群与 Galois 理论
作业 3

陈宏泰

2024011131

清华大学数学科学系

cht24@mails.tsinghua.edu.cn

2025 年 10 月 29 日

目录

A. 60 阶的单群

A1)

证明：由 Sylow 第二定理,

$$s_5 \equiv 1 \pmod 5,$$

故 s_5 可能的取值为 1,6,11,16,21,26,31,36,41,46,51,56. 同时 $s_5 \big| |G| = 60$, 故 $s_5 = 1$ 或 6. 由假设知 $s_5 \neq 1$, 所以 $s_5 = 6$. □

A2)

证明： (a)

由于课上命题, 通过对大群的 Sylow p-子群共轭可以得到子群的 Sylow p-子群. 于是 $\exists\ g \in G$, s.t.$H \cap gS_1g^{-1}$ 是 H 的 Sylow p-子群. 由于 $|H|$ 是 5 的倍数, H 的 Sylow p-子群的阶为 5, 所以 $gS_1g^{-1} \subset H$. 又由 Sylow 第二定理, $\exists\ g_i \in G$, s.t.$S_i = g_iS_1g_i^{-1}$, 其中 $i \in \{2,3,4,5,6\}$. 由于 H 是正规子群, 于是 $S_i \subset H, \forall\ i$. 可得 $|H| \geqslant 1 + (5-1) \times 6 = 25$. 又 $|H| \big| 60$, 得到 $|H| = 30$.

(b)

由 (a) 中证明过程, H 有 1 个单位元, $(5-1) \times 6 = 24$ 个阶为 5 的元素有 $(5-1) \times 6 = 24$ 个, 于是其他阶的元素只剩下 5 个, 有 $(3-1)s_3 \leq 5$. 由 Sylow 第二定理,

$$s_3 \equiv 1 \pmod 3,$$

于是 s_3 可能的取值为 1,4,7,10,$\cdots$. 于是 $s_1 = 1$. H 只有一个 Sylow 3-子群 T.

(c)

$\forall\ s_1t_1, s_2t_2 \in S_1T$, 如果 $s_1t_1 = s_2t_2$, 那么 $s_2^{-1}s_1 = t_2t_1^{-1}$. 因为 $s_2^{-1}s_1 \in S_1$, $t_2t_1^{-1} \in T$, $S_1 \cap T = \{1_H\}$, 所以 $s_2^{-1}s_1 = t_2t_1^{-1} = 1_H \Rightarrow s_1 = s_2, t_1 = t_2$. 故 $\forall\ s_1 \neq s_2 \in S_1, t_1 \neq t_2 \in T, s_1t_1 \neq s_2t_2$. 于是 $|S_1T| = 15$.

由于 H 只有一个 Sylow 3-子群 T, 故 $T \triangleleft H$. $\forall\ s_1t_1, s_2t_2 \in S_1T$, 有 $(t_1t_2^{-1})s_2 = s_3t_3 \in S_1T$, 于是

$$(s_1t_1)(s_2t_2)^{-1} = s_1(t_1t_2^{-1}s_2) = s_1(s_3t_3) = (s_1s_3)t_3 \in S_1T.$$

故 S_1T 是 H 的子群, 且阶为 15.

(d)

S_1T 在 H 中的指数为 2, 故 S_1T 是 H 的正规子群. 由于 $S_1 \subset S_1T$, 故 $S_i = g_iS_1g_i^{-1} \subset S_1T$. 但同时对于 S_1T, 有 $(5-1)s_5 \leq 15$, 故 S_1T 只有 1 个 Sylow 5-子群. 即所有 $S_i, \forall\ i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ 都是相同的, 故 H 将只有 1 个 Sylow 5-子群. 而这与 (a) 中结论矛盾.

综上, $|H|$ 不是 5 的倍数.

□

A3)

证明： (a)

G/H 的阶只能是 15,20,30. 对于 G/H, $(5-1)s_5 \leqslant |G/H|-1$.

如果 $|G/H|=15$, $s_5<4$, 故 $s_5=1$.

如果 $|G/H|=20$, $s_5<5$, 故 $s_5=1$.

