot t = 0 \cdot 1 \cdot t$, 即 $at = 0$. 因此, $a \in K$. 反之, 如果 $a \in K$, 则存在 $s \in S$, 使得 $as = 0$.

对于任意的 $t \in S$, 有 $as \cdot t = 0 \cdot t$, 即 $a \cdot 1 \cdot (st) = 0 \cdot 1 \cdot (st)$. 因为 $st \in S$, 所以 $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$, 即 $a \in \text{Ker}(\iota)$. 因此, $\text{Ker}(\iota) = K$.

(单射条件) 如果 ι 为单射, 则 $\text{Ker}(\iota) = \{0\}$. 根据上面的等式, 对于任意的 $s \in S$, 如果 $as = 0$, 则 $a = 0$. 因此, $s \in S_0$. 所以, $S \subset S_0$. 反之, 如果 $S \subset S_0$, 则对于任意的 $a \in \text{Ker}(\iota)$, 存在 $s \in S$, 使得 $as = 0$. 因为 $s \in S_0$, 所以 $a = 0$. 因此, $\text{Ker}(\iota) = \{0\}$, 即 ι 为单射.

综上, $\text{Ker}(\iota) = \{a \in A \mid \text{存在 } s \in S, \text{ 使得 } as = 0\}$ 并且 ι 为单射当且仅当 $S \subset S_0$. \square

A6) (局部化的泛性质) A, S, A_S 和 $\iota : A \rightarrow A_S$ 如上述. 试验证, $\iota(S) \subset (A_S)^\times$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \iota & \nearrow \psi & \\ A_S & & \end{array}$$

证明, 对任意的环 B 和环同态 $\varphi : A \rightarrow B$, 如果 $\varphi(S) \subset B^\times$, 则存在唯一的环同态 $\psi : A_S \rightarrow B$, 使得 $\psi \circ \iota = \varphi$.

证明: (包含关系) 对于任意的 $s \in S$, 有

$$\iota(s) = \frac{s}{1}.$$

设 $\frac{1}{s}$ 为 $\frac{s}{1}$ 的乘法逆元, 则有

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s \cdot 1}{1 \cdot s} = \frac{1}{1}.$$

因此, $\iota(s) \in (A_S)^\times$. 所以, $\iota(S) \subset (A_S)^\times$.

(存在性) 定义映射 $\psi : A_S \rightarrow B$, 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 令

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(s)^{-1}.$$

下面验证 ψ 为环同态且 $\psi \circ \iota = \varphi$.

(良定义) 如果 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, 则存在 $t \in S$, 使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 应用 φ , 有

$$\varphi(a)\varphi(s')\varphi(t) = \varphi(a')\varphi(s)\varphi(t).$$

由于 $\varphi(t), \varphi(s), \varphi(s') \in B^\times$, 所以

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(a')\varphi(s)^{-1} = \psi\left(\frac{a'}{s'}\right).$$

因此, ψ 良定义.

(环同态) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) &= \psi\left(\frac{at + bs}{st}\right) = \varphi(at + bs) \cdot \varphi(st)^{-1} \\ &= (\varphi(a)\varphi(t) + \varphi(b)\varphi(s)) \cdot (\varphi(s)\varphi(t))^{-1} \\ &= \varphi(a)\varphi(s)^{-1} + \varphi(b)\varphi(t)^{-1} = \psi\left(\frac{a}{s}\right) + \psi\left(\frac{b}{t}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) &= \psi\left(\frac{ab}{st}\right) = \varphi(ab) \cdot \varphi(st)^{-1} \\
&= (\varphi(a)\varphi(b)) \cdot (\varphi(s)\varphi(t))^{-1} \\
&= \varphi(a)\varphi(s)^{-1} \cdot \varphi(b)\varphi(t)^{-1} = \psi\left(\frac{a}{s}\right) \cdot \psi\left(\frac{b}{t}\right).
\end{aligned}$$

因此, ψ 为环同态.

对于任意的 $a \in A$, 有

$$\psi(\iota(a)) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(1)^{-1} = \varphi(a) \cdot 1 = \varphi(a).$$

因此, $\psi \circ \iota = \varphi$.

(唯一性) 如果存在环同态 $\psi' : A_S \rightarrow B$, 使得 $\psi' \circ \iota = \varphi$, 则对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 有

$$\psi'\left(\frac{a}{s}\right) = \psi'(\iota(a) \cdot \iota(s)^{-1}) = \psi'(\iota(a)) \cdot \psi'(\iota(s))^{-1} = \varphi(a) \cdot \varphi(s)^{-1} = \psi\left(\frac{a}{s}\right).$$

因此, $\psi' = \psi$. \square

A7) A, S, A_S 和 $\iota : A \rightarrow A_S$ 如上述, $\widehat{S} = \{a \in A \mid \text{存在 } b \in A, \text{ 使得 } ab \in S\}$. 证明, $\widehat{S} = \iota^{-1}((A_S)^\times)$. 进一步证明环同构 $A_S \xrightarrow{\sim} A_{\widehat{S}}$, 其中, $\frac{a}{1}$ 的像是 $\frac{a}{1}$.

证明: 设 $\widehat{S} = \{a \in A \mid \text{存在 } b \in A, \text{ 使得 } ab \in S\}$.

(\widehat{S} 的刻画) 如果 $a \in \widehat{S}$, 则存在 $b \in A$, 使得 $ab \in S$. 设 $\iota(a) = \frac{a}{1}$, 则

$$\iota(a) \cdot \iota(b) = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}.$$

因为 $ab \in S$, 所以 $\frac{ab}{1} \in (A_S)^\times$. 因此,

$$\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{b} \left(\frac{1}{ab}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{1},$$

所以 $\iota(a) \in (A_S)^\times$, 即 $a \in \iota^{-1}((A_S)^\times)$. 反之, 如果 $a \in \iota^{-1}((A_S)^\times)$, 则 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in (A_S)^\times$. 设 $\frac{c}{d}$ 为 $\frac{a}{1}$ 的乘法逆元, 则有

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = \frac{1}{1}.$$

根据等价关系的定义, 存在 $t \in S$, 使得 $ac \cdot t = d \cdot t$. 因为 S 为乘性子集, 所以 $dt \in S$. 因此, $a(ct) = dt \in S$, 即 $a \in \widehat{S}$. 综上, $\widehat{S} = \iota^{-1}((A_S)^\times)$.

再证明环同构 $A_S \xrightarrow{\sim} A_{\widehat{S}}$. 定义映射 $\phi : A_S \rightarrow A_{\widehat{S}}$, 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 令

$$\phi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{s},$$

其中右边的分式表示在 $A_{\widehat{S}}$ 中. 下面验证 ϕ 为环同构.

(良定义) 如果 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, 则存在 $t \in S$, 使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 因为 $S \subset \widehat{S}$, 所以 $t \in \widehat{S}$. 因此, $(a, s) \sim (a', s')$ 在 $A_{\widehat{S}}$ 中亦成立, 即 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 在 $A_{\widehat{S}}$ 中成立. 所以, ϕ 良定义.

(环同态) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) &= \phi\left(\frac{at+bs}{st}\right) = \frac{at+bs}{st} = \frac{a}{s} + \frac{b}{t}, \\ \phi\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) &= \phi\left(\frac{ab}{st}\right) = \frac{ab}{st} = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}.\end{aligned}$$

因此, ϕ 为环同态.

