清华大学 2025-2026 秋季学期，群与 Galois 理论，作业 2

请用 A4 大小的纸张**正反面**用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并注明自己的姓名、年级（书院或系）和作业的**总页数**。除定理公式所涉及的人名之外，请使用**中文**。本次作业请扫描并上传至网络学堂，具体截止日期请查阅网络学堂，逾期视作零分。

A. 对称群 $\mathfrak{S}_n$ 中的计算

假设 $n \geqslant 2$。

A1) 假设 $S=\big\{(i,j)\big\}$ 是一些对换（2-循环）的集合并且 S 生成 $\mathfrak{S}_n$，那么，$|S|$ 的最小值是多少?

A2) 假设 $|i_0-j_0|$ 与 n 互素。证明，$S_4=\big\{(i_0,j_0),(1,2,\cdots,n)\big\}$ 生成 $\mathfrak{S}_n$。

A3) 假设 $n\geqslant 5$。证明，$\mathfrak{A}_n$ 中的所有 3-循环是（在 $\mathfrak{A}_n$ 中）相互共轭的。

A4) 证明，$\mathfrak{A}_5$ 可以被双对换 $\{(i,j)(k,l)|1\leqslant i,j,k,l\leqslant 5\text{且两两不同}\}$ 生成。

A5)（$\mathfrak{A}_5$ 的自同构群）令 $G=\mathfrak{A}_5$。

a) 假设 $x=(12)(34)\in G$，$y\in G$ 的是一个 3 阶元。证明，xy 的阶为 5 当且仅当 y 的两个不动点一个在 $\{1,2\}$ 中并且另一个在 $\{3,4\}$ 中。

b) 令 $X=\{(u,v)\in G\times G\big|u,v,uv \text{ 的阶分别为 } 2,3,5\}$，证明，$|X|=120$。

c) $\mathbf{Aut}(G)$ 作用在 X 上，证明，这个作用是自由的。据此，$|\mathbf{Aut}(G)|\leqslant 120$。由于 $\mathbf{Aut}(G)$ 包含 $\mathfrak{S}_5$，从而 $\mathbf{Aut}(G)=\mathfrak{S}_5$。

A6)（$\mathfrak{A}_4$ 的自同构群）用 $(2,3,3)$（元素的阶）替换 $(2,3,5)$，试用类似的方法证明 $\mathbf{Aut}(\mathfrak{A}_4)=\mathfrak{S}_4$。

A7)（$\mathfrak{S}_4$ 的自同构群）用 $(2,3,4)$（元素的阶）替换 $(2,3,5)$，试用类似的方法证明 $\mathbf{Aut}(\mathfrak{S}_4)=\mathfrak{S}_4$。

A8) 试用 A6) 的结论证明 A7)。

B. 交错群 $\mathfrak{A}_n$（$n\geqslant 5$）是单群

如果群 G 除了 1 和本身之外没有其它的正规子群，我们就称 G 是**单群**。很明显，循环群只有在其阶为素数时为单群。

B0) 给出 $\mathfrak{A}_3$ 和 $\mathfrak{A}_4$ 的正规子群。

B1) 我们按照以下步骤证明 $\mathfrak{A}_5$ 是单群:

B1-1) 假设 $N\lhd\mathfrak{A}_5$ 是正规子群并且 $N\neq 1$。假设 N 包含一个双置换（两个不交的置换之积），不妨设为 $\sigma=(1,2)(3,4)$，证明，$\tau=(1,5)(3,4)$ 在 $\mathfrak{A}_5$ 中与 σ 共轭。特别地，证明 $\sigma\tau$ 是 3-循环。

B1-2) 假设 $N\lhd\mathfrak{A}_5$ 是正规子群并且 $N\neq 1$。假设 N 包含一个 5-循环，不妨设为 $\sigma=(1,2,3,4,5)$，证明，$\tau=(2,3,1,4,5)$ 在 $\mathfrak{A}_5$ 中与 σ 共轭。特别地，证明 $\tau\sigma^2$ 是 3-循环。

B1-3) 假设 $N\lhd\mathfrak{A}_5$ 是正规子群并且 $N\neq 1$。证明，N 包含所有的 3-循环，从而，$\mathfrak{A}_5$ 是单群。

B2) 我们还可以按照以下步骤证明 $\mathfrak{A}_5$ 是单群

B2-1) 证明，$\mathfrak{A}_5$ 有五个共轭类并且每个共轭类中的元素个数分别为 $1, 12, 12, 15$ 和 20。

B2-2) 子群 $N \subset \mathfrak{A}_5$ 在 $\mathfrak{A}_5$ 的共轭下不变。证明，$|N|$ 只能等于 $1, 13, 16, 21, 25, 28, 33, 36, 40, 45, 48$ 和 60。

B2-3) 证明，$\mathfrak{A}_5$ 是单群。

B3) 以下假设 $n \geqslant 6$ 并且 $\mathfrak{A}_{n-1}$ 是单群。假设 $N \lhd \mathfrak{A}_n$ 是正规子群并且 $N \neq 1$，$N \neq \mathfrak{A}_n$。

B3-1) 如果存在 $\sigma \in N - \{1\}$ 使得 $\sigma(n) = n$，证明，$N = \mathfrak{A}_n$。

B3-2) 证明，对任意的 $\sigma \in N - \{1\}$，只要 $\{i, j\} \cap \{\sigma(n), n\} = \emptyset$，那么，$\tau\sigma\tau^{-1}\sigma = 1$，其中，$\tau = (i, j)(n, \sigma(n))$。

B3-3) 同上，证明，$\sigma^2 = 1$ 并且 $\sigma : \{i, j\} \to \{i, j\}$。（提示：考虑 $\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}$）

B3-4) 证明，$\sigma = \big(n, \sigma(n)\big)$ 从而得到矛盾。据此，$\mathfrak{A}_n$ 是单群。

B4) 假设 $n \geqslant 5$，$G \lhd \mathfrak{S}_n$ 为正规子群，证明，如果 $G \neq 1$，$G \neq \mathfrak{S}_n$，那么，$G = \mathfrak{A}_n$。

B5) 证明，$N = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ 是 $\mathfrak{S}_4$ 的正规子群并且 $N \lhd \mathfrak{A}_4$。${}^{\mathfrak{S}_4}\!/_{N}$ 是哪一个群?

B6) 假设 $n \geqslant 5$，$H < \mathfrak{S}_n$ 为子群，$d = [\mathfrak{S}_n : H]$。证明，存在群同态 $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_d$，使得 $\mathrm{Ker}(\varphi) < H$。据此证明，如果 $H \neq \mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_n$，那么，$d \geqslant n$。

B7) 证明，对于 $n \geqslant 2$，存在单的群同态 $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{A}_{n+2}$（从而 $\mathfrak{S}_n$ 可被视作是 $\mathfrak{A}_{n+2}$ 的子群）但是不存在单的群同态 $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{A}_{n+1}$。