ODE

第八次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 23 日

习题 1 定义矩阵值函数

$$A(t) := \begin{bmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{bmatrix}.$$

考虑线性方程 $\dot{x} = A(t)x$.

1) 验证 $\phi(t) := (1, t^2)^t$ 是方程的解.

2) 做如下变量替换:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} y$$

写出 y 满足的微分方程.

3) 求解 2) 中得到的微分方程. 并得到原方程的一个解.

4) 求原方程的一组基.

解: 1) 直接计算可得

$$\dot{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \end{bmatrix} = A(t)\phi(t).$$

2) 由变量替换可得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} y.$$

将其代入原方程 $\dot{x} = A(t)x$ 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} y = A(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} y.$$

整理可得

$$\dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} y.$$

3) 将 $y=(y_1,y_2)^t$ 带入上式可得方程组

$$\begin{cases} \dot{y}_1=-y_2 \\ \dot{y}_2=-t^2 y_2 \end{cases}.$$

解出 $y_2(t)=c_2e^{-\frac{t^3}{3}}$, 进而解出 $y_1(t)=c_1+c_2\int_0^t e^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s$. 从而

$$y(t)=\left(c_1+c_2\int_0^t e^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s, c_2e^{-\frac{t^3}{3}}\right)^t.$$

代入变量替换可得原方程的一个解为

$$x(t)=\begin{bmatrix} c_1+c_2\int_0^t e^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s \\ t^2\left(c_1+c_2\int_0^t e^{-\frac{s^3}{3}}\mathrm{d}s\right)+c_2e^{-\frac{t^3}{3}} \end{bmatrix}.$$

□

习题 2 求系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ 的流 $\Pi(t,s)$.

解: 设 $\Pi(t,s)=\begin{bmatrix} a(t,s) & b(t,s) \\ c(t,s) & d(t,s) \end{bmatrix}$, 则由流的定义可知 $\Pi(t,s)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(t,s)=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\Pi(t,s)$$

且初值条件为 $\Pi(s,s)=I$. 将 $\Pi(t,s)$ 代入上式可得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}a(t,s)=a(t,s)+tc(t,s) \\ \frac{\partial}{\partial t}b(t,s)=b(t,s)+td(t,s) \\ \frac{\partial}{\partial t}c(t,s)=0 \\ \frac{\partial}{\partial t}d(t,s)=2d(t,s) \end{cases}$$

直接解出 $c(t,s)=0$, $d(t,s)=e^{2(t-s)}$. 将其代入前两式可得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}a(t,s)=a(t,s) \\ \frac{\partial}{\partial t}b(t,s)=b(t,s)+te^{2(t-s)} \end{cases}$$

结合初值条件 $a(s,s)=1$, $b(s,s)=0$ 可解出

$$a(t,s)=e^{t-s},\quad b(t,s)=\int_s^t e^{t-\tau}\tau e^{2(\tau-s)}\mathrm{d}\tau=(t-1)e^{2(t-s)}-(s-1)e^{t-s}.$$

因此流为

$$\Pi(t,s)=\begin{bmatrix} e^{t-s} & (t-1)e^{2(t-s)}-(s-1)e^{t-s} \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{bmatrix}.$$

□

习题 3 验证讲义第四部分性质 13 证明过程中的等式

$$e^{\mu I_m+B}=J_\lambda(m).$$

解: 这里令 $N_m=J_\lambda(m)-\lambda I_m$. 于是 B 的定义为

$$B=\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}\frac{N_m^k}{k\lambda^k}.$$

由形式幂级数的知识可知

$$e^{\ln(1+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln(1+x))^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^n}{k})=1+x.$$

那么将 x 替换为 $\frac{N_m}{\lambda}$, 则有

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{N_m^k}{k\lambda^k}}=I_m+\frac{N_m}{\lambda}.$$

而又 N_m 为 m 阶幂零矩阵, 因此 $N_m^m=0$, 所以

$$B=\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1}\frac{N_m^k}{k\lambda^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{N_m^k}{k\lambda^k}.$$

因此有

$$e^B=I_m+\frac{N_m}{\lambda}.$$

于是

$$e^{\mu I_m+B}=e^{\mu I_m}\cdot e^B=\lambda I_m\cdot\left(I_m+\frac{N_m}{\lambda}\right)=\lambda I_m+N_m=J_\lambda(m).$$

□

习题 4 本题的目的是证明性质 14.

1) 设 $A,B\in M_d(\mathbb{R})$ 且 $A=e^B$. 设 $\lambda<0$ 是 A 的特征值. 证明 B 有形如

$$\log(-\lambda)\pm(2k+1)\pi i, k\in\mathbb{Z}$$

的一对特征根. 由此证明：若 $J_\lambda(m)$ 出现在 A 的 Jordan 标准型中, 则其必出现偶数次.

2) 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $b\neq 0$, 则存在 $D\in M_2(\mathbb{R})$ 使得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=e^D.$$

特别的, 存在 $D\in M_2(\mathbb{R})$ 使得 $e^D=-I_2$.