(双射性) 如果 $\phi\left(\frac{a}{s}\right) = \phi\left(\frac{a'}{s'}\right)$, 则 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 在 $A_{\widehat{S}}$ 中成立. 根据等价关系的定义, 存在 $t \in \widehat{S}$, 使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 由 $t \in \widehat{S}$, 存在 $c \in A$, 使得 $tc \in S$. 因此, $as' \cdot (tc) = a's \cdot (tc)$, 即 $(as', ss') \sim (a's', ss')$ 在 A_S 中成立, 即 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ 在 A_S 中成立. 所以, ϕ 为单射. 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_{\widehat{S}}$, 因为 $s \in \widehat{S}$, 存在 $c \in A$, 使得 $sc \in S$. 因此, 有

$$\phi\left(\frac{ac}{sc}\right) = \frac{ac}{sc} = \frac{a}{s}.$$

所以, ϕ 为满射. 综上, ϕ 为环同构. \square

A8) A 和 B 是交换环, $\varphi : A \rightarrow B$ 是环同态, $S \subset A$ 和 $T \subset B$ 是乘性子集并且 $\varphi(S) \subset T$. 证明, 存在唯一的环同态 $\psi : A_S \rightarrow B_T$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccc}A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ A_S & \dashrightarrow_{\psi} & B_T\end{array}$$

证明: 设 A, B, S, T, φ 如题设. 定义映射 $\psi : A_S \rightarrow B_T$, 对于任意的 $\frac{a}{s} \in A_S$, 令

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}.$$

下面验证 ψ 为环同态且图表交换.

(良定义) 如果 $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, 则存在 $t \in S$, 使得 $as' \cdot t = a's \cdot t$. 应用 φ , 有

$$\varphi(a)\varphi(s')\varphi(t) = \varphi(a')\varphi(s)\varphi(t).$$

由于 $\varphi(t) \in T$, 所以

$$\psi\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} = \frac{\varphi(a')}{\varphi(s')} = \psi\left(\frac{a'}{s'}\right).$$

因此, ψ 良定义.

(环同态) 对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) &= \psi\left(\frac{at+bs}{st}\right) = \frac{\varphi(at+bs)}{\varphi(st)} \\ &= \frac{\varphi(a)\varphi(t) + \varphi(b)\varphi(s)}{\varphi(s)\varphi(t)} \\ &= \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} + \frac{\varphi(b)}{\varphi(t)} = \psi\left(\frac{a}{s}\right) + \psi\left(\frac{b}{t}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) &= \psi\left(\frac{ab}{st}\right) = \frac{\varphi(ab)}{\varphi(st)} \\
&= \frac{\varphi(a)\varphi(b)}{\varphi(s)\varphi(t)} \\
&= \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \cdot \frac{\varphi(b)}{\varphi(t)} = \psi\left(\frac{a}{s}\right) \cdot \psi\left(\frac{b}{t}\right).
\end{aligned}$$

因此, ψ 为环同态. 对于任意的 $a \in A$, 有

$$\psi(\iota_A(a)) = \psi\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(1)} = \frac{\varphi(a)}{1} = \iota_B(\varphi(a)).$$

因此, 图表交换. \square

A9) (理想与局部化) $I \subset A$ 是理想, 令 I_S 为 $\iota(I)$ 在 A_S 中生成的理想.

- 证明, $I_S = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$. 进一步证明, $I_S = A_S$ 当且仅当 $S \cap I \neq \emptyset$.
- $J \subset A_S$ 是理想, 证明, $(\iota^{-1}(J))_S = J$.

证明: 设 $I \subset A$ 为理想, I_S 为 $\iota(I)$ 在 A_S 中生成的理想.

(理想的刻画) 设 $K = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$.

先证明 $I_S \subset K$. 对于任意的 $a \in I$, 有 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in I_S$. 对于任意的 $\frac{b}{t} \in A_S$, 有

$$\frac{b}{t} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ba}{t}.$$

因为 I 为理想, 所以 $ba \in I$. 因此, $\frac{ba}{t} \in K$. 由理想的定义, 知 $I_S \subset K$.

再证明 $K \subset I_S$. 对于任意的 $\frac{a}{s} \in K$, 有 $a \in I$. 因为 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in I_S$, 所以

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in I_S.$$

因此, $K \subset I_S$.

综上, $I_S = K = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S \right\}$.

进一步证明, $I_S = A_S$ 当且仅当 $S \cap I \neq \emptyset$.

如果 $I_S = A_S$, 则 $1_{A_S} = \frac{1}{1} \in I_S$. 根据上面的等式, 存在 $a \in I, s \in S$, 使得 $\frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. 根据等价关系的定义, 存在 $t \in S$, 使得 $a \cdot 1 \cdot t = 1 \cdot s \cdot t$, 即 $at = st$. 因为 $t, s \in S$, 所以 $st \in S$. 由因为 $a \in I$, 所以 $at \in I$. 因此, $at = st \in S \cap I$. 反之, 如果 $S \cap I \neq \emptyset$, 则存在 $s \in S \cap I$. 对于任意的 $\frac{a}{t} \in A_S$, 有

$$\frac{a}{t} = \frac{as}{ts}.$$

因为 $s \in I$, 所以 $as \in I$. 因此, $\frac{as}{ts} \in I_S$. 所以, $A_S \subset I_S$. 由理想的定义, 知 $I_S \subset A_S$, 从而 $I_S = A_S$.

综上, $I_S = A_S$ 当且仅当 $S \cap I \neq \emptyset$.

设 $J \subset A_S$ 为理想. 下面证明 $(\iota^{-1}(J))_S = J$.

先证明 $(\iota^{-1}(J))_S \subset J$. 对于任意的 $\frac{a}{s} \in (\iota^{-1}(J))_S$, 有 $a \in \iota^{-1}(J)$, 即 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in J$. 因为 J 为理想, 所以

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in J.$$

因此, $(\iota^{-1}(J))_S \subset J$.

再证明 $J \subset (\iota^{-1}(J))_S$. 对于任意的 $\frac{a}{s} \in J$, 有

$$\iota(a) = \frac{a}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1} \in J,$$

即 $a \in \iota^{-1}(J)$. 因此,

$$\frac{a}{s} \in (\iota^{-1}(J))_S.$$

所以, $J \subset (\iota^{-1}(J))_S$

综上, $(\iota^{-1}(J))_S = J$. □

A10) (素理想与局部化) 我们证明 A_S 中的素理想与 A 中与 S 不交的素理想一一对应.

- $\mathfrak{p} \subset A$ 是素理想并且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, 证明, \mathfrak{p}_S 为 A_S 中的素理想.

- $\mathfrak{q} \subset A_S$ 是素理想, 证明, $\iota^{-1}\mathfrak{q}$ 是 A 中唯一满足 $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{q}$ 的素理想.

证明: 设 $\mathfrak{p} \subset A$ 为素理想且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. 由 A9) 知, \mathfrak{p}_S 为 $\iota(\mathfrak{p})$ 在 A_S 中生成的理想且 $\mathfrak{p}_S = \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in S\}$, 下面证明 \mathfrak{p}_S 为素理想.

对于任意的 $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_S$, 如果 $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \in \mathfrak{p}_S$, 则存在 $u \in S$, 使得 $ab \cdot u \in \mathfrak{p}$ ($\frac{ab}{st} = \frac{abu}{stu} \in \mathfrak{p}_S$).

因为 \mathfrak{p} 为素理想, 并且 $u \notin \mathfrak{p}$ ($u \in S$ 且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$), 所以 $ab \in \mathfrak{p}$. 所以 $a \in \mathfrak{p}$ 或 $b \in \mathfrak{p}$. 因此, $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}_S$ 或 $\frac{b}{t} \in \mathfrak{p}_S$. 所以, \mathfrak{p}_S 为素理想.

设 $\mathfrak{q} \subset A_S$ 为素理想. 下面证明 $\iota^{-1}(\mathfrak{q})$ 为 A 中唯一满足 $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{q}$ 的素理想.