如果 $|G/H|=30$, $s_5<8$, 故 $s_5=1$ 或 6. 如果 $s_5=6$, 类似于 A2)(b)(c)(d) 的讨论, 可以推出矛盾. 故 $s_5=1$.

综上, $s_5=1$, G/H 只有一个 Sylow 5-子群.

(b)

取 G/H 的 Sylow 5-子群 $S=\{H=g_0H, g_1H, g_2H, g_3H, g_4H\}$, 那么令

$$H'=\bigcup_{i=0}^{4} g_iH,$$

我们断言这是 G 的一个正规子群. 下面证明：

首先, $\forall\ h_1'=g_ih_1, h_2'=g_jh_2 \in H'$,

$$h_1'(h_2')^{-1}=(g_ih_1)(g_jh_2)^{-1}=g_i(h_1h_2^{-1})g_j=g_i(g_jh_3)\in(g_ig_j)H\subset H',$$

于是 H' 是 G 的子群. 而 $\forall\ g\in G$, 有 $gSg^{-1}=S \Rightarrow \forall\ h'\in H', gh'g^{-1}\in H'$. 于是 $H'\lhd G$, 且 $H'\neq G$, $|H'|$ 是 5 的倍数. 由 A2) 推出矛盾. □

A4)

证明： 对于 $|H|=6$ 的情况, $s_2=1,3,\cdots, s_3=1,4,\cdots, s_2|6, s_3|6$, 并且 $s_2+2s_3\leqslant 5$, 只能有 $s_3=1, s_2=1$ 或 3.

对于 $|H|=12$ 的情况, $s_2=1,3,\cdots, s_3=1,4,\cdots, s_2|12, s_3|12$, 并且 $3s_2+2s_3\leqslant 11$, 只能有 $s_2=1, s_3=1$; $s_2=3, s_3=1$ 或者 $s_2=1, s_3=4$.

综上, H 只有一个 Sylow 2-子群或只有一个 Sylow 3-子群. 不妨记为 H' 其为 Sylow p-子群, 有 $H'\lhd H$, $|H'|\leqslant 4$. $\forall\ g\in G, h'\in H'$, 有 $gh'g^{-1}\in H$. 并且由于 $gh'g^{-1}$ 与 h' 在 H 中的阶相同, 于是 $|gh'g^{-1}|\big|p^2$. 由于 H' 是 H 中唯一的 Sylow p-子群, 于是 $gh'g^{-1}\in H'$. 这推出 $H'\lhd G$, 由 A3) 可知矛盾呢. □

A5)

证明： 考虑 G 在 G/H 的作用, 这显然是传递的. 这又诱导了一个群同态 φ :

$$G\to\mathfrak{S}_{G/H}\cong\mathfrak{S}_d,$$

其中 $d=|G/H|=[G:H]$. 由于 $\ker\varphi\lhd G$ 以及 G 是单群, $\ker\varphi=1$(显然 $\ker\varphi\neq G$). 于是 φ 是一个单射. 从而有 $|G|\big|d!$, 于是 $d\geqslant 5$.

如果 $d=5$, 可以将 G 视为 $\mathfrak{S}_5$ 的一个子群, 此时 $[\mathfrak{S}_5:G]=2$, 于是 $G \lhd \mathfrak{S}_5$. 由作业二知 $G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A6)

证明：考虑 G 在 Sylow p-子群的集合 X 上的作用:

$$G \times X \to X, \quad (g, S_i) \mapsto gS_ig^{-1},$$

X 记为 $\{S_1, S_2, \cdots, S_{s_p}\}$. 于是由 Sylow p-子群的共轭性质, 其诱导了一个群同态 φ :

$$G \to \mathfrak{S}_X \cong \mathfrak{S}_{s_p}, \quad g \mapsto \{S_i \mapsto gS_ig^{-1}\}.$$

同 A5) 的证明, 可以得到 $\ker\varphi = \{1\}$, 且 $|X| \geqslant 5$, 即 $s_p \geqslant 5$. 再结合 $s_p \equiv 1(\pmod p), s_p|60$, 可以得到 $s_2 \in \{5, 15\}, s_3 = 10, s_5 = 6$. □

A7)

证明：如果 $s_2 = 5$, 那么由 A6) 中的 φ 知 $G < \mathfrak{S}_5 \Rightarrow G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A8)

证明：首先我们有, 两个 p 阶循环群, 除去单位元之外无共同元素. 假设 R, S 是两个阶为 p 的循环群, 且有非单位元的的共同元素 r, 那么 $R = \{1, r, r^2, \cdots, r^{p-1}\} = S$.

