Bilgisayar.

Nümerik Analiz

Yrd. Doç. Dr.
Hasan Temurtaş

Hata Tanımları

E_t = Gerçek Hata = Gerçek Değer − Yaklaşık Değer

$$\epsilon_t = \text{Gerçek Hata Yüzdesi} = \frac{\text{Gerçek Hata}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\ \%$$

E_a = Bağıl Hata = Mevcut Yaklaşım Değeri − Önceki Yaklaşım Değeri

$$\epsilon_a = \text{Bağıl Hata Yüzdesi} = \frac{\text{Bağıl Hata}}{\text{Mevcut Yaklaşım Değeri}} \times 100\ \%$$

ϵ_s = Azami Bağıl Hata Yüzdesi

Bir çok durumda gerçek değer bilinemediğinden gerçek hata yüzdesi yerine bağıl hata yüzdesi kullanılır.

Yuvarlama Hatası

$5.37486 \approx 5.375$ (3. ondalığa kadar yuvarlama)

$5.37486 \approx 5.37$ (2. ondalığa kadar yuvarlama)

$$\epsilon_t = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\ \%$$

$$= \frac{5.37486 - 5.37}{5.37486} \times 100\ \% = 0.09\ \%$$

$e \approx 2.718281828459045\ldots$

$\pi \approx 3.141592653589793\ldots$

$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095\ldots$

uzantısı sonsuz ve peryodik değilse irrasyonel sayıdır. Hesap makinaları yuvarlayıp rasyonel yapar.

Güç Serisi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + b_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

N. dereceden polinom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_N x^N$$

$N \to \infty$ olursa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ güç serisi olur.

Bütün fonksiyonlar güç serisi şeklinde ifade edilebilir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{\text{türev}} f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{integral}} \int_0^x f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Ör: $S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$, $|x|<1$ için $S = \lim_{N\to\infty} S_N$ hesapla.

$$S_N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N$$

$$x.S_N = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}$$

$$S_N - x S_N = 1 - x^{N+1}$$

$$(1-x).S_N = 1 - x^{N+1} \longrightarrow S_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

$$f(x) = \frac{1}{5+3x} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-\left(-\frac{3x}{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{5^n} x^n$$

$$|x| < 5/3$$

Ör $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ fonksiyonunu güç serisi olarak ifade et. (5)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1 \text{ olduğundan}$$

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n.x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+4x^3+\dots \quad |x|<1$$

Ör $f(x)=\arctan x$ fonksiyonunu güç serisi olarak ifade et.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |x|<1 \text{ olduğundan}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.x^{2n},\ |x|<1$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ |x|<1$$

Ör $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$ güç serisinin yakınsaklık yarıçapı ve aralığı?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1).3^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{n.3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{|x-5|}{3}=\frac{|x-5|}{3}<1$$

$$|x-5|<3 \longrightarrow y.y=3,\ y.a=(2,8)$$

Ör $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ |x|<1$ olduğundan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n.\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Taylor Serisi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

$f(x)$ fonksiyonunu polinom şeklinde yazarsak

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-x_0)^n \;,\quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \longrightarrow \text{Güç serisi}$$

Maclaurin Serisi

x_0 yerine herhangi bir değer verilirse Taylor serisi Maclaurin serisine dönüşür.

$x_0 = 0$ alınırsa

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$$

$f(x)$ polinom şeklinde yazılırsa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;,\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \longrightarrow \text{Güç serisi}$$

Bütün fonksiyonlar Taylor serisi (Maclaurin Serisi) şeklinde gösterilebilir.

$$f(x) = x^2 + 3x + 5 \longrightarrow a_0 = 5,\ a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_i = 0 \quad i = 3,4,5\ldots$$

Taylor Serisi ile yaklaşık değer bulma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

$x_0 \to x$, $x - x_0 \to \Delta x$ yazarsak

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x . f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

ilk üç terim kullanılarak

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x . f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} . f''(x)$$

ilk iki terim kullanılarak

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x . f'(x)$$

Δx çok küçük ise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y = f(x) + \Delta x . f'(x)$$

Ör: $\sqrt{5}$ sayısını yaklaşık olarak hesapla.

$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $x = 4$, $\Delta x = 1$ alınırsa

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x . f'(x)$$

$$f(5) = \sqrt{5} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$$

$$\epsilon_t = \frac{\text{Ger. Değ.} - \text{Yak. Değ.}}{\text{Ger. Değ.}} \times 100\,\% = \frac{\sqrt{5} - 2.25}{\sqrt{5}} \times 100\,\% = 0.27\,\%$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots , \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} , \quad |x| < 1$$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}, \quad |x|<1$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in R$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in R$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Taylor serisinin ilk 5 terimini kullanarak (+)

a) $e^{0.5}$ değerini b) e değerini c) e^2 değerini hesapla.

Hata yüzdelerini bul.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

a) $$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2} + \frac{(0.5)^3}{6} + \frac{(0.5)^4}{24} = 1.6484375$$

$$\epsilon_t = \frac{e^{0.5} - 1.6484375}{e^{0.5}} \times 100\ \% = 0.0172\ \%$$

b) $$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.708333333$$

$$\epsilon_t = \frac{e - 2.708333333}{e} \times 100\ \% = 0.366\ \%$$

c) $$e^2 \approx 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} = 7$$

$$\epsilon_t = \frac{e^2 - 7}{e^2} \times 100\ \% = 5.265\ \%$$

$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ taylor serisinin ilk 6 terimini kullanarak $\ln\sqrt{3}$ değerini bul, gerçek hata yüzdesini hesapla

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

$1+x=\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}-1$

$$\ln\sqrt{3} \approx (\sqrt{3}-1) - \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt{3}-1)^3}{3} - \frac{(\sqrt{3}-1)^4}{4} + \frac{(\sqrt{3}-1)^5}{5} - \frac{(\sqrt{3}-1)^6}{6}$$

$$= 0.539469718$$

$$\epsilon_t = \frac{\ln\sqrt{3} - 0.539469718}{\ln\sqrt{3}} \times 100\ \% = 1.79\ \%$$

Sr $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ taylor serisinin ilk 4 terimini kullanarak $\sin(\pi/2)$ değerini ve gerçek hata yüzdesini hesapla.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\sin(\pi/2) \approx \pi/2 - \frac{(\pi/2)^3}{6} + \frac{(\pi/2)^5}{120} - \frac{(\pi/2)^7}{5040} = 0.999843101$$

$$\epsilon_t = \frac{\sin(\pi/2) - 0.999843101}{\sin(\pi/2)} \times 100\% = 0.016\ \%$$

Sr $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ taylor serisinin ilk 3 terimini kullanarak $\cos(\pi/3)$ değerini ve gerçek hata yüzdesini hesapla

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \cos(\pi/3) \approx 1 - \frac{(\pi/3)^2}{2} + \frac{(\pi/3)^4}{24} = 0.501796201$$

$$\epsilon_t = \frac{\cos(\pi/3) - 0.501796201}{\cos(\pi/3)} \times 100\% = -0.359\ \%$$

Sr $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ taylor serisinin ilk 3 terimini kullanarak $\cosh(1)$ değerini ve gerçek hata yüzdesini hesapla

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \qquad \cosh(1) \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 1.541666667$$

$$\epsilon_t = \frac{\cosh(1) - 1.541666667}{\cosh(1)} \times 100\% = 0.092\ \%$$

Sr $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ taylor ser. ilk 4 terimini kul. $f(0.5)$ hes. ve $\epsilon_t = ?$

$f(0.5) = 2$ gerçek değer

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3$$

$$f(0.5) \approx 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1.875 \text{ yaklaşık değer}$$

$$\epsilon_t = \frac{2 - 1.875}{2} \times 100\% = 6.25\ \%$$

Lineer Olmayan Denklem Çözümleri

① Fixed Point (Sabit Nokta) iterasyon yöntemi

$$f(x) = 0 \longrightarrow x = g(x) \longrightarrow x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ fonksiyonunun kökleri

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \mp \sqrt{9-4}}{2} = 1.5 \mp \sqrt{1.25}$$