先证明 $\iota^{-1}(\mathfrak{q})$ 为素理想. 对于任意的 $a, b \in A$, 如果 $ab \in \iota^{-1}(\mathfrak{q})$, 则 $\iota(ab) = \frac{ab}{1} \in \mathfrak{q}$. 因为 \mathfrak{q} 为素理想, 所以 $\frac{a}{1} \in \mathfrak{q}$ 或 $\frac{b}{1} \in \mathfrak{q}$. 因此, $a \in \iota^{-1}(\mathfrak{q})$ 或 $b \in \iota^{-1}(\mathfrak{q})$. 所以, $\iota^{-1}(\mathfrak{q})$ 为素理想.

再证明 $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{q}$ 的唯一性. 如果存在素理想 $\mathfrak{p}' \subset A$, 使得 $\mathfrak{p}'_S = \mathfrak{q}$, 则对于任意的 $a \in \iota^{-1}(\mathfrak{q})$, 有 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{q} = \mathfrak{p}'_S$. 根据上面的等式, 存在 $s \in S$, 使得 $as \in \mathfrak{p}'$. 因为 $s \notin \mathfrak{p}'$ (否则 $\mathfrak{p}'_S = A_S$), 所以 $a \in \mathfrak{p}'$. 因此, $\iota^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}'$. 对于任意的 $a \in \mathfrak{p}'$, 有 $\iota(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{p}'_S = \mathfrak{q}$. 因此, $a \in \iota^{-1}(\mathfrak{q})$. 所以, $\mathfrak{p}' \subset \iota^{-1}(\mathfrak{q})$. 综上, $\iota^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}'$.

综上, $\iota^{-1}(\mathfrak{q})$ 为 A 中唯一满足 $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{q}$ 的素理想. □

A11) $\mathfrak{p} \subset A$ 是素理想, $S = A - \mathfrak{p}$, 令 $A_{\mathfrak{p}} = A_S$. 证明, $A_{\mathfrak{p}}$ 是局部环 (即只有一个极大理想的环) 并确定它的极大理想.

证明: 根据 A10), $A_{\mathfrak{p}}$ 中的素理想与 A 中与 S 不交的素理想一一对应. 因为 $S = A - \mathfrak{p}$, 所以与 S 不交的素理想只有 \mathfrak{p} 一个. 因此, $A_{\mathfrak{p}}$ 中只有一个素理想, 即 \mathfrak{p}_S . 又极大理想都是素理想;

而对于 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的任意理想 $I \neq A_{\mathfrak{p}}$, 存在极大理想 $\mathfrak{m} \neq A_{\mathfrak{p}}$ 使得 $I \subset \mathfrak{m}$. 由于 $A_{\mathfrak{p}}$ 中只有一个极大理想 \mathfrak{p}_S .

由此可知, \mathfrak{p}_S 为 $A_{\mathfrak{p}}$ 的唯一极大理想. 所以, $A_{\mathfrak{p}}$ 为局部环. \square

A12) (局部化与商可交换) $I \subset A$ 是理想, $S \subset A$ 是乘性子集, $\pi : A \rightarrow A/I$ 是商映射, $\pi(S) \subset A/I$ 也是乘性子集. 证明, 存在自然的环同构

$$(A/I)_{\pi(S)} \xrightarrow{\sim} A_S/I_S.$$

证明: 定义映射 $\phi : (A/I)_{\pi(S)} \rightarrow A_S/I_S$, 对于任意的 $\frac{a+I}{s+I} \in (A/I)_{\pi(S)}$, 令

$$\phi\left(\frac{a+I}{s+I}\right) = \frac{a}{s} + I_S.$$

下面验证 ϕ 为环同构.

(良定义) 如果 $\frac{a+I}{s+I} = \frac{a'+I}{s'+I}$, 则存在 $t+I \in \pi(S)$, 使得

$$(a+I)(s'+I)(t+I) = (a'+I)(s+I)(t+I),$$

由此得到 $(as' - a's)t \in I$, 即存在 $i \in I$, s.t.

$$(as' - a's)t = i,$$

其中 $t \in S$. 由此可知,

$$\frac{a}{s} - \frac{a'}{s'} = \frac{as' - a's}{ss'} = \frac{i}{ss't} \in I_S,$$

从而 $\frac{a}{s} + I_S = \frac{a'}{s'} + I_S$. 所以, ϕ 良定义.

(环同态) 对于任意的 $\frac{a+I}{s+I}, \frac{b+I}{t+I} \in (A/I)_{\pi(S)}$, 有

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{a+I}{s+I} + \frac{b+I}{t+I}\right) &= \phi\left(\frac{(a+I)(t+I) + (b+I)(s+I)}{(s+I)(t+I)}\right) \\ &= \frac{at + bs}{st} + I_S \\ &= \frac{a}{s} + I_S + \frac{b}{t} + I_S = \phi\left(\frac{a+I}{s+I}\right) + \phi\left(\frac{b+I}{t+I}\right), \\ \phi\left(\frac{a+I}{s+I} \cdot \frac{b+I}{t+I}\right) &= \phi\left(\frac{(a+I)(b+I)}{(s+I)(t+I)}\right) \\ &= \frac{ab}{st} + I_S \\ &= \left(\frac{a}{s} + I_S\right) \cdot \left(\frac{b}{t} + I_S\right) = \phi\left(\frac{a+I}{s+I}\right) \cdot \phi\left(\frac{b+I}{t+I}\right). \end{aligned}$$

因此, ϕ 为环同态.

(双射性) 如果 $\phi\left(\frac{a+I}{s+I}\right) = \phi\left(\frac{a'+I}{s'+I}\right)$, 则

$$\frac{a}{s} + I_S = \frac{a'}{s'} + I_S.$$

根据商理想的定义，存在 $t \in S$ ，使得

$$(as' - a's)t \in I.$$

因为 $t \in S$ ，所以 $st \in S$. 因此，有

$$(as' - a's)t = i$$

对某个 $i \in I$. 由此可知，

$$(a + I)(s' + I)(t + I) = (a' + I)(s + I)(t + I).$$

因为 $t + I \in \pi(S)$ ，所以

$$\frac{a + I}{s + I} = \frac{a' + I}{s' + I}.$$

所以， ϕ 为单射. 对于任意的 $\frac{a}{s} + I_S \in A_S/I_S$ ，有

$$\phi\left(\frac{a + I}{s + I}\right) = \frac{a}{s} + I_S.$$

所以， ϕ 为满射.

综上， ϕ 为环同构. □

A13) 给定 $f \in A$, $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ ，记 $A_f = A_S$. 证明，我们有环同构

$$A[X]/(1 - fX) \xrightarrow{\cong} A_f, \quad X \mapsto \frac{1}{f}.$$

证明： 定义映射 $\phi : A[X]/(1 - fX) \rightarrow A_f$, 对于任意的 $g(X) + (1 - fX) \in A[X]/(1 - fX)$, 令

$$\phi(g(X) + (1 - fX)) = g\left(\frac{1}{f}\right).$$

下面验证 ϕ 为环同构.

(良定义) 如果 $g(X) + (1 - fX) = h(X) + (1 - fX)$, 则 $g(X) - h(X) \in (1 - fX)$. 即存在 $q(X) \in A[X]$, 使得 $g(X) - h(X) = q(X)(1 - fX)$. 因此,

$$g\left(\frac{1}{f}\right) - h\left(\frac{1}{f}\right) = q\left(\frac{1}{f}\right)\left(1 - f \cdot \frac{1}{f}\right) = q\left(\frac{1}{f}\right) \cdot 0 = 0.$$

所以, $\phi(g(X) + (1 - fX)) = g\left(\frac{1}{f}\right) = h\left(\frac{1}{f}\right) = \phi(h(X) + (1 - fX))$. 因此, ϕ 良定义.

