ODE
第九次作业

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 11 月 24 日

习题 1 考虑两个一维向量场 $F:(0,1)\to\mathbb{R}; G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$F(r)=\frac{r\left(1-r^2\right)}{2};\quad G(r)=\frac{r}{2}.$$

1) 证明 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 的相流均存在, 并分别计算它们的相流.

2) 证明 $\dot r=F(r)$ 与 $\dot r=G(r)$ 拓扑共轭.

3) 证明 $\dot X=F(X)$ 与 $\dot Y=G(Y)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭, 这里

$$F(x,y):=\left(x/2-y-x\left(x^2+y^2\right)/2, x+y/2-y\left(x^2+y^2\right)/2\right);$$
$$G(x,y):=(x/2-y, x+y/2).$$

解:

1) 对于 $\dot r=F(r)$, 分离变量得

$$\int\frac{1}{r(1-r^2)}dr=\int\frac{1}{r}+\frac{1}{2(1-r)}-\frac{1}{2(1+r)}dr=\ln|r|-\frac{1}{2}\ln|1-r^2|=t+C.$$

因此相流为

$$\varphi_t(r)=\sqrt{\frac{r^2e^t}{1+r^2\left(e^t-1\right)}}.$$

对于 $\dot r=G(r)$, 同样分离变量得

$$\int\frac{1}{r}dr=\int\frac{1}{2}dt\Rightarrow\ln|r|=\frac{t}{2}+C.$$

因此相流为

$$\psi_t(r)=re^{t/2}.$$

2) 取同胚映射 $h:(0,1)\to(0,\infty), h(r)=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$, 则有

$$h\left(\varphi_t(r)\right)=\frac{\sqrt{\frac{r^2e^t}{1+r^2(e^t-1)}}}{\sqrt{1-\frac{r^2e^t}{1+r^2(e^t-1)}}}=\frac{re^{t/2}}{\sqrt{1-r^2}}=\psi_t\left(\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right)=\psi_t(h(r)).$$

3) 计算 F 在原点的雅可比矩阵为

$$DF(0,0)=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ 1 & 1/2\end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1=3/2i, \lambda_2=-3/2i$, 为纯虚特征值. 计算 G 在原点的雅可比矩阵为

$$DG(0,0)=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ 1 & 1/2\end{pmatrix},$$

其特征值同样为 $\lambda_1=3/2i, \lambda_2=-3/2i$. 由课本定理 6.5.1 可知 $\dot{X}=F(X)$ 与 $\dot{Y}=G(Y)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭. □

习题 2 设 $F\in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2\right)$, 且 $F(0)=0, F'(0)=D$, 其中

$$D=\begin{bmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{bmatrix};\quad \lambda\le\mu<0.$$

本题的目的是证明 $\dot{X}=F(X)$ 与 $\dot{Y}=DY$ 在平衡点附近局部拓扑共轭. 我们用 $\phi(t,z)$ 表示初值问题

$$\dot{X}=F(X);\quad X(0)=z$$

的极大解, 其定义域记为 I_z . 承认（以后会证明）ϕ 作为 (t,z) 的映射在其定义域上为 C^1 光滑.

1) 证明存在 $\rho>0$ 使得对任意的 $r\in(0,\rho]$, 向量场 $F(X)$ 限制在

$$S_r:=\left\{X\in\mathbb{R}^2:|X|=r\right\}$$

上朝向圆内, 即

$$F(X)\cdot X<0,\quad \forall X\in S_r.$$

2) 固定 $r\in(0,\rho)$. 对任意的 $z\in B_\rho:=\{X:|X|<\rho\}$ 且 $z\neq 0$, 证明存在 $T(z)\in I_z$ 使得 $\phi(T(z),z)\in S_r$.

3) 证明 $T:B_\rho\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ 连续.

4) 定义 $h:B_\rho\to\mathbb{R}^2$ 为 $h(0)=0$,

$$h(z):=e^{-T(z)D}\phi(T(z),z),\quad z\in B_\rho\backslash\{0\}.$$

证明 h 连续.

5) 证明 $h\left(B_{\rho}\right)$ 为开集, 且 $h: B_{\rho} \rightarrow h\left(B_{\rho}\right)$ 为同胚.