假设每两个 Sylow 2-子群共同元素只有单位元, 那么 G 中将有 $1 + 3s_2 + 2s_3 + 4s_5 = 90$ 个不同的元素, 这与 $|G| = 60$ 矛盾. 于是存在两个不同的 Sylow 2-子群 P, Q 有共同的非单位元的元素. 并且每个 Sylow 2-子群都共轭, 所以结构相同, 又不是循环群, 故都是 Klein 四元群. Klein 四元数群中每个元素都为 2 阶, 且这是交换群.

接下来考虑 $|P \cap Q|$. $|P \cap Q| = 4$ 导致 $P = Q$. 若 $|P \cap Q| = 3$, 由 Klein 四元数群的结构, 剩下一个不同元素又可以由两个共同的非单位元元素生成, 导致 $|P \cap Q| = 4$, 矛盾. 于是 $|P \cap Q| = 2$.

现在记 $D = P \cap Q = \{1, s\}$, 这是 G 的一个 2 阶子群. 注意到 P 是 Klein 四元群从而是交换的, 故而 P 中元素都与 s 交换, 从而 $R < N_G(D)$. 于是 $4\big||N_G(D)|$, 又 $|N_G(D)|\big|60$, $P \cup Q \subset N_G(D) \Rightarrow |N_G(D)| \geqslant 6$, 故 $|N_G(D)| = 12$ 或 20.

又 $N_G(D) < G$, 由 A5), $[G : N_G(D)] \geqslant 5 \Rightarrow |N_G(D)| \leqslant 12$.

故只能有 $|N_G(D)| = 12, [G : N_G(D)] = 5$. 意味着 $G \simeq \mathfrak{A}_5$. □

A9)

证明：由 A7), A8), 无论 s_2 取值为 5 还是 15, 都有 $G \simeq \mathfrak{A}_5$.

只需计算 $\mathfrak{A}_5$ 的 s_2 即可. 由 A8) 讨论知, 其中 Sylow 2-子群都为 Klein 四元群. 只需考察

(12)(34) 在哪些 Klein 四元群中. 有以下几种不同的情况:

$$((13)(24))((12)(34)) = (14)(23),$$
$$((12)(35))((12)(34)) = (345),$$
$$((13)(25))((12)(34)) = (15234).$$

只有第一种情况, (12)(34), (13)(24), (14)(23) 构成 Klein 四元群. 故 Sylow 2-子群共有 15/3=5 个, 即 $s_2 = 5$. □

B. 与 Sylow p-子群相关的补充

B1)

证明: 考虑 S 在 $G/N_G(S)$ 上的作用:

$$S \times G/N_G(S) \to G/N_G(S), \quad (g, hN_G(S)) \mapsto ghg^{-1}N_G(S).$$

注意到 $N_G(S) \in G/N_G(S)$ 被 S 固定, 而对于其他 $hN_G(S) \in G/N_G(S)$, 有 $ghg^{-1} \notin N_G(S)$, 否则 $h \in g^{-1}N_G(S)g \Rightarrow h \in N_G(S) \Rightarrow hN_G(S) = N_G(S) \in G/N_G(S)$. 于是由讲义引理 28, $[G : N_G(S)] \equiv 1 \pmod p$. □

B2)

证明: 由 Sylow 定理可知, $\exists\ g \in G, \text{s.t. } H \cap gSg^{-1}$ 是 H 的 Sylow p-子群. 于是自然地有 $g^{-1}(H \cap gSg^{-1})g = g^{-1}Hg \cap S$ 是 $g^{-1}Hg$ 的 Sylow p-子群. 又 $H \lhd G$, 于是 $g^{-1}Hg = H$. 故 $H \cap S$ 是 H 的 Sylow p-子群. □

B3)

证明: 设 $|G| = p^a m$, 其中 $p \nmid m$, 则 $|S| = p^a$. 设 $|H| = p^c n$, 其中 $p \nmid n$. 由于 $H \lhd G$, 于是 $|G/H| = p^{a-c}(m/n)$, 由于 $p \nmid (m/n)$, 故 G/H 的 Sylow p-子群的阶为 p^{a-c}.