(环同态) 对于任意的 $g(X) + (1 - fX), h(X) + (1 - fX) \in A[X]/(1 - fX)$, 有

$$\begin{aligned} \phi((g(X) + (1 - fX)) + (h(X) + (1 - fX))) &= \phi((g(X) + h(X)) + (1 - fX)) \\ &= (g + h)\left(\frac{1}{f}\right) = g\left(\frac{1}{f}\right) + h\left(\frac{1}{f}\right) \\ &= \phi(g(X) + (1 - fX)) + \phi(h(X) + (1 - fX)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi((g(X) + (1 - fX)) \cdot (h(X) + (1 - fX))) &= \phi((g(X)h(X)) + (1 - fX)) \\
&= (gh)\left(\frac{1}{f}\right) = g\left(\frac{1}{f}\right) \cdot h\left(\frac{1}{f}\right) \\
&= \phi(g(X) + (1 - fX)) \cdot \phi(h(X) + (1 - fX)).
\end{aligned}$$

因此, ϕ 为环同态.

(双射性) 如果 $\phi(g(X) + (1 - fX)) = \phi(h(X) + (1 - fX))$, 则 $g\left(\frac{1}{f}\right) = h\left(\frac{1}{f}\right)$. 设 $d(X) = g(X) - h(X)$, 则 $d\left(\frac{1}{f}\right) = 0$. 因此, $d(X)$ 在 $X = \frac{1}{f}$ 处有根, 即 $1 - fX$ 整除 $d(X)$. 所以, 存在 $q(X) \in A[X]$, 使得 $d(X) = q(X)(1 - fX)$. 因此, $g(X) + (1 - fX) = h(X) + (1 - fX)$. 所以, ϕ 为单射. 对于任意的 $\frac{a}{f^n} \in A_f$, 令 $g(X) = aX^n \in A[X]$. 则有

$$\phi(g(X) + (1 - fX)) = g\left(\frac{1}{f}\right) = a\left(\frac{1}{f}\right)^n = \frac{a}{f^n}.$$

所以, ϕ 为满射.

综上, ϕ 为环同构. □

B. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 与 Pell 方程, $d \neq \square, d > 0$

假设 $d \in \mathbb{Z}$ 不是完全平方数。令

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

B1) 证明, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 是环而 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 为其分式域。

证明: 先证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 为环. 对于任意的 $x_1 + y_1\sqrt{d}, x_2 + y_2\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 有

$$(x_1 + y_1\sqrt{d}) + (x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}],$$

$$(x_1 + y_1\sqrt{d}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1x_2 + y_1y_2d) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

因此, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 在加法和乘法下封闭. 显然, 加法和乘法满足交换律和结合律, 且乘法对加法分配. 零元为 $0 + 0\sqrt{d}$, $x + y\sqrt{d}$ 的加法逆元为 $-x - y\sqrt{d}$. 所以, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 为环.

再证明 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的分式域.

根据讲义上类似地构造 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的分式域, 那么 $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ 中的元素形如 $\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}}$, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $x_2 + y_2\sqrt{d} \neq 0$. 下面证明 $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. 先证明 $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. 对于任意的 $\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} \in \text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$, 有

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} &= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d})}{(x_2 + y_2\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d})} \\ &= \frac{(x_1x_2 - y_1y_2d) + (x_2y_1 - x_1y_2)\sqrt{d}}{x_2^2 - y_2^2d}. \end{aligned}$$

因为 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$ 且 $x_2 + y_2\sqrt{d} \neq 0$, 所以 $x_2^2 - y_2^2d \neq 0$. 因此, $\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. 所以, $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. 再证明 $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. 对于任意的 $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 设 $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{e}$, 其中 $a, b, c, e \in \mathbb{Z}$ 且 $b, e \neq 0$. 则有

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{d} &= \frac{a}{b} + \frac{c}{e}\sqrt{d} \\ &= \frac{ae + bc\sqrt{d}}{be}. \end{aligned}$$

因为 $ae + bc\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 且 $be \in \mathbb{Z} - \{0\}$, 所以 $x + y\sqrt{d} \in \text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. 所以, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$.

综上, $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. 而两者上的加法与乘法运算是致的. 因此, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ 为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的分式域. \square

B2) 证明, 如果 $d < 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 是 \mathbb{C} 中的格点 (从而是离散的); 如果 $d > 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 在 \mathbb{R} 中稠密。

证明: 设 $d \in \mathbb{Z}$ 不是完全平方数.

如果 $d < 0$, 则 $\sqrt{d} = i\sqrt{|d|}$. 因此, 对于任意的 $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 有

$$x + y\sqrt{d} = x + yi\sqrt{|d|}.$$

由此可知, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 为 \mathbb{C} 中的格点. 因为格点是离散的, 所以 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 在 \mathbb{C} 中离散.

如果 $d > 0$, 我们可以使用连分式技巧, 取到一列有理数 $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ 使得

$$|\sqrt{d} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}.$$

即

$$|q_n\sqrt{d} - p_n| < \frac{1}{q_n}.$$

于是 $\forall a \in \mathbb{R}$, 取 $k_n = \lfloor \frac{a}{q_n\sqrt{d}-p_n} \rfloor$, 则有

$$|k_n(q_n\sqrt{d} - p_n) - a| = \left| \left\lfloor \frac{a}{q_n\sqrt{d}-p_n} \right\rfloor (q_n\sqrt{d} - p_n) - a \right| < |q_n\sqrt{d} - p_n| < \frac{1}{q_n},$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(q_n\sqrt{d} - p_n) = a$. 因此, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 在 \mathbb{R} 中稠密. \square

B3) 对任意的 $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 我们定义 $\bar{z} = x - y\sqrt{d}$ (请注意, 如果 $d > 0$, 这不是复共轭). 证明, 环 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ 恰有 2 个元素.

证明: 下面证明环 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ 恰有 2 个元素.

设 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$. 我们可以将 $1, \sqrt{d}$ 视为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的一组“基”, 因此只需要考虑 $\sigma(1)$ 与 $\sigma(\sqrt{d})$ 即可. 因为 σ 为环同构, 所以

$$\sigma(1) = 1.$$

设 $\sigma(\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d}$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}$. 则有

$$\sigma(\sqrt{d})^2 = \sigma(d) = d.$$

因此,

$$(a + b\sqrt{d})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{d} + b^2d = d.$$

由此可知,

$$a^2 + b^2d = d,$$

$$2ab = 0.$$

如果 $b = 0$, 则 $a^2 = d$, 与 d 不是完全平方数矛盾. 因此, $a = 0$. 所以, $b^2d = d$. 因为 $d \neq 0$, 所以 $b^2 = 1$. 因此, $b = 1$ 或 $b = -1$.

如果 $b = 1$, 则 $\sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$. 如果 $b = -1$, 则 $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$. 因此, 环 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ 恰有 2 个元素, 即恒等映射和共轭映射. \square

注: 这里以及 B5) 中都讨论了 $d < 0$ 情形.