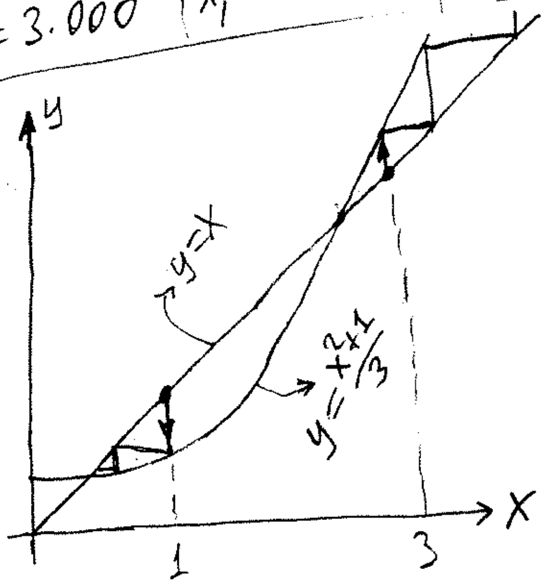
$x_1 = 2.618033989$ ve $x_2 = 0.381966011$

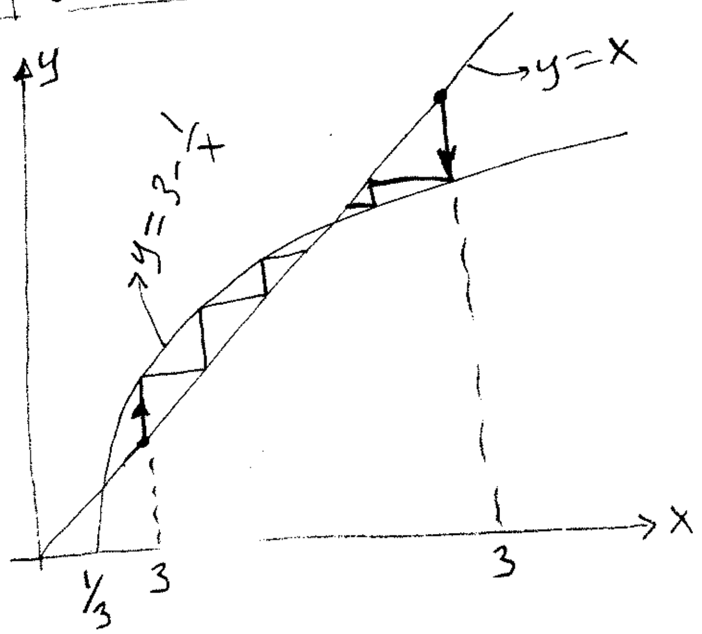
a) $x^2 - 3x + 1 = 0 \longrightarrow x = \dfrac{x^2+1}{3} \longrightarrow x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{3}$

	1.iterasyon	2.iterasyon	3.iterasyon	4.iterasyon	
$x_0 = 1.000$	$x_1 = 0.667$	$x_2 = 0.481$	$x_3 = 0.411$	$x_4 = 0.390$	→ Yakınsıyor
$x_0 = 3.000$	$x_1 = 3.333$	$x_2 = 4.037$	$x_3 = 5.766$	$x_4 = 11.415$	→ Iraksıyor

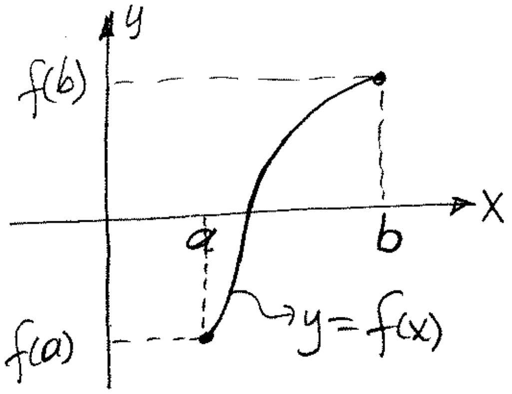
b) $x^2 - 3x + 1 = 0 \longrightarrow x = 3 - \dfrac{1}{x} \longrightarrow x_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{x_{n+1}}$

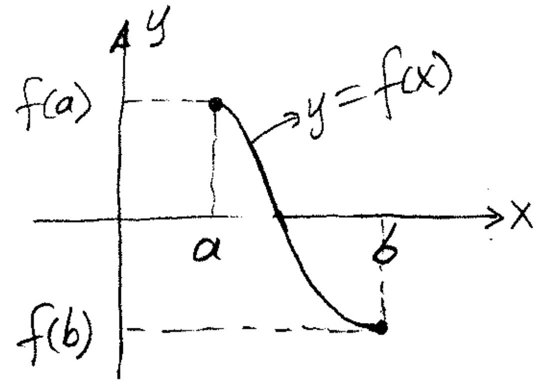
	1.iterasyon	2.iterasyon	3.iterasyon	4.iterasyon	
$x_0 = 1.000$	$x_1 = 2.000$	$x_2 = 2.500$	$x_3 = 2.600$	$x_4 = 2.615$	→ Yakınsıyor
$x_0 = 3.000$	$x_1 = 2.667$	$x_2 = 2.625$	$x_3 = 2.619$	$x_4 = 2.618$	→ Yakınsıyor





2) Bisection (Aralık Yarılama) iterasyon yöntemi





$y = f(x)$, $x \in [a,b]$ aralığı için sürekli ve $f(a)f(b) < 0$ ise $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c noktası vardır. Bisection iterasyon yöntemiyle c noktası şu şekilde bulunur.

Adım 1 : $f(a)f(b) < 0$ ise iterasyona başla

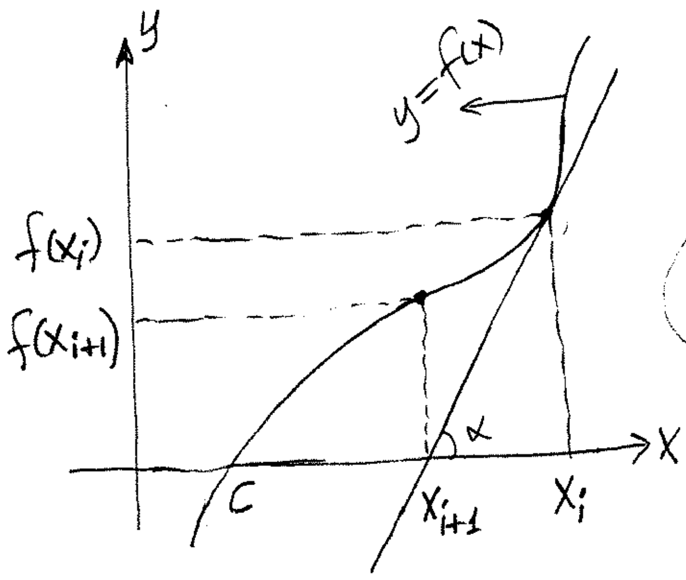
Adım 2 : $m = \dfrac{a+b}{2}$, $f(m) \approx 0$ iterasyonu bitir.

Adım 3 : $f(a)f(m) < 0$ ise $b = m$ yap ve adım 2'ye git.

Adım 4 : $f(a)f(m) > 0$ ise $a = m$ yap ve adım 2'ye git

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{m_{yeni} - m_{eski}}{m_{yeni}} \right| \times 100\,\% < \epsilon_s$$

3) Newton-Raphson iterasyon yöntemi

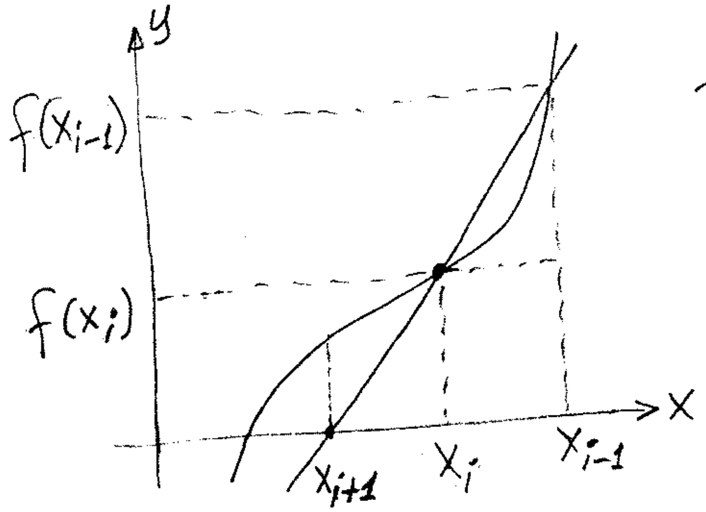


$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} = \tan\alpha$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$f(x_{i+1}) \approx 0$ olana kadar iterasyona devam.