3) 证明如下两个矩阵相似:

$$\begin{bmatrix} J_\lambda(m) & \\ & J_\lambda(m)\end{bmatrix};\begin{bmatrix} \lambda I_2 & I_2 & & & \\ & \lambda I_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda I_2 & I_2 \\ & & & & \lambda I_2\end{bmatrix}$$

4) 设 $C,D\in M_2(\mathbb{R})$ 使得 $C=e^D$, 则存在 $B\in M_{2m}(\mathbb{R})$ 使得

$$\begin{bmatrix} C & I_2 & & & \\ & C & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & C & I_2 \\ & & & & C\end{bmatrix}=e^B$$

5) 证明性质 14 .

证明: 1) $\lambda<0$ 是 A 的特征值, 则也是 e^B 的特征值. 而 e^B 的特征值为 e^μ, 其中 μ 是 B 的特征值. 因此存在 B 的特征值 μ 使得 $e^\mu=\lambda$. 又实矩阵的复特征根成对出现, 从而 B 有形如

$$\mu=\log(-\lambda)\pm(2k+1)\pi i,k\in\mathbb{Z}$$

的一对特征根. 从而 B 有一对形如 $\log(-\lambda)\pm(2k+1)\pi i,k\in\mathbb{Z}$ 的共轭复特征根.

设 $J_\mu(m)$ 是 B 的 Jordan 标准型中的一个 Jordan 块, 则由性质 13 可知 $J_\lambda(m)$ 是 A 的 Jordan 标准型中的一个 Jordan 块. 由于 μ 为复数, 则其共轭复数 $\overline{\mu}$ 也是 B 的特征值, 因此 B 的 Jordan 标准型中也有 $J_{\overline{\mu}}(m)$ 这个 Jordan 块. 由性质 13 可知 $J_\lambda(m)$ 也是 A 的 Jordan 标准型中的一个 Jordan 块. 因此, $J_\lambda(m)$ 在 A 的 Jordan 标准型中成对出现.

2) 设 $D=\begin{bmatrix}\log\sqrt{a^2+b^2} & \theta\\ -\theta & \log\sqrt{a^2+b^2}\end{bmatrix}$, 其中 $\theta=\arctan\frac{b}{a}(+\pi)$, 可视情况任取. 则直接计算可得

$$e^D=e^{(\log\sqrt{a^2+b^2})\cdot I+\begin{pmatrix}0 & \theta\\ -\theta & 0\end{pmatrix}}=\begin{bmatrix}\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta & \sqrt{a^2+b^2}\sin\theta\\ -\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta & \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}.$$

特别地, 取 $a=-1,b=0,(\theta=-\pi)$ 即可得到 $e^D=-I_2$.

3) 记前者为 A, 后者为 B. 设 $J=J_0(2m)$, 则 $B=\lambda I_{2m}+J^2$. 由于 $r(J^2)=2m-2$, 因此 J^2 的关于特征值 0 的几何重数为 2, 故其有两个关于特征值 0 的 Jordan 块. 又 J^2 的极小多

项式为 t^m, 故每个 Jordan 块的阶数不超过 m. 因此 J^2 的 Jordan 标准型恰为两个关于特征值 0 的阶为 m 的 Jordan 块, 即 $\mathrm{diag}\{J_0(m), J_0(m)\}$.

故存在 P 使得 $P^{-1}J^2P = \mathrm{diag}\{J_0(m), J_0(m)\}$. 因此, $P^{-1}BP = \lambda I_{2m} + P^{-1}J^2P = \mathrm{diag}\{J_\lambda(m), J_\lambda(m)\} = A$. 两矩阵相似.

注: 也可以用基变换的观点来看, 假设 A 是在基 $\{e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_{2m}\}$ 下的矩阵, 那么 B 是在基 $\{e_1, e_{m+1}, e_2, e_{m+2}, \cdots, e_m, e_{2m}\}$ 下的矩阵.

4) 定义 $m \times m$ 矩阵

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

则 M 可表示为

$$M = I_m \otimes C + N \otimes I_2,$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积.

由于 $I_m \otimes C$ 与 $N \otimes I_2$ 可交换:

$$(I_m \otimes C)(N \otimes I_2) = N \otimes C = (N \otimes I_2)(I_m \otimes C),$$

我们有

$$M = (I_m \otimes C)(I_m \otimes I_2 + N \otimes C^{-1}).$$

令

$$X = I_m \otimes I_2 + N \otimes C^{-1}.$$

由于 N 是幂零矩阵（$N^m = 0$）, 矩阵 $N \otimes C^{-1}$ 也是幂零的, 故 $X - I$ 是幂零的. 因此, 由性质 13, 对数

$$\log X = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \frac{(N \otimes C^{-1})^k}{k}$$

收敛且为实矩阵.

又因 $C = e^D$, 有

$$\log(I_m \otimes C) = I_m \otimes D.$$

定义

$$B = I_m \otimes D + \log X.$$

由于 $I_m \otimes D$ 与 X 可交换（因 D 与 C 可交换, 故与 C^{-1} 可交换）, 有

$$e^B = e^{I_m \otimes D + \log X} = e^{I_m \otimes D} e^{\log X} = (I_m \otimes e^D) \cdot X = (I_m \otimes C) \cdot X = M.$$

故存在 $B \in M_{2m}(\mathbb{R})$ 使得 $e^B = M$.