B4) 对任意的 $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 我们定义 $N(z) = z \cdot \bar{z}$ 。证明, 对任意的 $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $N(a \cdot b) = N(a) \cdot N(b)$ 并且 $N(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subset \mathbb{Z}$ 。据此证明: $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(z) = \pm 1\}$ 。

证明: 先证明对任意的 $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, 有 $N(a \cdot b) = N(a) \cdot N(b)$ 。设 $a = x_1 + y_1\sqrt{d}$, $b = x_2 + y_2\sqrt{d}$, 其中 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$ 。则有

$$N(a) = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d}) = x_1^2 - dy_1^2,$$

$$N(b) = (x_2 + y_2\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}) = x_2^2 - dy_2^2.$$

因此,

$$\begin{aligned} N(a \cdot b) &= N((x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d})) \\ &= N((x_1x_2 + y_1y_2d) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{d}) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2d)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = N(a) \cdot N(b). \end{aligned}$$

再证明 $N(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subset \mathbb{Z}$ 。对于任意的 $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}$ 。则有

$$N(z) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 \in \mathbb{Z}.$$

因此, $N(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \subset \mathbb{Z}$ 。下面证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(z) = \pm 1\}$ 。设 $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 。则存在 $w \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 使得 $z \cdot w = 1$ 。因此,

$$N(z) \cdot N(w) = N(z \cdot w) = N(1) = 1.$$

因为 $N(z), N(w) \in \mathbb{Z}$, 所以 $N(z) = \pm 1$ 。反之, 设 $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 且 $N(z) = \pm 1$ 。则有

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = \pm 1.$$

因此,

$$z \cdot (\pm \bar{z}) = 1.$$

所以, $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 。综上, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(z) = \pm 1\}$ 。 \square

B5) 对于 $d < 0$, 试计算 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 。

证明: 如果 $d < 0$, 则对于任意的 $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$, 有

$$N(z) = x^2 - dy^2 = \pm 1.$$

因为 $d < 0$, 所以 $x^2 + |d|y^2 = \pm 1$ 。因此, 当 $d \leq -2$ 时, $y = 0$ 且 $x = \pm 1$ 。所以, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{\pm 1\}$;

当 $d = -1$ 时, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$ \square

如果 $d > 0$, 则对于任意的 $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$, 有

$$N(z) = x^2 - dy^2 = \pm 1.$$

上述方程通常被称作是 Pell 方程. 研究 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 可以给出以上方程所有的整数解.

B6) 证明, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \cap (1, 3) = \{1 + \sqrt{2}\}$.

证明: 设 $z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \cap (1, 3)$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}$. 则有

$$N(z) = x^2 - 2y^2 = \pm 1.$$

因为 $1 < x + y\sqrt{2} < 3$, 对 $x^2 - 2y^2$ 的值进行讨论.

如果 $x^2 - 2y^2 = 1$, 则有 $\frac{1}{3} < x - y\sqrt{2} < 1$. 从而得到 $\frac{2}{3} < x < 2$, 所以 $x = 1$. 由此得到 $y = 1$. 因此, $z = 1 + \sqrt{2}$.

如果 $x^2 - 2y^2 = -1$, 则有 $-1 < x - y\sqrt{2} < -\frac{1}{3}$. 从而得到 $0 < x < \frac{4}{3}$, 所以 $x = 1$. 由此得到 $y = 1$. 但是, $1 + \sqrt{2}$ 不满足 $x^2 - 2y^2 = -1$, 矛盾.

综上, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \cap (1, 3) = \{1 + \sqrt{2}\}$. □

B7) 证明, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 并给出群同构 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

证明: 先证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 设 $z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}$.

若 $z > 0$. 设 k 为满足 $(1 + \sqrt{2})^k < z \leq (1 + \sqrt{2})^{k+1}$ 的最大整数. 则有

$$1 < \frac{z}{(1 + \sqrt{2})^k} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

因为 $\frac{z}{(1 + \sqrt{2})^k} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, 根据 B6), 有

$$\frac{z}{(1 + \sqrt{2})^k} = 1 + \sqrt{2}.$$

因此, $z = (1 + \sqrt{2})^{k+1}$. 如果 $z < 0$. 设 k 为满足 $-(1 + \sqrt{2})^{k+1} \leq z < -(1 + \sqrt{2})^k$ 的最大整数. 则有

$$1 < \frac{z}{-(1 + \sqrt{2})^k} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

因为 $\frac{z}{-(1 + \sqrt{2})^k} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, 根据 B6), 有

$$\frac{z}{-(1 + \sqrt{2})^k} = 1 + \sqrt{2}.$$

因此, $z = -(1 + \sqrt{2})^{k+1}$. 综上, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

定义映射 ϕ :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (1 + \sqrt{2})^k \mapsto (k, \bar{0}), \quad -(1 + \sqrt{2})^k \mapsto (k, \bar{1}).$$

下面验证 ϕ 为群同构.

(群同态) 对于任意的 $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, 设 $z_1 = \epsilon_1(1 + \sqrt{2})^{k_1}$, $z_2 = \epsilon_2(1 + \sqrt{2})^{k_2}$, 其中 $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\}$ 且 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. 则有

$$\begin{aligned}\phi(z_1 \cdot z_2) &= \phi(\epsilon_1 \epsilon_2 (1 + \sqrt{2})^{k_1+k_2}) \\ &= (k_1 + k_2, \bar{\delta}), \quad \text{其中 } \delta = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \epsilon_1 \epsilon_2 = 1; \\ 1, & \text{如果 } \epsilon_1 \epsilon_2 = -1. \end{cases} \\ &= (k_1, \bar{\epsilon}_1) + (k_2, \bar{\epsilon}_2) \\ &= \phi(z_1) + \phi(z_2).\end{aligned}$$

因此, ϕ 为群同态.

(双射性) 如果 $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, 则有 $(k_1, \bar{\epsilon}_1) = (k_2, \bar{\epsilon}_2)$. 因此, $k_1 = k_2$ 且 $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_2$. 所以, $\epsilon_1 = \epsilon_2$. 因此, $z_1 = z_2$. 所以, ϕ 为单射. 对于任意的 $(k, \bar{e}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 设 $e = 0$ 或 $e = 1$. 如果 $e = 0$, 则有

$$\phi((1 + \sqrt{2})^k) = (k, \bar{0}) = (k, \bar{e}).$$

如果 $e = 1$, 则有

$$\phi(-(1 + \sqrt{2})^k) = (k, \bar{1}) = (k, \bar{e}).$$

所以, ϕ 为满射. 综上, ϕ 为群同构. \square

B8) 如何刻画 Pell 方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 和 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的所有整数解?

证明: 根据 B4) 与 B7), $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid N(z) = \pm 1 \Leftrightarrow z = x + y\sqrt{2}, x^2 - 2y^2 = \pm 1\} = \{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 下面分别讨论 Pell 方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 和 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的所有整数解.

设 $z = \epsilon(1 + \sqrt{2})^k \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, 其中 $k \in \mathbb{Z}, \epsilon = \pm 1$. 则有

$$N(z) = N(\epsilon(1 + \sqrt{2})^k) = \epsilon(1 + \sqrt{2})^k \cdot \epsilon(1 - \sqrt{2})^k = \epsilon^2(-1)^k = (-1)^k.$$

又 $N(z) = x^2 - 2y^2 = \pm 1$. 因此, 当 k 为偶数时, $N(z) = 1$; 当 k 为奇数时, $N(z) = -1$.

综上, Pell 方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的所有整数解为

$$(x, y) = \left(\frac{(1 + \sqrt{2})^{2m} + (1 - \sqrt{2})^{2m}}{2}, \frac{(1 + \sqrt{2})^{2m} - (1 - \sqrt{2})^{2m}}{2\sqrt{2}} \right),$$

其中 $m \in \mathbb{Z}$; Pell 方程 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的所有整数解为

$$(x, y) = \left(\frac{(1 + \sqrt{2})^{2m+1} + (1 - \sqrt{2})^{2m+1}}{2}, \frac{(1 + \sqrt{2})^{2m+1} - (1 - \sqrt{2})^{2m+1}}{2\sqrt{2}} \right),$$

其中 $m \in \mathbb{Z}$. \square

以下假设 $d > 0$.

B9) 证明, 有序列 $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}] - \{0\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 而 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的。

(提示: 使用 Dirichlet 引理: 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和正整数 M , 存在整数 p 和正整数 $q \leq M$, 使得 $|p - q\alpha| < \frac{1}{M}$ 。这个引理可以用抽屉原理直接证明或者请从文献中查阅证明)

证明: 先证明 Dirichlet 引理. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 M 为正整数. 考虑数列 $\{k\alpha\}_{k=0}^M$ 在区间 $[0, 1)$ 中的小数部分. 将区间 $[0, 1)$ 划分为 M 个子区间 $[0, \frac{1}{M}), [\frac{1}{M}, \frac{2}{M}), \dots, [\frac{M-1}{M}, 1)$. 根据抽屉原理, 存在 i, j 满足 $0 \leq i < j \leq M$, 使得 $k_i\alpha$ 与 $k_j\alpha$ 的小数部分落在同一子区间内. 设 $q = j - i \leq M$, p 为 $k_j\alpha$ 与 $k_i\alpha$ 的小数部分之差的整数部分. 则有

$$|p - q\alpha| < \frac{1}{M}.$$

即, Dirichlet 引理成立.