4) Secant (Kiriş) iterasyon yöntemi



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Newton-Raphson'daki türev denklemine eşitlenirse

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

$f(x_i) \approx 0$ olana kadar iterasyona devam

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\,\% < \epsilon_s$$

Ör $\sqrt{7}$ değerini Newton-Raphson iterasyon yöntemiyle iki iterasyonda hesapla. Gerçek hata yüzdesini bul.

$$x = \sqrt{7} \longrightarrow x^2 - 7 = 0 \longrightarrow f(x) = x^2 - 7$$

$\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$

$x_0 = 3$ başlangıç noktası

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 7 \\ f'(x) = 2x \end{array} \right\} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{9-7}{6} = 3 - \frac{1}{3} = 2.666666667$$

2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.645833333$$

$$\epsilon_t = \frac{\sqrt{7} - 2.645833333}{\sqrt{7}} \times 100\,\% = -0.003\,\%$$

Sr. $f(x) = x^3 - 20x + 16$ eşitliğinin $[3,5]$ aralığındaki kökünü secant yöntemiyle 5 iterasyonda bul. Gerçek değer 4 olduğuna göre $\epsilon_t = ?$ 12

$x_{-1} = 3$, $x_0 = 5 \longrightarrow f(x_{-1}) = -17$, $f(x_0) = 41$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})} f(x_0) = 3.586206897, \quad f(x_1) = -9.602361712$$

2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 3.85489884, \quad f(x_2) = -3.823285836$$

3. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2) = 4.031978909, \quad f(x_3) = 0.907713962$$

4. iterasyon

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} f(x_3) = 3.997924951, \quad f(x_4) = -0.058049711$$

5. iterasyon

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} f(x_4) = 3.99971852, \quad f(x_5) = -0.00078135$$

Gerçek kök $= 4$ ise

$$\epsilon_t = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\ \%$$

$$= \frac{4 - 3.99971852}{4} \times 100\ \% = 0.0007\ \%$$

Ör $f(x) = x^2 - 7\sin x$ fonksiyonunun $[1,3]$ aralığında bir kökü varsa bisection iterasyon yöntemiyle kökünü bul. $\epsilon_s = 2\%$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -4.890296894 \\ f(3) &= 8.012159944 \end{aligned}\right\} \; f(1)f(3) < 0 \text{ kök var.}$$

1 iterasyon

$$m = \frac{1+3}{2} = 2, \quad f(2) = -2.365081988$$

$$f(1)f(2) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2,3]$$

2. iterasyon

$$m = \frac{2+3}{2} = 2.5, \quad f(2.5) = 2.060694991$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.5-2}{2.5}\right| \times 100\% = 20\%$$

$$f(2)f(2.5) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [2, 2.5]$$

3. iterasyon

$$m = \frac{2+2.5}{2} = 2.25, \quad f(2.25) = 0.873194991$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.25-2.5}{2.25}\right| \times 100\% = 11.11\%$$

$$f(2)f(2.25) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [2, 2.25]$$

4. iterasyon

$$m = \frac{2+2.25}{2} = 2.125, \quad f(2.125) = -1.43661352 9$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.125-2.25}{2.125}\right| \times 100\% = 5.88\%$$

$$f(2)f(2.125) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.125, 2.25]$$

5. iterasyon

$$m = \frac{2.125+2.25}{2} = 2.1875, \quad f(2.1875) = -0.925368942$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{2.1875 - 2.125}{2.1875} \right| \times 100\,\% = 2.86\,\%$$

$f(2.125)\,f(2.1875) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.1875,\ 2.25]$

6. iterasyon

$$m = \frac{2.1875 + 2.25}{2} = 2.21875, \quad f(2.21875) = -0.658392217$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{2.21875 - 2.1875}{2.21875} \right| \times 100\,\% = 1.41\,\% < \epsilon_s = 2\%$$

$x = 2.21875$ (Kök) $\quad f(\text{kök}) = -0.658392217$

Ör $f(x) = x^2 - 3 + \ln x$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığında kökü varsa bisection yöntemiyle kökünü bul. $\epsilon_s = 2\,\%$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -2 \\ f(2) &= 2.098612289 \end{aligned}\right\} \ f(1)f(2) = (-)(+) < 0 \ \text{kök var}$$

1. iterasyon

$$m = \frac{1+2}{3} = 1.5, \quad f(1.5) = -0.344534891$$

$f(1)\,f(1.5) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [1.5,\ 2]$

2. iterasyon

$$m = \frac{1.5+2}{2} = 1.75, \quad f(1.75) = 0.622115787$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.75 - 1.5}{1.75} \right| \times 100\,\% = 14.29\,\%$$

$f(1.5)\,f(1.75) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [1.5,\ 1.75]$

3. iterasyon

$$m = \frac{1.5 + 1.75}{2} = 1.625, \quad f(1.625) = 0.126132815$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{1.625 - 1.75}{1.625} \right| \times 100\,\% = 7.69\,\%$$

$f(1.5)\,f(1.625) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [1.5,\ 1.625]$

4. iterasyon

$$m = \frac{1.5 + 1.625}{2} = 1.5625, \quad f(1.5625) = -0.112306647$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.5625 - 1.625}{1.5625}\right| \times 100\ \% = -4\ \%$$

$$f(1.5)\, f(1.5625) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [1.5625,\ 1.625]$$

5. iterasyon

$$m = \frac{1.5625 + 1.625}{2} = 1.59375, \quad f(1.59375) = 0.006128792$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.59375 - 1.5625}{1.59375}\right| \times 100\ \% = 1.96\ \% < \epsilon_s = 2\%$$

$$x = 1.59375\ (\text{Kök}) \qquad f(1.59375) = 0.006128792$$

Ör $f(x) = e^{-x} - \tan x$ fonksiyonun kökünü Newton-Raphson yöntemiyle bul. $x_0 = 1$ al. $\epsilon_s = 2\ \%$

$$f(x) = e^{-x} - \tan x \longrightarrow f'(x) = -e^{-x} - \sec^2 x$$

1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-1.189528283}{-3.793398262} = 0.686421461$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{0.686421461 - 1}{0.686421461}\right| \times 100\ \% = 45.68\ \%$$

2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.686421461 - \frac{-0.315963436}{-2.174688344} = 0.541130096$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100\ \% = 26.85\ \%$$

3. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.541130096 - \frac{-0.018876759}{-1.943251185} = 0.531416087$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \times 100\ \% = 1.83\ \% < \epsilon_s$$

$x_3 = 0.531416087$ (Kök)

$f(x_3) = -4.88 \times 10^{-5} \approx 0$

Ör: $\sqrt{5}$ değerini Newton-Raphson iterasyon yöntemiyle hesapla
$\epsilon_s = 1\%$ olsun. $\epsilon_t = ?$

$x = \sqrt{5} \longrightarrow x^2 - 5 = 0 \longrightarrow f(x) = x^2 - 5$

$\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 \longrightarrow x_0 = 3$ baş. nok.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 5 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}\right\} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{4}{6} = 2.333333333$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100\,\% = 28.57\,\%$$

2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.333333333 - \frac{0.444444442}{4.666666666} = 2.238095238$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100\,\% = 4.255\,\%$$

3. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.238095238 - \frac{0.009070294}{4.476190476} = 2.236068896$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \times 100\,\% = 0.091\,\% < \epsilon_s$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236068896$$

$$\epsilon_t = \frac{\sqrt{5} - 2.236068896}{\sqrt{5}} \times 100\,\% = -0.000041077\,\%$$

$\sqrt{5} = 2.336067978$ (Hesap makinası değeri)

Ör: $f(x) = e^{-x} - x$ fonksiyonunun kökünü $[0,1]$ aralığında secant iterasyon yöntemiyle bul. $\epsilon_s = 1\%$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \times f(x_i)$$

$x_{-1} = 0$, $x_0 = 1 \longrightarrow f(x_{-1}) = f(0) = 1$, $f(x_0) = f(1) = -0.632120558$

1. iterasyon

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - x_{-1}}{f(x_0) - f(x_{-1})} f(x_0) = 1 - \frac{-0.632120558}{-1.632120558} = 0.612699837$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100\% = 63.21\%$$

$$f(x_1) = f(0.612699837) = -0.070813948$$

2. iterasyon

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 0.612699837 - 0.048861447$$
$$= 0.563838389$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100\% = -8.67\%$$

$$f(x_2) = f(0.563838389) = 0.005182355$$

3. iterasyon

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) = 0.563838389 + 0.003331970$$
$$= 0.567170359$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \times 100\% = 0.59\% < \epsilon_s = 1\%$$

$x_3 = 0.567170359$ (kök)

$$f(x_3) = f(0.567170359) = -0.000042420 \approx 0$$

Ör Bisection iterasyon yöntemiyle $\sqrt{5}$ değerini yaklaşık olarak bul. $\epsilon_s = 1\,\%$, $\epsilon_t = ?$

$x = \sqrt{5} \longrightarrow x^2 - 5 = 0 \longrightarrow f(x) = x^2 - 5$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \longrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \longrightarrow [2,3]$ aralığı

$\left.\begin{array}{l} f(2) = -1 \\ f(3) = 4 \end{array}\right\} f(2)f(3) = (-)(+) < 0$ Kök var.