5) 性质 14 陈述如下:

设 $A \in M_d(\mathbb{R})$ 可逆。

1）存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得 $A = e^B$ 当且仅当若 $\lambda < 0$ 是 A 的特征值且 $J_\lambda(m)$ 出现在 A 的 Jordan 标准型中，则其必出现偶数次。

2）若 A 无负特征值，则存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得 $A = e^B$ 。

3）必存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得 $A^2 = e^B$ 。

证明:

1) 必要性已在 1) 中证明.

充分性: 设 A 的 Jordan 标准型为 $\mathrm{diag}\{J_{\lambda_1}(m_1), J_{\lambda_2}(m_2), \cdots, J_{\lambda_k}(m_k)\}$. 由假设可知, 若 $\lambda_i < 0$, 则 $J_{\lambda_i}(m_i)$ 必出现偶数次.

由 3), 可知

$$\begin{bmatrix} J_{\lambda_i}(m_i) & \\ & J_{\lambda_i}(m_i) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \lambda_i I_2 & I_2 & & & \\ & \lambda_i I_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i I_2 & I_2 \\ & & & & \lambda_i I_2 \end{bmatrix}$$

两者相似. 由 2), 可知存在 $D_i \in M_2(\mathbb{R})$ 使得

$$e^{D_i} = (-\lambda_i) \cdot (-I_2).$$

最后由 4), 可知存在 $B_i \in M_{2m_i}(\mathbb{R})$ 使得

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I_2 & I_2 & & & \\ & \lambda_i I_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i I_2 & I_2 \\ & & & & \lambda_i I_2 \end{bmatrix} = e^{B_i}.$$

因此, 若 $\lambda_i < 0$, 则存在 $B_i \in M_{2m_i}(\mathbb{R})$ 使得

$$\begin{bmatrix} J_{\lambda_i}(m_i) & \\ & J_{\lambda_i}(m_i) \end{bmatrix} = e^{B_i}.$$

若 $\lambda_i > 0$, 则由性质 13 可知存在 $B_i \in M_{m_i}(\mathbb{R})$ 使得

$$J_{\lambda_i}(m_i) = e^{B_i}.$$

于是, 将所有 B_i 组成对角矩阵, 则存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得

$$A = e^B.$$

综上所述, 充分性得证.

2) 设 A 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J_{\lambda_1}(m_1), J_{\lambda_2}(m_2), \cdots, J_{\lambda_k}(m_k)\}$, 其中 $\lambda_i > 0$. 由性质 13 可知 B 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J_{\log\lambda_1}(m_1), J_{\log\lambda_2}(m_2), \cdots, J_{\log\lambda_k}(m_k)\}$. 因此, 若 A 无负特征值, 则存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得 $A = e^B$.

3) 设 A 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J_{\lambda_1}(m_1), J_{\lambda_2}(m_2), \cdots, J_{\lambda_k}(m_k)\}$. 由性质 13 可知 A^2 的 Jordan 标准型为 $\operatorname{diag}\{J_{\lambda_1^2}(m_1), J_{\lambda_2^2}(m_2), \cdots, J_{\lambda_k^2}(m_k)\}$. 由于 $\lambda_i^2 > 0$, 由 2) 可知存在 $B \in M_d(\mathbb{R})$ 使得 $A^2 = e^B$.

注: 显然 2),3) 是 1) 的直接推论.

□

习题 5

1) 设 $A, B \in M_d(\mathbb{C})$ 且 $A = e^B$. 证明 A 可对角化当且仅当 B 可对角化.

2) 设 $A \in M_d(\mathbb{C})$ 可逆. 证明 A 可对角化当且仅当 A^2 可对角化. (注: 此二性质用在了定理 7 的证明过程中)

解: 1) 设 A 可对角化, 则 A 的 Jordan 标准型中所有 Jordan 块均为 1×1 阶. 由性质 13 可知 B 的 Jordan 标准型中对应的 Jordan 块也均为 1×1 阶, 因此 B 可对角化.

反之, 设 B 可对角化, 则 B 的 Jordan 标准型中所有 Jordan 块均为 1×1 阶. 由性质 13 可知 A 的 Jordan 标准型中对应的 Jordan 块也均为 1×1 阶, 因此 A 可对角化.

2) 设 A 可对角化, 则 A 的 Jordan 标准型中所有 Jordan 块均为 1×1 阶. 由于平方运算不会改变 Jordan 块的阶数, 因此 A^2 的 Jordan 标准型中所有 Jordan 块也均为 1×1 阶, 因此 A^2 可对角化.

反之, 设 A^2 可对角化, 则 A^2 的 Jordan 标准型中所有 Jordan 块均为 1×1 阶. 由于平方运算不会改变 Jordan 块的阶数, 因此 A 的 Jordan 标准型中对应的 Jordan 块也均为 1×1 阶, 因此 A 可对角化. □