下面证明存在序列 $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}] - \{0\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 且 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的. 设 M 为正整数. 根据 Dirichlet 引理, 存在整数 p_n 和正整数 $q_n \leq M$, 使得

$$|p_n - q_n\sqrt{d}| < \frac{1}{M}.$$

定义 $z_n = p_n - q_n\sqrt{d}$. 则有

$$|z_n| = |p_n - q_n\sqrt{d}| < \frac{1}{M}.$$

因此, 当 $M \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. 下面证明 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的. 对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$N(z_n) = (p_n - q_n\sqrt{d})(p_n + q_n\sqrt{d}).$$

因为 $q_n \leq M$, 所以 $|p_n| < |q_n\sqrt{d}| + \frac{1}{M} \leq M\sqrt{d} + \frac{1}{M}$. 因此,

$$|N(z_n)| = |p_n - q_n\sqrt{d}||p_n + q_n\sqrt{d}| < \frac{1}{M} \left(2M\sqrt{d} + \frac{1}{M} \right) = 2\sqrt{d} + \frac{1}{M^2}.$$

由此可知, $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的.

综上, 存在序列 $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}] - \{0\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 且 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的. □
B10) 证明, 存在上述序列的子序列 $\{w_n\}_{n \geq 1}$ 以及整数 k , 使得对任意的 $n, m \geq 1$, 我们有 $N(w_n) = k$ 并且 $w_n w_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 。(提示: 考虑 w_n 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] / k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中的像)

证明: 根据 B9), 存在序列 $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}] - \{0\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ 且 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的.

因为 $\{N(z_n)\}_{n \geq 1}$ 是有界的, 所以存在整数 k , 使得无穷多个 z_n 满足 $N(z_n) = k$. 设这些 z_n 构成子序列 $\{u_n\}_{n \geq 1}$.

因为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] / k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 为有限集, 所以存在子序列 $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset \{u_n\}_{n \geq 1}$, 使得对任意的 $n, m \geq 1$, 有

$$w_n \equiv w_m \pmod{k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]}.$$

因此,

$$w_n - w_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

由此可知,

$$w_n \bar{w}_m - w_m \bar{w}_n = (w_n - w_m) \bar{w}_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

因为 $N(w_m) = k$, 所以 $w_m \bar{w}_m = k$. 因此,

$$w_n \bar{w}_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

综上, 存在子序列 $\{w_n\}_{n \geq 1}$ 以及整数 k , 使得对任意的 $n, m \geq 1$, 我们有 $N(w_n) = k$ 并且 $w_n \bar{w}_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. \square

B11) 证明, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 是无限集。

证明: 根据 B10), 存在序列 $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}] - \{0\}$ 以及整数 k , 使得对任意的 $n, m \geq 1$, 我们有 $N(w_n) = k$ 并且 $w_n \bar{w}_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

设 $n > m \geq 1$. 则有

$$w_n \bar{w}_m \in k\mathbb{Z}[\sqrt{d}].$$

因此, 存在整数 $l_{n,m} = x_n + y_n \sqrt{d}$, 其中 $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$, 使得

$$w_n \bar{w}_m = k l_{n,m}.$$

定义

$$v_{n,m} = \frac{w_n}{w_m} = \frac{k l_{n,m}}{w_m \bar{w}_m} = l_{n,m}.$$

则有 $u_{n,m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. 下面证明 $u_{n,m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$. 由于 $N(w_n) = k$ 且 $N(w_m) = k$, 所以

$$N(u_{n,m}) = N\left(\frac{w_n}{w_m}\right) = \frac{N(w_n)}{N(w_m)} = \frac{k}{k} = 1.$$

根据 B4), 有 $u_{n,m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

于是固定 m , 可知对于任意的 $n > m \geq 1$, $u_{n,m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, 所以 w_n 可以取到无限个不同的值. 因此, $u_{n,m} = \frac{w_n}{w_m}$ 也可以取到无限个不同的值. 综上, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 是无限集. \square

B12) 证明, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$ 是乘法群 $(0, \infty)$ 的离散子群, 即对任意的 $0 < a < b < \infty$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (a, b)$ 是有限的。

证明: 设 $0 < a < b < \infty$. 设 $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (a, b)$, 其中 $x, y \in \mathbb{Z}$. 则有

$$N(z) = x^2 - dy^2 = \pm 1.$$

类似 B6) 的分析, 对 $x^2 - dy^2$ 的值进行讨论.

如果 $x^2 - dy^2 = 1$, 则有

$$a < x + y\sqrt{d} < b,$$

$$\frac{1}{b} < x - y\sqrt{d} < \frac{1}{a}.$$

因此, x 与 y 满足以下不等式组:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{b} &< 2x < b + \frac{1}{a}, \\ a - \frac{1}{b} &< 2y\sqrt{d} < b - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

因为 x, y 为整数, 所以 x, y 只能取有限个值. 对于每一个确定的 y , x 也只能取有限个值. 而对于每一对 (x, y) , 都对应着唯一的 z . 因此, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (a, b)$ 是有限的.

$x^2 - dy^2 = -1$ 的情况是完全类似的. 综上, 对任意的 $0 < a < b < \infty$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (a, b)$ 是有限的. 因此, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$ 是乘法群 $(0, \infty)$ 的离散子群. \square

B13) 证明, 存在 $\eta_d \in (1, \infty)$ (被称作是**基本单位**), 使得 η_d 生成了 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$. 特别地, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (注意到: 对任意的 $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times - \{\pm 1\}$, 四个点 $\pm u, \pm \bar{u}$ 在区间 $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$ 中各有一个)

证明: 由于 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 是无限集 (见 B11)), 所以 $\exists u \neq \pm 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$. 注意到对任意的 $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times - \{\pm 1\}$, 四个点 $\pm u, \pm \bar{u}$ 在区间 $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$ 中各有一个, 这是因为 $N(u) = u\bar{u} = \pm 1$. 因此, $\exists v \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (1, \infty)$.

根据 B12), $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$ 为乘法群 $(0, \infty)$ 的离散子群. 因此, 存在 $\eta_d \in (1, \infty)$, 使得 η_d 为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (1, \infty)$ 中的最小元素.

下面证明 η_d 生成了 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$. 设 $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$. 则存在整数 k , 使得

$$(\eta_d)^k < u \leq (\eta_d)^{k+1}.$$

从而有

$$1 < \frac{u}{(\eta_d)^k} \leq \eta_d.$$

因为 $\frac{u}{(\eta_d)^k} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (1, \infty)$, 以及 η_d 的定义, 所以 $\frac{u}{(\eta_d)^k} = \eta_d$. 因此,

$$u = (\eta_d)^{k+1}.$$

综上, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \cap (0, \infty)$ 是由 η_d 生成的. 特别地, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 这是因为 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ 可以被分解为绝对值和符号的乘积, 而绝对值部分是由 η_d 生成的, 符号部分是由 -1 生成的. 因此, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

练习题

1. A 是环 (未必交换)。证明, 如果 $a \in A$ 是幂零元², $b \in A^\times$ 并且 $ab = ba$, 那么 $a + b$ 可逆; 如果 $a, b \in A$ 是幂零元并且 $ab = ba$, 那么 $a + b$ 是幂零元.

证明: 设 $a^n = 0$ 且 b^{-1} 为 b 的逆元.