1. iterasyon

$m = \frac{2+3}{2} = 2.5 \ , \quad f(2.5) = 1.25$

$f(2)f(2.5) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [2, 2.5]$

2. iterasyon

$m = \frac{2+2.5}{2} = 2.25 \ , \quad f(2.25) = 0.0625$

$f(2)f(2.25) = (-)(+) < 0 \longrightarrow [2, 2.25]$

$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.25-2.5}{2.25}\right| \times 100\,\% = 11.11\,\% > \epsilon_s$

3. iterasyon

$m = \frac{2+2.25}{2} = 2.125 \ , \quad f(2.125) = -0.484375$

$f(2)f(2.125) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.125, 2.25]$

$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.125-2.25}{2.125}\right| \times 100\,\% = 5.88\,\% > \epsilon_s$

4. iterasyon

$m = \frac{2.125+2.25}{2} = 2.1875 \ , \quad f(2.1875) = -0.2148437S$

$f(2.125)f(2.1875) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.1875, 2.25]$

$|\epsilon_a| = \left|\frac{2.1875-2.125}{2.1875}\right| \times 100\,\% = 2.857\,\% > \epsilon_s$

5. iterasyon

$$m = \frac{2.1875 + 2.25}{2} = 2.21875, \quad f(2.21875) = -0.077148437$$

$$f(2.1875)f(2.21875) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.21875, 2.25]$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{2.21875 - 2.1875}{2.21875} \right| \times 100\,\% = 1.408\,\% > \epsilon_s$$

6. iterasyon

$$m = \frac{2.21875 + 2.25}{2} = 2.234375$$

$$f(2.234375) = -0.00756836$$

$$f(2.21875) \cdot f(2.234375) = (-)(-) > 0 \longrightarrow [2.234375, 2.25]$$

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{2.234375 - 2.21875}{2.234375} \right| \times 100\,\% = 0.699\,\% < \epsilon_s$$

$\sqrt{5} \approx 2.234375$ (Gerçek Değer $= 2.236067978$)

$$\epsilon_t = \frac{\sqrt{5} - 2.234375}{\sqrt{5}} \times 100\,\% = 0.076\,\%$$

Ör: $f(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun $[1,4]$ aralığında kökünü Newton-Raphson iterasyon yöntemiyle bul. Kökün gerçek değeri 2 olduğuna göre gerçek hata yüzdesi nedir? $\epsilon_s = 1\%$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x \\ f'(x) &= 2x - 2 \end{aligned}\right\} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -1 \\ f(4) &= 8 \end{aligned}\right\} \quad f(1)f(4) = (-)(+) < 0 \quad \text{Kök var.}$$

$x_0 = 4$ ile başla

1.iterasyon

$$X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{8}{6} = 2.666666667$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{X_1 - X_0}{X_1}\right| \times 100\% = 50\% > \epsilon_s$$

2.iterasyon

$$X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(X_1)} = 2.666666667 - \frac{1.777777779}{3.333333334} = 2.133333333$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{X_2 - X_1}{X_2}\right| \times 100\% = 25\% > \epsilon_s$$

3.iterasyon

$$X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(X_2)} = 2.133333333 - \frac{0.284444443}{2.266666666} = 2.007843138$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{X_3 - X_2}{X_3}\right| \times 100\% = 6.25\% > \epsilon_s$$

4.iterasyon

$$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)}{f'(X_3)} = 2.007843138 - \frac{0.01574779}{2.015686276} = 2.000030518$$

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{X_4 - X_3}{X_4}\right| \times 100\% = 0.39\% < \epsilon_s$$

Yaklaşık kök değeri $= 2.00003051 8$

$$\epsilon_t = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\%$$

$$= \frac{2 - 2.000030518}{2} \times 100\% = -0.00153\%$$

Matrisler

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$m\times n$ tipinde bir A matrisi

a_{ij} değişkenine i.satır j.sütun elemanı denir.

veya kısaca (i,j). eleman
(i,j). bileşen

$i=1,2,3,\ldots,m$
$j=1,2,3,\ldots,n$

$[a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots\ a_{in}]$ A matrisinin i. satırı $1\le i\le m$

$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $1\le j\le n$

A matrisinin j.sütunu

Bir matrisin transpozu

$A=[a_{ij}]$ $m\times n$ tipinde bir matris

A matrisinin transpozu $a_{ij}^T=a_{ji}$ olmak üzere

$A^T=[a_{ij}^T]$ şeklinde $n\times m$ tipinde bir matristir.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & -4 \\ -5 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Kare Matris

$m=n$ ise A matrisi bir kare matristir.

Kare matrisin satır sayısı sütun sayısına eşittir.

Yani kare matris $n\times n$ tipindedir.

Birim Matris

Sol üst köşeden sağ alt köşeye kadar hep 1, diğerleri hep 0 olan kare matris birim matristir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$ 3x3 tipinde birim matris

Birim matris, matris çarpmasında etkisiz elemandır.

Sıfır Matrisi : Bütün elemanları 0 olan matristir.

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$ 2x3 tipinde sıfır matrisi

Sıfır matrisi, ~~matris toplama ve çıkarma~~ işlemlerinde etkisiz elemandır.

Eşit Matrisler

A ve B $m\times n$ tipinde iki matris olsun

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$

$i = 1, \ldots, m$ ve $j = 1, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise bu iki matris eşittir. $A = B$ şeklinde yazılır.

$A - B = O_{m\times n}$ sıfır matrisi olur.

Satır matrisi

$1\times n$ tipli matristir

$a = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$

$$a^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$ $1\times n$ tipli satır matrisinin transpozu $n\times 1$ tipli sütun matrisidir.

Sütun matrisi

$n\times 1$ tipli matristir.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad b^T = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_n]$$

$n\times 1$ tipli sütun matrisinin transpozu $1\times n$ tipli satır matrisidir.

Skaler matris

$n \times n$ tipli bir birim matrisin bir sabitle çarpılmasından elde edilir.

$$A = k I_{n\times n} = \begin{bmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & k & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & k \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad a_{ij} = \begin{cases} k & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$i,j = 1,\dots,n$

Skaler matris bir kare matristir.

Diyagonal matris

$i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ise A $n\times n$ tipinde bir diyagonal matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3×3 tipinde bir diyagonal matris. $A^T = A$

Üst üçgen matris

$n\times n$ tipinde A kare matrisi $i>j$ için $a_{ij}=0$ olursa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3×3 tipinde üst üçgen matris

Transpozu alt üçgen matris

Alt üçgen matris

$n\times n$ tipinde A matrisi $i<j$ için $a_{ij}=0$ olursa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

3×3 tipinde alt üçgen matris

Transpozu üst üçgen matris

Simetrik matris

$A = A^T$ ise A simetrik matris

$a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

3×3 tipli simetrik matris

Ters simetrik matris

$A = -A^T$ ise A ters simetrik matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

3×3 tipli ters simetrik matris

Matris Toplama

$C = A+B$ yani $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ A, B, C $m\times n$ tiplidir.

Matris Çıkarma

$C = A-B$ yani $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ A, B, C $m\times n$ tiplidir.

Not: Toplama ve çıkarma için matrislerin tipleri aynı olmalı.

Bir matrisi sabit ile çarpma

$C = kA$ yani $c_{ij} = k\,a_{ij}$ A, C $m\times n$ tiplidir.

Bütün elemanlar tek tek sabit ile çarpılır.

Matris Çarpma

$A = [a_{ij}]$ $m\times n$ tipli
$B = [b_{ij}]$ $n\times p$ tipli iki matris olsun.

$C = AB = [c_{ij}]$ $m\times p$ ~~tipli matristir.~~

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,p \end{array}$$

Not: Kare matrislerin çarpımı yine aynı tipte bir kare matristir.

Not: Eğer çarpılabiliyorsa AB matrisi BA matrisine eşit olmak zorunda değildir.

