ODE–第九次作业

习题 1 考虑两个一维向量场$F:(0,1)\to\mathbb{R};G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$$F(r)=\frac{r(1-r^2)}{2};\quad G(r)=\frac{r}{2}.$$

1) 证明$\dot r=F(r)$ 与$\dot r=G(r)$的相流均存在，并分别计算它们的相流。

2) 证明$\dot r=F(r)$ 与$\dot r=G(r)$拓扑共轭。

3) 证明$\dot X=F(X)$与$\dot Y=G(Y)$在平衡点附近局部拓扑共轭，这里

$$F(x,y):=(x/2-y-x(x^2+y^2)/2,x+y/2-y(x^2+y^2)/2);$$
$$G(x,y):=(x/2-y,x+y/2).$$

习题 2 设$F\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$，且$F(0)=0$, $F'(0)=D$，其中

$$D=\begin{bmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{bmatrix};\quad \lambda\le\mu<0.$$

本题的目的是证明$\dot X=F(X)$与$\dot Y=DY$在平衡点附近局部拓扑共轭。我们用$\phi(t,z)$表示初值问题

$$\dot X=F(X);\quad X(0)=z$$

的极大解，其定义域记为I_z。承认（以后会证明）ϕ作为(t,z)的映射在其定义域上为C^1光滑。

1) 证明存在$\rho>0$使得对任意的$r\in(0,\rho]$，向量场$F(X)$限制在$S_r:=\{X\in\mathbb{R}^2:|X|=r\}$上朝向圆内，即

$$F(X)\cdot X<0,\quad \forall X\in S_r.$$

2) 固定$r \in (0,\rho)$。对任意的$z \in B_\rho := \{X : |X| < \rho\}$且$z \neq 0$，证明存在$T(z) \in I_z$使得$\phi(T(z), z) \in S_r$。

3) 证明$T : B_\rho \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$连续。

4) 定义$h : B_\rho \to \mathbb{R}^2$为$h(0) = 0$，

$$h(z) := e^{-T(z)D}\phi(T(z), z), \quad z \in B_\rho \setminus \{0\}.$$

证明h连续。

5) 证明$h(B_\rho)$为开集，且$h : B_\rho \to h(B_\rho)$为同胚。

6) 证明h为$\dot{X} = F(X)$与$\dot{Y} = DY$的局部拓扑共轭，即对任意的$z \in B_\rho$以及$t \in I_z$使得$\phi(t, z) \in B_\rho$有

$$h(\phi(t, z)) = e^{tD}h(z).$$