(1) 证明 $a + b$ 可逆. 因为 $ab = ba$, 所以

$$(a + b)(b^{-1} - b^{-1}ab^{-1} + b^{-2}a^2b^{-1} - \cdots + (-1)^{n-1}b^{-(n-1)}a^{n-1}b^{-1}) = 1.$$

因此, $a + b$ 可逆.

(2) 证明 $a + b$ 是幂零元. 设 $a^m = 0, b^n = 0$. 因为 $ab = ba$, 所以

$$(a + b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}.$$

当 $k \geq n$ 时, $a^k = 0$; 当 $k < n$ 时, $b^{n+m-k} = 0$. 因此, $(a + b)^{n+m} = 0$. 由此可知, $a + b$ 是幂零元. \square

2. 证明, 如果 $ab \in A$ 是幂零元, 那么, ba 也是幂零元. 据此, 给出 $(1 - ab)^{-1}$ 与 $(1 - ba)^{-1}$ 之间的联系. 据此证明, 如果 $1 - ab \in A^\times$, 那么, $1 - ba \in A^\times$.

证明: 设 $(ab)^n = 0$.

(1) 证明 ba 是幂零元. 有

$$(ba)^{n+1} = b(ab)^n a = 0.$$

由此可知, ba 是幂零元.

(2) 给出 $(1 - ab)^{-1}$ 与 $(1 - ba)^{-1}$ 之间的联系. 有

$$(1 - ba)(1 + b(1 - ab)^{-1}a) = 1 - ba + b(1 - ab)^{-1}a - bab(1 - ab)^{-1}a = 1.$$

因此,

$$(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1}a.$$

(3) 证明如果 $1 - ab \in A^\times$, 那么, $1 - ba \in A^\times$. 由 (2) 可知, $(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1}a$. 因此, $1 - ba \in A^\times$. \square

注: 这给出了著名的“交换律” $(1 - ab)^{-1} = 1 + b(1 - ba)^{-1}a$ 的非交换环版本.

我们在高等线性代数的课程中已经见过这个等式在矩阵环中的应用. 当时也许不太理解这个等式的来历. 现在我们看到, 这个等式实际上是非交换环中的一个普遍现象.

并且等式也不是“注意到”的, 而是因为

$$(1 - ab)(1 + ab + (ab)^2 + \cdots + (ab)^{n-1}) = 1 - (ab)^n = 1,$$

$$(1 - ba)(1 + ba + (ba)^2 + \cdots + (ba)^n) = 1 - (ba)^{n+1} = 1,$$

3. A 是交换环, $\text{Nil}(A) = \{a \in A \mid \text{存在 } n \geq 1, \text{ 使得 } a^n = 0\}$, $\text{Spec}(A)$ 是 A 的所有素理想的集合。证明, $\text{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$

证明: 一方面, 设 $a \in \text{Nil}(A)$. 则存在 $n \geq 1$, 使得 $a^n = 0$. 对任意的素理想 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, 因为 $0 \in \mathfrak{p}$ 且 \mathfrak{p} 为理想, 所以 $a^n \in \mathfrak{p}$. 由于 \mathfrak{p} 为素理想, 所以 $a \in \mathfrak{p}$. 因此, $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$. 由此可知, $\text{Nil}(A) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$.

另一方面, 设 $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$. 考虑所有与 S 相交为空的理想集合

$$\mathcal{I} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ 为理想且 } \mathfrak{a} \cap S = \emptyset\},$$

如果 $a \notin \text{Nil}(A)$, 则对任意的 $n \geq 1$, $a^n \neq 0$. 设 $S = \{a^n \mid n \geq 1\}$. 则 $0 \notin S$. 根据 Zorn 引理, 存在包含 S 的极大理想 \mathfrak{m} . 因为 \mathfrak{m} 为极大理想, 所以 \mathfrak{m} 为素理想. 由此可知, $a \notin \mathfrak{m}$. 这与 $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$ 矛盾. 因此, $a \in \text{Nil}(A)$. 由此可知, $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p} \subseteq \text{Nil}(A)$. 综上, $\text{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$. \square

4. A 是交换环, $\text{SpecMax}(A)$ 是其极大理想的集合, 其 Jacobson 根式理想被定义为 $J(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{SpecMax}(A)} \mathfrak{m}$. 证明, $a \in J(A)$ 当且仅当对任意的 $b \in A$, $1 - ab \in A^\times$.

证明: 设 $a \in J(A)$. 对任意的 $b \in A$, 如果 $1 - ab \notin A^\times$, 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax}(A)$, 使得 $1 - ab \in \mathfrak{m}$. 因为 $a \in J(A)$, 所以 $a \in \mathfrak{m}$. 因此, $ab \in \mathfrak{m}$. 由此可知, $1 = (1 - ab) + ab \in \mathfrak{m}$. 这与 \mathfrak{m} 为理想矛盾. 因此, 对任意的 $b \in A$, 有 $1 - ab \in A^\times$. 设对任意的 $b \in A$, 有 $1 - ab \in A^\times$. 如果 $a \notin J(A)$, 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \in \text{SpecMax}(A)$, 使得 $a \notin \mathfrak{m}$. 因为 \mathfrak{m} 为极大理想, 所以存在 $b \in A$, 使得 $1 - ab \in \mathfrak{m}$. 由此可知, $1 - ab \notin A^\times$. 这与对任意的 $b \in A$, 有 $1 - ab \in A^\times$ 矛盾. 因此, $a \in J(A)$. 综上, $a \in J(A)$ 当且仅当对任意的 $b \in A$, 有 $1 - ab \in A^\times$. \square

5. A 是环, I 是双边理想。那么, 我们有如下的一一对应

$$\{A \text{ 的左理想 } J \supset I\} \xrightarrow{1:1} \{A/I \text{ 的左理想}\}, J \mapsto J/I.$$

证明: 设 J 为 A 的左理想且 $J \supset I$. 则 J/I 为 A/I 的左理想. 设 $\bar{a} \in A/I$ 且 $\bar{j} \in J/I$. 则存在 $a \in A$ 且 $j \in J$, 使得 $\bar{a} = a + I$ 且 $\bar{j} = j + I$. 因为 J 为左理想, 所以 $aj \in J$. 因此,

$$\bar{a}\bar{j} = (a + I)(j + I) = aj + I \in J/I.$$

由此可知, J/I 为 A/I 的左理想. 设 \bar{J} 为 A/I 的左理想. 定义 $J = \{a \in A \mid a + I \in \bar{J}\}$. 则 J 为 A 的左理想且 $J \supset I$. 设 $a_1, a_2 \in J$ 且 $r \in A$. 则有

$$(a_1 + I) + (a_2 + I) = (a_1 + a_2) + I \in \bar{J},$$

$$r(a_1 + I) = ra_1 + I \in \bar{J}.$$

因此, $a_1 + a_2 \in J$ 且 $ra_1 \in J$. 由此可知, J 为 A 的左理想且 $J \supset I$. 显然, 该映射是双射. 综上, 我们有如下的一一对应

$$\{A \text{ 的左理想 } J \supset I\} \xrightarrow{1:1} \{A/I \text{ 的左理想}\}, J \mapsto J/I.$$

□

6. A 和 B 是交换环, $\varphi : A \rightarrow B$ 是环同态。证明, 对任意的理想 $J \subset B$, $\varphi^{-1}(J) \subset A$ 是理想。

证明: 设 $J \subset B$ 为理想。定义 $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$ 。则 $\varphi^{-1}(J) \subset A$ 。设 $a_1, a_2 \in \varphi^{-1}(J)$ 且 $r \in A$ 。则有

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) = \varphi(a_1 + a_2) \in J,$$

$$\varphi(r)\varphi(a_1) = \varphi(ra_1) \in J.$$

因此, $a_1 + a_2 \in \varphi^{-1}(J)$ 且 $ra_1 \in \varphi^{-1}(J)$ 。由此可知, $\varphi^{-1}(J) \subset A$ 为理想。□