$A+B = B+A$

$A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+0 = 0+A = A$

$A+(-A) = 0$

$k(A+B) = kA+kB$

$(A+B)^T = A^T+B^T$

$(A^T)^T = A$

$(kA)^T = kA^T$

$A(BC) = (AB)C$

$(A+B)C = AC+BC$

$C(A+B) = CA+CB$

$A.(kB) = kAB$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(ABCD)^T = D^T C^T B^T A^T$

$A\neq 0$, $B\neq 0$ için $AB = 0$ olabilir

$B\neq C$ için $AB = AC$ olabilir.

$A=0$ veya $B=0$ için $AB = 0$ olur.

Determinant

Sadece kare matrislerin determinantı vardır.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \sum_{\substack{i=1 \\ \text{veya } j=1}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$ → istenilen satır veya sütuna göre determinant alınabilir.

M_{ij} (minör) → i.satır ile j.sütun iptal edilir. kalan kısmın determinantı alınır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$ 1.satıra göre

$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$$ 2.sütuna göre

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

Determinant Kuralları

① Determinantı bir sabitle çarpmak herhangi bir satır veya sütunun bütün elemanlarını sabit ile çarpmak demektir.

② Herhangi bir satır veya sütunun bütün elemanları 0 ise determinant 0'dır.

③ Herhangi iki satırın veya iki sütunun yer değişimi determinantı −1 ile çarpmak demektir.

④ Herhangi bir satırı bir sabitle çarpıp diğer satıra eklemek veya herhangi bir sütunu bir sabitle çarpıp diğer sütuna eklemek determinant değerini değiştirmez.

$$|AB| = |A|.|B| \qquad |ABC| = |A|.|B|.|C|$$

Matrisin Rankı

~~mxn tipli A matrisinin rankı~~. A matrisinin içerisinde determinantı 0'dan farklı olan en büyük kare matrisin boyutudur.

Ör. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = ?$ 3 yolla çöz.

① $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5(20-6) - 2(35-3) + (14-4)$

$= 70 - 64 + 10 = 16$

② $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -24 \\ 0 & -10 & -32 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -24 \\ -10 & -32 \end{vmatrix} = (-8)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 16 \end{vmatrix} = 16(16-15)$

$= 16$

③ $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (100+14+6) - (4+30+70) = 120 - 104 = 16$

$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \end{matrix}$

Bu yöntem sadece 3×3 tipli matrislerde geçerlidir.

Satırca İndirgenmiş Eşelon Biçim

$m \times n$ tipli A matrisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa satırca indirgenmiş eşelon biçimdedir.

(1) Matrisin bir satırındaki elemanların hepsi sıfır ise bu satır matrisin en alt satırında olmalı.

(2) Matrisin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı 1 olmalıdır. Bu elemana bu satırın ilk elemanı denir.

(3) Sıfırdan farklı herbir satırda bu ilk eleman bir önceki satıra göre sağa doğru bir kaymak suretiyle yer alır.

(4) Eğer matrisin sütununun birisi bu ilk elemanı içeriyorsa o sütundaki diğer elemanların hepsi sıfırdır.

sadece ilk üç şart sağlanıyor bu şart sağlanmıyorsa satırca eşelon biçim denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5×6 tipli satırca indirgenmiş eşelon biçimli A matrisi

$$\text{rank}(A) = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5×6 tipli satırca eşelon biçimli A matrisi

$$\text{rank}(A) = 3$$

4. şart sağlanmıyor.

A, B, C $n \times n$ tipli matrisler olsun

$\text{rank}(A) = n$ ve $AB = AC$ ise $B = C$

$\text{rank}(A) = n$ ve $AB = 0$ ise $B = 0$

$\text{rank}(A) = n$ demek tersi var demektir.

Birim matris satırca indirgenmiş eşelon biçimli bir matristir.

$\text{rank}(A) = n$

Elementer Satır İşlemleri

1) Herhangi iki satırın yer değiştirmesi
2) Herhangi bir satırın sıfırdan farklı bir sabitle çarpılması
3) Herhangi bir satırın sıfırdan farklı bir sabitle çarpıldıktan sonra başka bir satıra eklenmesi

(*) A matrisine elementer satır işlemlerinin sonlu bir dizisi uygulanıyor. B matrisi elde ediliyor.

A ve B matrisleri satırca denk matrislerdir.

(*) A ~~matrisine elementer~~ satır işlemleri uygulanarak satırca ~~indirgenmiş eşelon biçimli~~ B ~~ma~~trisi elde ediliyor.

A ve B matrisleri satırca denk matrislerdir.

B matrisi tektir.

Ör $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & -7 \\ 7 & 6 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ $\text{rank}(A) = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & -7 \\ 7 & 6 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 7 & 6 & -3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & -5 & -15 & 19 \\ 0 & -15 & -45 & 57 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -19/5 \\ 0 & 1 & 3 & -19/5 \end{bmatrix}$$

1.satırla 2.satırı yer değiştir. — 1.satırı diğer satırlara uygula — 2. ve 3. satırları sadeleştir — 2.satırı diğer satırlara uygula

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 22/5 \\ 0 & 1 & 3 & -19/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{satırca indirgenmiş} \\ \text{eşelon form}\end{array}\right\}$ $\text{rank}(A) = 2$

Matrisin Tersi

A $n \times n$ tipli kare matris olsun.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} \quad , \quad det(A) \neq 0$$

$$B = [b_{ij}] = adj(A) \quad \text{ise} \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

$$A.A^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$|A| \neq 0$ ise A matrisinin tersi vardır.
Yani bir matris singüler değilse tersi vardır.

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

Bir matrisin tersi varsa tersi tektir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Diyagonal bir matrisin tersi yine diyagonal bir matristir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & & 0 \\ & 1/a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$$

Ör
$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&3\\2&1&4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=?$$

1. Yol

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right]\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&-3&0&-1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&5&1&1&0\\0&1&-3&0&-1&0\\0&0&-3&-2&-1&1\end{bmatrix}$$

1. satırın 2 katını 3. satırdan çıkar. 2. satırı −1 ile çarp.

2. satırı 1. satırdan çıkar, 3. satıra ekle

3. satırı 2. satırdan çıkar. 3. satırı −3 ile böl.

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&5&1&1&0\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&2/3&1/3&-1/3\end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-7/3&-2/3&5/3\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&2/3&1/3&-1/3\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-7/3&-2/3&5/3\\2&0&-1\\2/3&1/3&-1/3\end{bmatrix}$$

2. Yol

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&3\\2&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=(-4-3)+2(3+2)=-7+10=3$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix}=-7\qquad M_{12}=\begin{vmatrix}0&3\\2&4\end{vmatrix}=-6\qquad M_{13}=\begin{vmatrix}0&-1\\2&1\end{vmatrix}=2$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=2\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=5\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=-1$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-7&6&2\\-2&0&1\\5&-3&-1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-7&-2&5\\6&0&-3\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7&-2&5\\6&0&-3\\2&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7/3&-2/3&5/3\\2&0&-1\\2/3&1/3&-1/3\end{bmatrix}$$

Lineer Denklem Sistemleri

$$\underset{m\times n}{A}\;\underset{n\times 1}{x}=\underset{m\times 1}{b}\qquad \underset{\text{ilave matris}}{\tilde{A}}=[A|b]\sim[I|x]\quad (I \text{ olursa})$$

$\rightarrow m=n$ ve tek çözüm

$\det(A)\neq 0$ x değişkenleri lineer bağımsız

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}\right\}
$$

n bilinmeyenli m denklemli bir lineer denklem sistemi

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \underline{i.\ \text{denklem}}$$

(*) Lineer denklem sisteminin bir çözümü varsa bu çözüm bütün denklemi sağlar.

(*) Lineer denklem sisteminin en az bir çözümü varsa sisteme bağdaşabilir sistem, çözüm yoksa bağdaşamayan sistem denir.

(*) Aynı çözüme sahip lineer sistemler denktir.

Tek çözüm var ve $m=n$ ise $x = A^{-1}b$ kullanılabilir.

Tek çözüm varsa $m \geq n$ olmalıdır.

Ör

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\
3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 11 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 10
\end{aligned}\right\}
$$

Lineer denklem sistemini Gauss-Jordan indirgeme yöntemiyle çöz

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

1. satırı diğer satırlara uygula

2. satırı 1. satıra uygula. 3. satırı 4 ile sadeleştir.

