ODE–第八次作业

习题 1 定义矩阵值函数

$$A(t) := \begin{bmatrix} t^2 & -1 \\ 2t & 0 \end{bmatrix}.$$

考虑线性方程$\dot{x} = A(t)x$。

1) 验证$\phi(t) := (1, t^2)^t$是方程的解。

2) 做如下变量替换：

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix} y$$

写出y满足的微分方程。

3) 求解*2)*中得到的微分方程。并得到原方程的一个解。

4) 求原方程的一组基。

习题 2 求系统$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ 的流$\Pi(t, s)$。

习题 3 验证讲义第四部分性质*13*证明过程中的等式

$$e^{\mu I_m + B} = J_\lambda(m).$$

习题 4 本题的目的是证明性质*14*.

1) 设$A, B \in M_d(\mathbb{R})$且$A = e^B$。设$\lambda < 0$是A的特征值。证明B有形如

$$\log(-\lambda) \pm (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

的一对特征根。由此证明：若$J_\lambda(m)$出现在A的$Jordan$标准型中，则其必出现偶数次。

2) 设$a,b\in\mathbb{R}$且$b\neq 0$，则存在$D\in M_2(\mathbb{R})$使得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = e^D.$$

特别的，存在$D\in M_2(\mathbb{R})$使得$e^D=-I_2$。

3) 证明如下两个矩阵相似：

$$\begin{bmatrix} J_\lambda(m) & \\ & J_\lambda(m) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda I_2 & I_2 & & & \\ & \lambda I_2 & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda I_2 & I_2 \\ & & & & \lambda I_2 \end{bmatrix}$$

4) 设$C,D\in M_2(\mathbb{R})$使得$C=e^D$，则存在$B\in M_{2m}(\mathbb{R})$使得

$$\begin{bmatrix} C & I_2 & & & \\ & C & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & C & I_2 \\ & & & & C \end{bmatrix} = e^B.$$

5) 证明性质*14*。

习题 5 *1)* 设$A,B\in M_d(\mathbb{C})$且$A=e^B$。证明A可对角化当且仅当B可对角化。

2) 设$A\in M_d(\mathbb{C})$可逆。证明A可对角化当且仅当A^2可对角化。

（注：此二性质用在了定理*7*的证明过程中）