清华大学 2025-2026 秋季学期，群与 Galois 理论，作业 3

请用 A4 大小的纸张**正反面**用钢笔，签字笔或者圆珠笔书写，并注明自己的姓名、年级（书院或系）和作业的**总页数**。除定理公式所涉及的人名之外，请使用**中文**。本次作业请扫描并上传至网络学堂，具体截止日期请查阅网络学堂，逾期视作零分。

A. 60 阶的单群

G 是群，其阶为 60，s_p 为其 Sylow p-子群的个数。我们用反证法证明：如果 $s_5 \neq 1$，那么 G 是单群。选取 $H \lhd G$ 使得 $H \neq 1, H \neq G$。

1. 证明，$s_5 = 6$。将这个 6 个 Sylow 5-子群记作 $S_1, S_2, \cdots, S_6$。
2. 假设 $|H|$ 是 5 的倍数。
   (a) 证明 $|H| = 30$ 并且 $S_1, S_2, \cdots, S_6 \subset H$；
   (b) 通过数 H 中阶为 5 和阶为 3 的元素个数，证明，H 只有一个 Sylow 3-子群 T。
   (c) 证明，$S_1 \cdot T = \{st | s \in S_1, t \in T\}$ 是 H 的阶为 15 的子群。
   (d) 证明，$S_1 \cdot T$ 和 H 都只有 1 个 Sylow 5-子群。据此推出矛盾。
3. 假设 $|H| \leqslant 4$。
   (a) 证明，${}^{G}\!/_{H}$ 只有一个 Sylow 5-子群；
   (b) 证明，存在 $H' \lhd G$，$H' \neq G$ 并且 $|H'|$ 是 5 的倍数。据此推出矛盾。
4. 假设 $|H| = 6$ 或者 $|H| = 12$。证明，H 只有一个 Sylow 2-子群或只有一个 Sylow 3-子群。据此推出矛盾。
5. 以下假设 G 是阶为 60 的单群。$H < G$ 是子群并且 $H \neq G$。通过考虑 G 在 ${}^{G}\!/_{H}$ 的作用，证明 $[G : H] \geqslant 5$ 并且 $[G : H] = 5$ 意味着 $G \simeq \mathfrak{A}_5$。
6. 通过考虑 G 在 Sylow p-子群的集合上的作用证明，$s_2 \in \{5, 15\}$，$s_3 = 10$，$s_5 = 6$。
7. 假设 $s_2 = 5$，证明，$G \simeq \mathfrak{A}_5$。
8. 假设 $s_2 = 15$，证明，存在 Sylow 2-子群 P 和 Q，使得 $|P \cap Q| = 2$。进一步证明 $P \cap Q$ 的正规化子的指标为 5，即 $[G : \mathrm{N}_G(P \cap Q)] = 5$。
9. 证明，阶为 60 的单群与 $\mathfrak{A}_5$ 同构并计算 s_2 的值。

B. 与 Sylow p-子群相关的补充

1. G 是有限群，$S < G$ 是一个 Sylow p-子群。证明，$[G : \mathrm{N}_G(S)] \equiv 1 \pmod{p}$。
2. G 是有限群，$S < G$ 是一个 Sylow p-子群，$H \lhd G$ 是正规子群。证明，$S \cap H$ 是 H 的 Sylow p-子群。

3. G 是有限群，$H \lhd G$ 是正规子群，$\pi : G \to {}^{G}\!/\!_{H}$ 是自然投影。证明，如果 $S < G$ 是 Sylow p-子群，那么，$\pi(S)$ 是 ${}^{G}\!/\!_{H}$ 的 Sylow p-子群；反之，如果 $S' < {}^{G}\!/\!_{H}$ 是 Sylow p-子群，那么，存在 G 的 Sylow p-子群 S，使得 $\pi(S) = S'$。

4.（Frattini 技巧）

- 群 G 作用在集合 X 上，$H < G$ 是子群，那么，${}^{G}\curvearrowright X$ 诱导出 ${}^{H}\curvearrowright X$。假设 ${}^{H}\curvearrowright X$ 是传递的，证明，对任意的 $x \in X$，$G = H \cdot \mathrm{Stab}_G(x)$。
- （Frattini）G 是群，$H \lhd G$ 是有限的正规子群，$S < H$ 是 H 的一个 Sylow p-子群。证明，$G = H \cdot \mathrm{N}_G(S)$。

5. G 是有限群，$S < G$ 是一个 Sylow p-子群，$H < G$ 是子群并且 $H \supset N_G(S)$。证明，$H = \mathrm{N}_G(H)$。

6. G 是有限群，$S < G$ 是一个 Sylow p-子群。证明，$\mathrm{N}_G(S) = \mathrm{N}_G(\mathrm{N}_G(S))$。