3. satırı diğer satırlara uygula

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \to x_1 = 4 \\ \to x_2 = 0 \\ \to x_3 = 1 \end{array}
$$

Ör
$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=5\\ x_1+x_2-x_3&=-2\\ 3x_1+4x_2-5x_3&=1 \end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sistemini Gauss-Jordan indirgeme yöntemiyle çöz.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3&5\\1&1&-1&-2\\3&4&-5&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&5\\0&-1&2&-7\\0&-2&4&-14\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&5\\0&1&-2&7\\0&1&-2&7\end{bmatrix}$$

1.satırı diğer satırlara uygula — 2.satırı -1 ile 3.satırı -2 ile sadeleştir. — 2.satırı diğer satırlara uygula.

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&-9\\0&1&-2&7\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3x3 tipli değilde 2x2 tipli birim matris oluştuğundan $\det(A)=0$ çok çözümü var

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_3&=-9\\ x_2-2x_3&=7\end{aligned}\right\}\quad x_3=t \text{ alınırsa} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=-9-t\\ x_2&=7+2t\\ x_3&=t\end{aligned}$$

$\rightarrow$ t'nin aldığı her ayrı değer için bir çözüm

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=9\\ 2x_1-x_2+x_3&=8\\ 3x_1-x_3&=3\end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sisteminin ~~ilaveli matrisini satırca~~ indirgenmiş ~~eşelon biçime dönüştür çöz~~.
(Gauss - Jordan ind. yön.)

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&9\\2&-1&1&8\\3&0&-1&3\end{array}\right]\sim\begin{bmatrix}1&2&3&9\\0&-5&-5&-10\\0&-6&-10&-24\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&9\\0&1&1&2\\0&3&5&12\end{bmatrix}$$

1.satırı diğer satırlara uyg. — 2.satırı -5 ile 3.satırı -2 ile sadeleştir. — 2.satırı diğer satırlara uygula

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&2\\0&0&2&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}\begin{aligned}&\rightarrow x_1=2\\&\rightarrow x_2=-1\\&\rightarrow x_3=3\end{aligned}$$

3. satırı 2 ile sadeleştir. — 3.satırı diğer satırlara uygula

$\hookrightarrow$ Birim matris çıktığından A matrisinin tersi vardır.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\3&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{aligned}Ax&=b\\ x&=A^{-1}b\end{aligned}$$

şeklindede çözülebilir.

Kramer Kuralı

$Ax = b$ lineer denklem sistemi veriliyor.
A nxn tipli bir matris ve $\det(A) \neq 0$ ise
kramer kuralı kullanılabilir.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

→ i. satır

i. satır çıkarılıp yerine $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ konulursa D_i elde edilir.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Ör

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemini kramer kuralını kullanarak çöz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(0+4) - (1+2) = 9$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2(16-7) = 18$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3(0+14) - (8+7) = 27$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(7-16) = 9$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = 3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = 1$$

Ayrıştırma (Cholesky) Yöntemi

$Ax = b$ $A = LU$

$\underbrace{LUx}_{y} = b \Rightarrow Ly = b,\ Ux = y$

n=3 için

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ \hline L_{21} & L_{21}U_{12}+L_{22} & L_{21}U_{13}+L_{22}U_{23} \\ \hline L_{31} & L_{31}U_{12}+L_{32} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+L_{33} \end{array}\right]$$

$L_{11} = a_{11}$ — $U_{12} = \dfrac{a_{12}}{L_{11}}$ — $U_{13} = \dfrac{a_{13}}{L_{11}}$

$L_{21} = a_{21}$ — $L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$ — $U_{23} = \dfrac{1}{L_{22}}(a_{23} - L_{21}U_{13})$

$L_{31} = a_{31}$ — $L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12}$ — $L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23}$

```
for (i=0 ; i<n ; i++)
 for (j=0 ; j<n ; j++)
 { if (i>=j)
   { Lij = aij ;
     for (k=0 ; k<j ; k++) Lij = Lij - Lik Ukj ;
   } else
   { Uij = aij ;
     for (k=0 ; k<i ; k++) Uij = Uij - Lik Ukj ;
     Uij = Uij / Lii  ——→ Lii ≠ 0
   }                      şartı var
```

nxn tipli A matrisinde L, U parametrelerini bulmak için algoritma

Ör

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 18 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$$ Lineer denklem sistemini ayrıştırma yöntemiyle çöz.

$Ax = b \Longrightarrow A = LU$ yazılırsa

$Ly = b$, $Ux = y$ denklemleri elde edilir.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_{11} = a_{11} = 1$	$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = \frac{2}{1} = 2$	$U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = \frac{3}{1} = 3$
$L_{21} = a_{21} = 2$	$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} = 5 - 2\times 2 = 1$	$U_{23} = \frac{1}{L_{22}}(a_{23} - L_{21}U_{13}) = \frac{2 - 2\times 3}{1} = -4$
$L_{31} = a_{31} = 3$	$L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12} = 1 - 3\times 2 = -5$	

$L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} = 5 - 3\times 3 - 5\times 4 = 5 - 9 - 20 = -24$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 14$, $y_2 = 18 - 2y_1 = -10$, $y_3 = -\frac{1}{24}(20 - 3y_1 + 5y_2) = 3$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 3$, $x_2 = -10 + 4x_3 = 2$, $x_3 = 14 - x_1 - 2x_2 = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ çözüm kümesi

Ör

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$ Lineer denklem sistemi veriliyor

a) Gauss-Jordan indirgeme yöntemiyle çöz.

b) Kramer Kuralıyla çöz

c) $x = A^{-1}b$ ile çöz

d) Ayrıştırma yöntemiyle çöz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a)
$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & -2 & 8 & -14 \end{bmatrix}$$

1. satırdan 2. satırı çıkar. 3. satırı 2 ile sadeleştir. — 1. satırı diğer satırlara uygula — 2. satırı -1 ile, 3. satırı -2 ile sadeleştir.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. satırı diğer satırlara uygula — 3. satırı 3 ile sadeleştir — 3. satırı diğer satırlara uygula

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 1 \\ \rightarrow x_2 = 3 \\ \rightarrow x_3 = -1 \end{array}$$

b)
$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(4-6) - 2(8-18) + (4-6) = -6+20-2 = 12$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8(4-6) - 2(8-24) + (4-8) = 12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-24) - 8(8-18) + (16-12) = 36$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-4) - 2(16-12) + 8(4-6) = -12$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{12} = 1 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{36}{12} = 3 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-12}{12} = -1$$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\det(A) = 12$ bulmuştuk.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 6 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & +10 & -2 \\ -6 & +6 & +6 \\ +5 & -7 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/2 & +5/12 \\ +5/6 & +1/2 & -7/12 \\ -1/6 & +1/2 & -1/12 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/2 & 5/12 \\ 5/6 & 1/2 & -7/12 \\ -1/6 & 1/2 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/6 - 1 + \frac{40}{12} \\ \frac{40}{6} + 1 - 56/12 \\ -8/6 + 1 - 8/12 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to x_1 \\ \to x_2 \\ \to x_3 \end{array}$$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = a_{11} = 3 \qquad U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}} = \frac{2}{3} \qquad U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}} = 1/3$$

$$L_{21} = a_{21} = 2 \qquad L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} = 1 - 2 \times \frac{2}{3} = -1/3$$

$$U_{23} = \frac{1}{L_{22}}\left(a_{23} - L_{21}U_{13}\right) = -3\left(3 - 2 \times \frac{1}{3}\right) = -7$$

$$L_{31} = a_{31} = 6 \qquad L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12} = 2 - 6 \times \frac{2}{3} = -2$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} = 4 - 6 \times \frac{1}{3} - 2 \times 7 = -12$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1/3 & 0 \\ 6 & -2 & -12 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1/3 & 0 \\ 6 & -2 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 8/3 \qquad y_2 = -3(2 - 2y_1) = 10 \qquad y_3 = -\frac{1}{12}(8 - 6y_1 + 2y_2) = -1$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -1 \qquad x_2 = 10 + 7x_3 = 3$$

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \times 3 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{8 - 6 + 1}{3} = 1$$

Ör

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_3 - x_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

lineer denklem sistemi

a) Gauss-Jordan yöntemiyle çöz.

b) Kramer Kuralıyla çöz.

b) $x = A^{-1}b$ ile çöz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &\to x_1 = 2 \\ &\to x_2 = 1 \\ &\to x_3 = 5 \end{aligned}$$

b)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1-0) - (1-0) - (-1-0) = -2-1+1 = -2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-0) - (-1+4)$$

$$= -1-3 = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(1-0)-(4-0) = -2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4+1)-(4-0) = -10$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-10}{-2} = 5$$

c)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 3/2 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+2 \\ 0-1+2 \\ 0-1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ör:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2&=7\\ x_1-2x_2-2x_4&=1\\ -x_2+x_3+2x_4&=5\\ 5x_3+3x_4&=6 \end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sistemini Gauss - Jordan indirgeme yöntemiyle çöz.

