陈宏泰

(1) 对Gauss曲率 $K=-1$的曲面片，其结构方程选取恰当的参数后可化为 sine-Gordon方程：

$$\alpha_{st}=\sin\alpha$$

反之，对 sine-Gordon方程 $\alpha_{st}=\sin\alpha$，通过求解以下微分形式为系数的标架$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$的运动方程

$$\omega_1=\cos\varphi\, d\xi \qquad \omega_2=\sin\varphi\, d\eta$$

$$\omega_{12}=\varphi_\eta d\xi+\varphi_\xi d\eta$$

$$\omega_{13}=\sin\varphi\, d\xi,\quad \omega_{23}=-\cos\varphi\, d\eta$$

可得Gauss曲率为 -1 的曲面片，其中 $\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)$

(2) 取Σ的正交标架 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_{n+1}\}$ $\overset{\vec{n}}{//}$，任取常向量 $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$，令 $f=\langle\vec{r},\vec{a}\rangle$

则 $$f_i\omega_i=df \Rightarrow f_i=\langle\vec{a},\vec{e}_i\rangle$$

$$f_{ij}\omega_j=df_i+f_j\omega_{ji}=\langle\vec{a},d\vec{e}_i\rangle+\langle\vec{a},\vec{e}_j\rangle\omega_{ji}$$

$$=\langle\vec{a},\ \omega_{ij}\vec{e}_j+\omega_{i,n+1}\vec{e}_{n+1}\rangle+\langle\vec{a},\vec{e}_j\rangle\omega_{ji}$$

$$=\langle\vec{a},\vec{e}_{n+1}\rangle\omega_{i,n+1}=\langle\vec{a},\vec{e}_3\rangle h_{ij}\omega_j$$

$$\Longrightarrow f_{ij}=\langle\vec{a},\vec{e}_3\rangle h_{ij}$$

$$\Longrightarrow \Delta_\Sigma f=nH\langle\vec{a},\vec{e}_3\rangle$$

再由 $\vec{a}$ 的任意性，即得 $\Delta_\Sigma\vec{r}=nH\vec{e}_{n+1}$

(3) 在紧致曲面Σ上

$$\int_\Sigma \mathrm{div}\langle\nabla\vec{r},\vec{r}\rangle dx=0$$

而 $$\mathrm{div}\langle\nabla\vec{r},\vec{r}\rangle=\langle\Delta\vec{r},\vec{r}\rangle+\langle\nabla\vec{r},\nabla\vec{r}\rangle$$

从而 $$\int_\Sigma\langle\Delta\vec{r},\vec{r}\rangle dx=-\int_\Sigma\langle\nabla\vec{r},\nabla\vec{r}\rangle dx$$

而由Σ为极小超曲面，$\Delta\vec{r}=nH\vec{n}=\vec{0}$

从而 LHS=0， RHS<0. 矛盾.

(4) 1° 设 $w=x+iy$ 是Σ的另一个与 $z=u+iv$ 定向一致的局部等温坐标，$w(z)$ 是它们之间的坐标变换，则 w 是 z 的解析函数，$w_{\bar z}=0$，则

$$\psi=-\langle \vec r_w,\vec n_w\rangle (dw)^2=-\langle \vec r_z,\vec n_z\rangle \left(\frac{dz}{dw}\right)^2(dw)^2$$
$$=-\langle \vec r_z,\vec n_z\rangle (dz)^2$$

2° $H=$常数当且仅当 $H_z=0$，根据 Codazzi 方程

$$Q_{\bar z}=\frac{\lambda^2}{2}H_z=0$$

$\Rightarrow$ Q是局部全纯函数 $\Rightarrow$ ψ是全纯微分形式

3° $$Q=-\langle \vec r_z,\vec n_z\rangle=-\frac{1}{4}\langle \vec r_u-i\vec r_v,\vec n_u-i\vec n_v\rangle$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\langle \vec r_u,\vec n_u\rangle-\langle \vec r_v,\vec n_v\rangle-2i\langle \vec r_u,\vec n_v\rangle\right)$$
$$=\frac{L-N-2iM}{4}$$

故 $\psi(p)=0$ 当且仅当 $L=N$，$M=0$ $\Rightarrow$ p为脐点

(5) 由(4)可知 Σ的Hopf微分ψ全纯

仅需证明 $\psi\equiv0$，便可得Σ全脐且紧致，从而为球面.

(1) 由 $g(\Sigma)=0$，根据Riemann-Koebe单值化定理，Σ共形等价于S^2

(2) 只需证明S^2上的全纯二次微分形式一定为零，则可得 $\psi\equiv0$

设ψ是S^2上全纯的二次微分形式，在S^2局部等温坐标表示分别为

球极投影	$\pi_1: S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbb{R}^2$	$\pi_2: S^2\setminus\{(0,0,-1)\}\to\mathbb{R}^2$
	$\pi_1=(u,v)$	$\pi_2=(x,y)$
等温坐标系	$z=u+vi$	$w=x-yi$
全纯的二次微分形式	$\psi=Q_1(z)(dz)^2$	$\psi=Q_2(w)(dw)^2$

其中等温坐标系之间的变换关系为 $z=\frac{1}{w}$

在局部坐标系的交 $S^2\setminus\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$上，有

$$\psi = Q_1(z)(dz)^2 = Q_2(w)(dw)^2 = Q_2(w(z))\frac{1}{z^4}(dz)^2$$

$$\Rightarrow \quad Q_1(z) = \frac{Q_2(w(z))}{z^4}$$

令 $z \to \infty$，$w \to 0$，且 $\lim\limits_{z\to\infty} Q_1(z) = Q_2(0)\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^4} = 0$

从而在 $S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \cong \mathbb{C}$ 上全纯的 $Q_1(z)$ 有界，

由 Liouville 定理可得 $Q_1 \equiv 0$，同理，$Q_2 \equiv 0$

因此，Hopf 微分 $\psi \equiv 0$.

(b) 由 M 紧致可知存在脐点 P_0（取法向使 P_0 处主曲率均为正），

则平均曲率 $H \equiv H(P_0) > 0$. 则有

$$A(M) = \int_M dA = \int_M H\varphi \, dA$$

$$= H\int_M \langle x, -N\rangle \, dA$$

$$= H\int_\Omega \operatorname{div} x \, dv$$

$$= (n+1) H|\Omega|$$

因此，有 $(n+1)|\Omega| = \int_M \frac{1}{H} dA$，

即 Heintze-Karcher 不等式中的等式成立，从而 M 为 n 维球面.