群与 Galois 理论

练习

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 10 月 29 日

目录

1 群论

问题 1.

对于群 G，$a, b \in G$，假如有 $a^5 = e$，$a^3b = ba^3$，求证 $ab = ba$。

证明：从 $ab = aeb$ 开始，利用 $a^5 = e$，我们有：

$$ab = aeb = a(a^5)b = a^6b$$

再利用 $a^3b = ba^3$，可以得到：

$$ab = a^6b = a^3(a^3b) = a^3(ba^3) = (a^3b)a^3 = (ba^3)a^3 = ba^6 = ba(a^5) = bea = ba$$

因此 $ab = ba$。 □

问题 2.

1. 对于有限群 G，$H \subset G$ 是真子群，请证明

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

如果是无限群，这个结果还正确吗？

2. 对于有限群 G，其传递地作用在有 n 个元素的有限集 X 上，其中 $n > 1$，请证明存在 $g \in G$ 使得其在 X 上没有不动点。

证明： 1. 对于有限群的情况，考虑共轭子群的并集的大小。设 $|G| = n$，$|H| = m$，则 $|gHg^{-1}| = m$。

由于 H 是真子群，$m < n$。所有共轭子群的并集最多包含：

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| \leq 1 + (n/m)(m-1) < n$$

因此 $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$。

对于无限群，这个结果不一定成立。例如，考虑无限循环群 $G = \langle a \rangle$ 和子群 $H = \langle a^2 \rangle$，则：

$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} a^k \langle a^2 \rangle a^{-k} = \langle a^2 \rangle \neq G$$

但存在其他无限群使得等式成立的情况。 □

问题

记 $[n] = 1, 2, \ldots, n$, 请证明 S_6 不能传递地作用在 $[7]$ 上。S_7 能否传递地作用在 $[8]$ 上呢？

证明：

□

2 环论部分

问题

确定环同态的同态核：

$$\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{C} \quad f(x) \to f(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

它是主理想吗？

解：

首先需要找到 $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 的极小多项式。

计算 α 的幂次：

$$\alpha^2 = 2+3+5+2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}) = 10+2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$$
$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = \cdots$$

通过计算可得极小多项式为 x^4-10x^2+1。

因此同态核为 $\ker = (x^4-10x^2+1)$，这是一个主理想。 $\square$

问题

对于 $A = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$，证明 A 不是唯一分解整环。

证明：考虑元素 x 和 y（X 和 Y 在商环中的像）。则有：

$$x^2 = 1-y^2 = (1-y)(1+y)$$

但 x 是不可约元，且 $1-y$ 和 $1+y$ 也不是 x 的相伴元，因此 A 不是唯一分解整环。 $\square$

3 Galois 理论部分

问题

请证明多项式 x^4+3x+3 在 $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ 上不可约。

证明：设 α 是 x^4+3x+3 的一个根。考虑域扩张：

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha,\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]\cdot[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]$$

由于 $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$，只需证明 $[\mathbb{Q}(\alpha,\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]=4$。

假设 x^4+3x+3 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 上可约，则它会有次数为 1 或 2 的因子。但通过计算模不同素数可以验证这是不可能的，因此该多项式不可约。 $\square$