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 3&2&0&0&7\\ 1&-2&0&-2&1\\ 0&-1&1&2&5\\ 0&0&5&3&6 \end{array}\right]$$

1. satır ile 2. satırı yer değiştir.

$$\sim\begin{bmatrix} 1&-2&0&-2&1\\ 3&2&0&0&7\\ 0&-1&1&2&5\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

1. satırı 2. satıra uygula

$$\sim\begin{bmatrix} 1&-2&0&-2&1\\ 0&8&0&6&4\\ 0&-1&1&2&5\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

3. satırı -1 ile çarpıp 2. satırla yer değiştir

$$\sim\begin{bmatrix} 1&-2&0&-2&3\\ 0&1&-1&-2&-5\\ 0&8&0&6&4\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

2. satırı diğer satırlara uygula.

$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&-2&-6&-9\\ 0&1&-1&-2&-5\\ 0&0&8&22&44\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

4. satırın 2 katını 3. satırdan çıkar.

$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&-2&-6&-9\\ 0&1&-1&-2&-5\\ 0&0&-2&16&32\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

3. satırı -2 ile sadeleştir

$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&-2&-6&-9\\ 0&1&-1&-2&-5\\ 0&0&1&-8&-16\\ 0&0&5&3&6 \end{bmatrix}$$

3. satırı diğer satırlara uygula.

$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&0&-22&-41\\ 0&1&0&-10&-21\\ 0&0&1&-8&-16\\ 0&0&0&43&86 \end{bmatrix}$$

4. satırı sadeleştir.

$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&0&-22&-41\\ 0&1&0&-10&-21\\ 0&0&1&-8&-16\\ 0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$$

4. satırı diğer satırlara uygula

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right]$$

$x_1=3$

$x_2=-1.$

$x_3=0$

$x_4=2$

Ör
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sistemi

a) Kramer kuralı ile çöz.

b) Gauss - Jordan indirgeme yöntemiyle çöz

c) Ayrıştırma yöntemiyle çöz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-10-3) - (1-0) = -27$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 14 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 14 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4(-10-3) - (14+15) = -81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(28-9) - (8+3) = 27$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 14 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 14 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-15-14) + 4(1-0) = -54$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-81}{-27} = 3 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{27}{-27} = -1 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-54}{-27} = 2$$

b)
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -7 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -27 & -54 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 3 \\ \rightarrow x_2 = -1 \\ \rightarrow x_3 = 2 \end{array}$$

c) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ lineer denklem sistemi için $A = LU$ alınırsa

$$Ax = b \longrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b \longrightarrow \begin{matrix} Ux = y \\ Ly = b \end{matrix}$$

$L_{11} = 2 \qquad L_{11}U_{12} = 0 \rightarrow U_{12} = 0 \qquad \underbrace{L_{21}}_{1}\underbrace{U_{12}}_{0} + L_{22} = -5$

$L_{21} = 1 \qquad L_{11}U_{13} = -1 \rightarrow U_{13} = -1/2 \qquad L_{22} = -5$

$L_{31} = 0 \qquad \underbrace{L_{21}}_{1}\underbrace{U_{13}}_{-1/2} + \underbrace{L_{22}}_{-5}U_{23} = 3 \longrightarrow U_{23} = \dfrac{3 + 1/2}{-5} = -7/10$

$\underbrace{L_{31}}_{0}\underbrace{U_{12}}_{0} + L_{32} = 1 \longrightarrow L_{32} = 1$

$\underbrace{L_{31}}_{0}\underbrace{U_{13}}_{-1/2} + \underbrace{L_{32}}_{1}\underbrace{U_{23}}_{-7/10} + L_{33} = 2 \longrightarrow L_{33} = \dfrac{27}{10}$

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 2y_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2 \\ \rightarrow y_1 - 5y_2 = 14 \Rightarrow y_2 = -2.4 \\ \rightarrow y_2 - 2.7y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 2 \end{matrix}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2.4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow x_3 = 2$$

$x_2 - 0.7x_3 = -2.4$

$x_2 = -2.4 + 0.7x_3$

$x_2 = -1$

$x_1 - 0.5x_3 = 2 \rightarrow x_1 = 3$

Kötü Şartlanmış Denklemler

$$Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1}.b \quad , \quad det(A) \neq 0$$

$det(A) \approx 0$ ise denklem kötü şartlanmıştır.

$$① \; \frac{det(A)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}} << 1$$

$$② \; A.A^{-1} \not\approx I$$

$$③ \; (A^{-1})^{-1} \not\approx A$$

Kötü şartlanmış denklemi anlamada 3. yol en uygunudur. iki kere ters matris yuvarlama hatalarını artırır. Hesap makinası hatalarının birikmesi ters matrisin hatalı çıkmasına sebep olacağından sonuç hatalı olur.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 56.001 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 = 2 \; , \; x_2 = 10$$

Ters matris kullanılırsa hatalı sonuç çıkar.

Lineer Denklem Çözümlerinde İterasyon Yöntemleri

Lineer denklem sistemi büyükse bilgisayarda işlemleri azaltmak için iterasyon yöntemleri tercih edilir. İterasyon yöntemlerini kullanmak için sistemin yakınsak olması, veya yakınsak hale getirilmesi gereklidir.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

şart sağlanıyorsa sistem kesinlikle yakınsaktır. şart sağlanmasa da sistem yakınsak olabilir.

Denklemleri yer değiştirmek veya birbirlerine ekleyip çıkarmak ile şart sağlandırılabilir.

$det(A) = 0$ ise sonsuz çözüm var. iterasyon yöntemi sadece birini bulur.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{i.denklem}$$

çekilir

Jacobi iterasyon Yöntemi

$$x_i^{yeni} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{eski} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{eski}\right)$$

Başlangıçta bütün değerler sıfır alınır.

n=3 için

$$x_1^y = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right), \quad a_{11} \neq 0$$

$$x_2^y = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^e - a_{23}x_3^e\right), \quad a_{22} \neq 0$$

$$x_3^y = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^e - a_{32}x_2^e\right), \quad a_{33} \neq 0$$

Gauss-Seidel iterasyon Yöntemi

$$x_i^{yeni} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{yeni} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{eski}\right)$$

Başlangıçta bütün değerler sıfır alınır.

Değeri hesaplanan değişkenler hemen iterasyona katılır.
(Yakınsamayı hızlandırmak için)

n=3 için

$$x_1^y = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right), \quad a_{11} \neq 0$$

$$x_2^y = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^y - a_{23}x_3^e\right), \quad a_{22} \neq 0$$

$$x_3^y = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^y - a_{32}x_2^y\right), \quad a_{33} \neq 0$$

$$|\epsilon_{a,i}| = \left|\frac{x_i^{yeni} - x_i^{eski}}{x_i^{yeni}}\right| \times 100\,\% < \epsilon_s \text{ olmalı}$$

Hata yüzde oranı istenilen değere düşünceye veya istenilen iterasyon sayısına ulaşılıncaya kadar iterasyona devam edilir.

Hızlandırma faktörlü Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi

w : Hızlandırma faktörü

$1<w<2$ arasında olursa daha hızlı.

$w=1$ ise Gauss-Seidel ile aynı

$0<w<1$ ise yakınsama azalır. (Yavaşlar)

$1<w<2$ ise yakınsama artar. (Hızlanır)

$$x_i^{yeni} = (1-w)\,x_i^{eski} + \frac{w}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{yeni} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{eski}\right)$$

<u>$n=3$ için</u>

$$x_1^y = (1-w)\,x_1^e + \frac{w}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right), \quad a_{11} \neq 0$$

$$x_2^y = (1-w)\,x_2^e + \frac{w}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^y - a_{23}x_3^e\right), \quad a_{22} \neq 0$$

$$x_3^y = (1-w)\,x_3^e + \frac{w}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^y - a_{32}x_2^y\right), \quad a_{33} \neq 0$$

Ör $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Denklemini incele.