6) 证明 h 为 $\dot{X}=F(X)$ 与 $\dot{Y}=DY$ 的局部拓扑共轭, 即对任意的 $z \in B_{\rho}$ 以及 $t \in I_z$ 使得 $\phi(t, z) \in B_{\rho}$ 有

$$h(\phi(t, z))=e^{tD} h(z).$$

解:

1) 由于 F 在原点处可微, 故存在 $\delta>0$ 使得当 $|X|<\delta$ 时有

$$F(X)=DX+|X| \varepsilon(X),$$

其中 $\lim_{X \rightarrow 0} \varepsilon(X)=0$. 取 $\rho=\min \left\{\delta, \frac{|\lambda|}{2}\right\}$, 则当 $|X|=r \leq \rho$ 时,

$$F(X) \cdot X=X^{T} DX+|X| \varepsilon(X) \cdot X \leq \lambda|X|^{2}+|X|^{2}|\varepsilon(X)|<0.$$

2) 对任意的 $z \in B_{\rho} \backslash\{0\}$, 由第 1 小题可知 $\frac{d}{dt}|\phi(t, z)|^{2}=2F(\phi(t, z)) \cdot \phi(t, z)<0$, 因此存在唯一的 $T(z)>0$ 使得 $|\phi(T(z), z)|=r$.

3) 设 $z_n \rightarrow z$, 则由 ϕ 的连续性可知 $\phi(T(z_n), z_n) \rightarrow \phi(T(z), z)$. 又由于 $|\phi(T(z_n), z_n)|=r$, 故 $|\phi(T(z), z)|=r$, 由第 2 小题的唯一性可知 $T(z_n) \rightarrow T(z)$.

4) 由第 3 小题可知 h 在 $B_{\rho} \backslash\{0\}$ 上连续. 下面证明 h 在原点处连续. 对任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min \left\{\rho, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. 当 $|z|<\delta$ 时,

$$|h(z)|=\left|e^{-T(z) D} \phi(T(z), z)\right| \leq e^{|\mu| T(z)}|\phi(T(z), z)|=e^{|\mu| T(z)} r.$$

又由于 $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)=0$, 故当 $|z|<\delta$ 足够小时有 $e^{|\mu| T(z)}<2$, 因此 $|h(z)|<\varepsilon$.

5) 取任意的 $y_0 \in h\left(B_{\rho}\right)$, 则存在 $z_0 \in B_{\rho}$ 使得 $h(z_0)=y_0$. 取 $\varepsilon>0$ 使得 $B_{\varepsilon}\left(z_0\right) \subset B_{\rho}$. 由 h 在 B_{ρ} 上连续可知存在 $\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时有 $\left|h(z)-h\left(z_0\right)\right|<\varepsilon$, 即 $h\left(B_{\delta}\left(z_0\right)\right) \subset B_{\varepsilon}\left(y_0\right)$. 因此 $h\left(B_{\rho}\right)$ 为开集. 下面证明 $h: B_{\rho} \rightarrow h\left(B_{\rho}\right)$ 为同胚. 取任意的 $y \in h\left(B_{\rho}\right)$, 则存在唯一的 $z \in B_{\rho}$ 使得 $h(z)=y$. 因此只需证明 h 为单射即可. 设 $h(z_1)=h(z_2)$, 则

$$e^{-T(z_1) D} \phi\left(T\left(z_1\right), z_1\right)=e^{-T(z_2) D} \phi\left(T\left(z_2\right), z_2\right).$$

不失一般性, 设 $T\left(z_1\right) \leq T\left(z_2\right)$, 则有

$$\phi\left(T\left(z_2\right)-T\left(z_1\right), \phi\left(T\left(z_1\right), z_1\right)\right)=\phi\left(T\left(z_2\right), z_2\right).$$

由 ϕ 的唯一性可知 $z_1=z_2$.

6) 对任意的 $z \in B_{\rho}$ 以及 $t \in I_z$ 使得 $\phi(t, z) \in B_{\rho}$, 由定义有

$$h(\phi(t, z))=e^{-T(\phi(t, z)) D} \phi(T(\phi(t, z)), \phi(t, z)).$$

又由于

$$\phi(T(\phi(t,z)),\phi(t,z))=\phi(T(\phi(t,z))+t,z),$$

且由定义可知 $T(\phi(t,z))+t=T(z)$, 因此

$$h(\phi(t,z))=e^{-T(z)D}\phi(T(z)+t,z)=e^{tD}e^{-T(z)D}\phi(T(z),z)=e^{tD}h(z).$$

$\square$