7. A 和 B 是交换环, $\varphi : A \rightarrow B$ 是环同态。证明, 如果 $\mathfrak{q} \subset B$ 是素理想, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ 也是素理想。进一步利用 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 的自然映射说明极大理想的逆像未必是极大的。

证明: 设 $\mathfrak{q} \subset B$ 为素理想。定义 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}\}$ 。则 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ 为理想。设 $a_1, a_2 \in A$, 且 $a_1a_2 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 。则有

$$\varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1a_2) \in \mathfrak{q}.$$

因为 \mathfrak{q} 为素理想, 所以 $\varphi(a_1) \in \mathfrak{q}$ 或 $\varphi(a_2) \in \mathfrak{q}$ 。因此, $a_1 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 或 $a_2 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 。由此可知, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ 为素理想。

下面利用 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 的自然映射说明极大理想的逆像未必是极大的。设 $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 为自然映射。则 φ 为环同态。设 $\mathfrak{m} = \{0\} \subset \mathbb{Q}$ 。则 \mathfrak{m} 为极大理想。由此可知,

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \varphi(a) \in \mathfrak{m}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 0\} = \{0\}.$$

显然, $\{0\} \subset \mathbb{Z}$ 不是极大理想。综上, 极大理想的逆像未必是极大的。□

8. A 是(交换)环, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ 是素理想, I 是理想。如果 $I \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, 证明, 存在 i_0 , 使得 $I \subset \mathfrak{p}_{i_0}$ 。

证明: 我们使用数学归纳法证明该命题。当 $n = 1$ 时, 显然成立。假设当 $n = k$ 时命题成立。现在证明当 $n = k + 1$ 时命题也成立。设 $I \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathfrak{p}_i$ 。如果 $I \subset \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$, 则根据归纳假设, 存在 $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $I \subset \mathfrak{p}_{i_0}$ 。如果 $I \not\subset \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$, 则存在 $a \in I$, 使得 $a \notin \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{p}_i$ 。因为 $a \in I \subset \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathfrak{p}_i$, 所以 $a \in \mathfrak{p}_{k+1}$ 。设 $b \in I$ 。则存在 $j \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, 使得 $b \in \mathfrak{p}_j$ 。如果 $j = k + 1$, 则 $b \in \mathfrak{p}_{k+1}$ 。如果 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 则有

$$ab \in \mathfrak{p}_j.$$

因为 $a \notin \mathfrak{p}_j$ 且 \mathfrak{p}_j 为素理想, 所以 $b \in \mathfrak{p}_j$ 。因此, 对任意的 $b \in I$, 都有 $b \in \mathfrak{p}_{k+1}$ 。由此可知, $I \subset \mathfrak{p}_{k+1}$ 。综上, 存在 i_0 , 使得 $I \subset \mathfrak{p}_{i_0}$ 。□

9. A 是(交换)环, I_1, \dots, I_n 是素理想, \mathfrak{p} 是素理想。如果 $\bigcap_{i=1}^n I_i \subset \mathfrak{p}$, 证明, 存在 i_0 , 使得 $I_{i_0} \subset \mathfrak{p}$ 。特别地, 如果 $\bigcap_{i=1}^n I_i = \mathfrak{p}$, 那么, 存在 i_0 , 使得 $I_{i_0} = \mathfrak{p}$ 。

证明: 我们使用数学归纳法证明该命题. 当 $n = 1$ 时, 显然成立. 假设当 $n = k$ 时命题成立. 现在证明当 $n = k + 1$ 时命题也成立. 设 $\bigcap_{i=1}^{k+1} I_i \subset \mathfrak{p}$. 如果 $\bigcap_{i=1}^k I_i \subset \mathfrak{p}$, 则根据归纳假设, 存在 $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $I_{i_0} \subset \mathfrak{p}$. 如果 $\bigcap_{i=1}^k I_i \not\subset \mathfrak{p}$, 则存在 $a \in \bigcap_{i=1}^k I_i$, 使得 $a \notin \mathfrak{p}$. 因为 $a \in \bigcap_{i=1}^{k+1} I_i \subset \mathfrak{p}$, 所以 $a \in I_{k+1}$. 设 $b \in I_{k+1}$. 则有

$$ab \in \bigcap_{i=1}^{k+1} I_i \subset \mathfrak{p}.$$

因为 $a \notin \mathfrak{p}$ 且 \mathfrak{p} 为素理想, 所以 $b \in \mathfrak{p}$. 因此, $I_{k+1} \subset \mathfrak{p}$. 综上, 存在 i_0 , 使得 $I_{i_0} \subset \mathfrak{p}$. 特别地, 如果 $\bigcap_{i=1}^n I_i = \mathfrak{p}$, 则根据前面的结论, 存在 i_0 , 使得 $I_{i_0} \subset \mathfrak{p}$. 因为 $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n I_i \subset I_{i_0}$, 所以 $I_{i_0} = \mathfrak{p}$. \square

10. A 是环, I 和 J 是理想并且 I 与 J 互素 (即 $I + J = A$). 证明, 对任意的 $n \geq 1$, I^n 与 J^n 互素。

证明: 设 $I + J = A$. 则存在 $a \in I$ 且 $b \in J$, 使得 $a + b = 1$. 对任意的 $n \geq 1$, 有

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = 1.$$

因为对任意的 $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \in I^n + J^n$, 所以 $1 \in I^n + J^n$. 由此可知, $I^n + J^n = A$. 因此, 对任意的 $n \geq 1$, I^n 与 J^n 互素。 \square

11. A 是环 (未必交换), 子集 $S \subset A$ 的中心化子 $\mathbf{Z}_S(A)$ 是 A 中在乘法意义下与 S 中所有元素均交换的元素的集合。证明, $\mathbf{Z}_S(A)$ 是 A 子环。

证明: 设 $x, y \in \mathbf{Z}_S(A)$ 且 $r \in A$. 则对任意的 $s \in S$, 有

$$xs = sx,$$

$$ys = sy.$$

因此,

$$(x + y)s = xs + ys = sx + sy = s(x + y),$$

$$(rx)s = r(xs) = r(sx) = (rs)x.$$

由此可知, $x + y \in \mathbf{Z}_S(A)$ 且 $rx \in \mathbf{Z}_S(A)$. 显然, $0, 1 \in \mathbf{Z}_S(A)$. 综上, $\mathbf{Z}_S(A)$ 为 A 子环。 \square

12. K 是域, $A = K[X]$ 是 K 上的多项式环, V 是 K 一线性空间。给定线性映射 $T \in \text{End}_K(V)$ 可以给出 V 上的一个 $K[X]$ 一模的结构:

$$K[X] \times V \rightarrow V, \quad (P(X), v) \mapsto P(T)v.$$

证明, V 上的每一个 $K[X]$ 一模的结构都恰好有某个 $T \in \text{End}_K(V)$ 使得上述关系成立。

证明: 设 V 为 $K[X]$ -模. 定义 $T : V \rightarrow V$ 为 K -线性映射, 使得对任意的 $v \in V$, 有

$$T(v) = X \cdot v.$$

则对任意的 $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in K[X]$ 且 $v \in V$, 有

$$\begin{aligned} P(T)(v) &= (a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0)(v) \\ &= a_nT^n(v) + a_{n-1}T^{n-1}(v) + \cdots + a_1T(v) + a_0v \\ &= a_nX^n \cdot v + a_{n-1}X^{n-1} \cdot v + \cdots + a_1X \cdot v + a_0 \cdot v \\ &= P(X) \cdot v. \end{aligned}$$

由此可知, V 上每一个 $K[X]$ -模的结构都恰好有某个 $T \in \text{End}_K(V)$ 使得上述关系成立. \square