一方面: 考虑 $S \cap H$, 由 B2) 结论知, $|S \cap H| = p^c$. 由于 $H \lhd G$, 有 $S \cap H \lhd S$. 考虑 π 在 S 上的限制 $\pi_1 : S \to G/H$, 有 $\ker \pi_1 = \{s \in S \mid sH = H\} = \{s \in S \mid s \in H\} = S \cap H$. 由第一同构定理, $S/S \cap H \simeq \pi_1(S) = \pi(S)$. 于是 $|\pi(S)| = |S/S \cap H| = |S|/|S \cap H| = p^a/p^c = p^{a-c}$, 这表明 $\pi(S)$ 是 G/H 的 Sylow p-子群.

反之: 如果 $S' < G/H$ 是 Sylow p-子群, 考虑 S' 的原像 $K = \pi^{-1}(S')$, 则 K 显然是 G 的一个子群, 并且 $|K| = |S'||H| = p^{a-c}p^c n = p^a n$. 由 Sylow 第一定理, K 有 Sylow p-子群 S, 于是这也是 G 的 Sylow p-子群. 显然有 $\pi(S) < S'$, 另一方面由前可知 $\pi(S)$ 也是 G/H 的 Sylow p-子群, 故而 $|\pi(S)| = p^{a-c} = S'$, 从而 $\pi(S) = S'$. □

B4)

证明:

- 显然有 $H \cdot \mathrm{Stab}_G(x) \subset G$. $\forall\ g \in G$, 由于 ${}^{H}\!\curvearrowright X$ 是传递的, $\exists\ h \in H, \text{s.t. } g(x) = h(x)$, 于是 $h^{-1}g(x) = x \Rightarrow h^{-1}g \in \mathrm{Stab}_G(x)$. 从而 $g \in h\mathrm{Stab}_G(x) \Rightarrow G \subset H \cdot \mathrm{Stab}_G(x)$. 综上, $G = H\mathrm{Stab}_G(x)$.

- 考虑 H 所有 Sylow p-子群构成的集合 $X = \{S_i \mid S_i < H\text{为 Sylow } p\text{-子群}\}$, 考虑 G 在 X 上的共轭作用:

$$G \times X \to X, \quad (g, S_i) \mapsto gS_ig^{-1}.$$

先说明这个作用是良定义的. 由于 $S_i \subset H$, 又 $H \triangleleft G$, 所以 $gS_ig^{-1} \subset H$. 又由 Sylow 定理, $gS_ig^{-1} \in X$, 从而这个共轭作用是良定义的.

同时 Sylow 定理第二定理指出 $^{H}\curvearrowright X$ 是传递的. 对于这个作用, $\mathrm{Stab}_G(S) = N_G(S)$, 故由前一问知 $G = H \cdot N_G(S)$.

□

B5)

证明： 由于 $S < G$ 是一个 Sylow p-子群, 又 $S < N_G(S) \subset H < G$, 于是 S 也是 H 的 Sylow p-子群. $\forall\ g \in N_G(H), gSg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$. 故 gSg^{-1} 也是 H 的一个 Sylow p-子群. 由 Sylow 第二定理, $\exists\ h \in H, \text{s.t. } hSh^{-1} = gSg^{-1}$, 即 $h^{-1}gSg^{-1}h = S \Rightarrow h^{-1}g \in N_G(S)$. 从而 $g \in hN_G(S) \subset hH = H$, 即 $N_G(H) \subset H$. 结合 $H \subset N_G(H)$, 有 $H = N_G(H)$. □

B6)

证明： 在 B5) 中令 $H = N_G(S)$ 即得 $N_G(H) = N_G(N_G(H))$. □