$a_{22}=0$ olduğundan 3. satırı 2. satıra ekleyelim

$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ a_{11}, a_{22}, a_{33} değerleri sıfırdan farklı oldu

$$\left.\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned}\right\} \text{Şartları sağlanıyorsa kesin yakınsaktır.}$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &\not> 4+1 \\ 1 &\not> 3+2 \\ 1 &\not> 1+1 \end{aligned}\right\} \text{Şartlar sağlanmıyor fakat yakınsak olabilir.}$$

Ör
$$2x_1 - x_3 = 4$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 14$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

Lineer denklem sistemini
a) Jacobi iterasyon yöntemiyle
b) Gauss-Seidel iterasyon yöntemiyle
c) Hızlandırma faktörlü Gauss-Seidel iterasyon yöntemiyle ($w = 1.5$)
çöz. ($x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2$ sonucuna yakınsayana kadar)

a) Jacobi iterasyon yöntemi

$$x_1^y = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right) = 2 + 0.5x_3^e$$

$$x_2^y = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^e - a_{23}x_3^e\right) = 0.2x_1^e + 0.6x_3^e - 2.8$$

$$x_3^y = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^e - a_{32}x_2^e\right) = 1.5 - 0.5x_2^e$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçtan

1. iterasyon

$x_1 = 2$, $x_2 = -2.8$, $x_3 = 1.5$

2. iterasyon

$x_1 = 2 + 0.5 \times 1.5 = 2.75$ $\quad x_2 = 0.2 \times 2 + 0.6 \times 1.5 - 2.8 = -1.5$

$x_3 = 1.5 - 0.5 \times (-2.8) = 2.9$

3. iterasyon

$x_1 = 2 + 0.5 \times 2.9 = 3.45$ $\quad x_2 = 0.2 \times 2.75 + 0.6 \times 2.9 - 2.8 = -0.51$

$x_3 = 1.5 - 0.5 \times (-1.5) = 2.25$

4. iterasyon

$x_1 = 2 + 0.5 \times 2.25 = 3.125$ $\quad x_2 = 0.2 \times 3.45 + 0.6 \times 2.25 - 2.8 = -0.76$

$x_3 = 1.5 - 0.5 \times (-0.51) = 1.755$

5. iterasyon

$x_1 = 2 + 0.5 \times 1.755 = 2.8775$ $\quad x_2 = 0.2 \times 3.125 + 0.6 \times 1.755 - 2.8 = -1.122$

$x_3 = 1.5 - 0.5 \times (-0.76) = 1.88$

6. iterasyon

$X_1 = 2 + 0.5 \times 1.88 = 2.94$

$X_2 = 0.2 \times 2.8775 + 0.6 \times 1.88 - 2.8 = -1.0965$

$X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-1.122) = 2.061$

7. iterasyon

$X_1 = 2 + 0.5 \times 2.061 = 3.0305$

$X_2 = 0.2 \times 2.94 + 0.6 \times 2.061 - 2.8 = -0.9754$

$X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-1.0965) = 2.04825$

b) Gauss-Seidel iterasyon yöntemi

$$X_1^y = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} X_2^e - a_{13} X_3^e) = 2 + 0.5 X_3^e$$

$$X_2^y = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} X_1^y - a_{23} X_3^e) = 0.2 X_1^y + 0.6 X_3^e - 2.8$$

$$X_3^y = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} X_1^y - a_{32} X_2^y) = 1.5 - 0.5 X_2^y$$

$X_1 = X_2 = X_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$X_1 = 2$ $\quad X_2 = 0.2 \times 2 - 2.8 = -2.4$ $\quad X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-2.4) = 2.7$

2. iterasyon

$X_1 = 2 + 0.5 \times 2.7 = 3.35$ $\quad X_2 = 0.2 \times 3.35 + 0.6 \times 2.7 - 2.8 = -0.51$

$X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-0.51) = 1.755$

3. iterasyon

$X_1 = 2 + 0.5 \times 1.755 = 2.8775$ $\quad X_2 = 0.2 \times 2.8775 + 0.6 \times 1.755 - 2.8 = -1.1715$

$X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-1.1715) = 2.08575$

4. iterasyon

$X_1 = 2 + 0.5 \times (2.08575) = 3.042875$

$X_2 = 0.2 \times 3.042875 + 0.6 \times 2.08575 - 2.8 = -0.939975$

$X_3 = 1.5 - 0.5 \times (-0.939975) = 1.9699875$

c) Hızlandırma faktörlü Gauss-Seidel iterasyon yöntemi (4)

$$x_1^y = (1-w)x_1^e + \frac{w}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right) \quad a_{11} \neq 0$$

$$x_2^y = (1-w)x_2^e + \frac{w}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^y - a_{23}x_3^e\right) \quad a_{22} \neq 0 \qquad w=1.5$$

$$x_3^y = (1-w)x_3^e + \frac{w}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^y - a_{32}x_2^y\right) \quad a_{33} \neq 0$$

$$x_1^y = 3 - 0.5x_1^e + 0.75x_3^e$$

$$x_2^y = 0.3x_1^y - 0.5x_2^e + 0.9x_3^e - 4.2$$

$$x_3^y = 2.25 - 0.75x_2^y - 0.5x_3^e$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$x_1 = 3 \quad x_2 = 0.3\times3 - 4.2 = -3.3 \quad x_3 = 2.25 - 0.75\times(-3.3) = 4.725$

2. iterasyon

$x_1 = 3 - 0.5\times3 + 0.75\times(4.725) = 5.04375$

$x_2 = 0.3\times5.04375 - 0.5\times(-3.3) + 0.9\times4.725 - 4.2 = 3.215625$

$x_3 = 2.25 - 0.75\times(3.215625) - 0.5\times4.725 = -2.52421875$

3. iterasyon

$x_1 = 3 - 0.5\times5.04375 + 0.75\times(-2.52421875) = -1.415039063$

$x_2 = 0.3\times(-1.415039063) - 0.5\times(3.215625) + 0.9\times(-2.52421875) - 4.2$

$= -8.504121084$

Bu örnek için $w=1.5$ alındığından yakınsama yapmıyor.

8) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{bmatrix}$ a) Jacobi iterasyon yöntemiyle (50)

b) Gauss-Seidel iterasyon yöntemiyle lineer denklem sistemini çöz.

Not: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ sonucuna yakınsayana kadar.

a) Jacobi iterasyon yöntemi

$$x_1^y = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e) = \frac{1}{5}(1 - x_2^e + x_3^e)$$

$$x_2^y = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^e - a_{23}x_3^e) = -\frac{2}{7}(5 + x_3^e)$$

$$x_3^y = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^e - a_{32}x_2^e) = \frac{1}{4}(9 - x_1^e)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$x_1 = 0.2$ $\quad x_2 = -\frac{10}{7} = -1.428571429$ $\quad x_3 = \frac{9}{4} = 2.25$

2. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{10}{7} + 2.25\right) = 0.935714285$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}(5 + 2.25) = -2.071428571$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(9 - 0.2) = 2.2$$

3. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 2.071428571 + 2.2) = 1.054285714$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}(5 + 2.2) = -2.057142857$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(9 - 0.935714285) = 2.016071429$$

4. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 2.057142857 + 2.016071429) = 1.014642857 \longrightarrow 1$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}(5 + 2.016071429) = -2.004591837 \longrightarrow -2$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(9 - 1.054285714) = 1.986428572 \longrightarrow 2$$

b) Gauss-Seidel iterasyon yöntemi

$$x_1^y = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right) = \frac{1}{5}\left(1 - x_2^e + x_3^e\right)$$

$$x_2^y = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^y - a_{23}x_3^e\right) = -\frac{2}{7}\left(5 + x_3^e\right)$$

$$x_3^y = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^y - a_{32}x_2^y\right) = \frac{1}{4}\left(9 - x_1^y\right)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$x_1 = 0.2$ $\quad x_2 = -\frac{10}{7} = -1.428571428$ $\quad x_3 = \frac{1}{4}(9 - 0.2) = 2.2$

2. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{10}{7} + 2.2\right) = 0.925714285$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}(5 + 2.2) = -2.057142857$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(9 - 0.925714285) = 2.018571429$$

3. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 2.057142857 + 2.018571429) = 1.015142857 \longrightarrow 1$$

$$x_2 = -\frac{2}{7}(5 + 2.018571429) = -2.005306123 \longrightarrow -2$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(9 - 1.015142857) = 1.996214286 \longrightarrow 2$$

Son iterasyonun önceki iterasyona göre hata oranı istenseydi

$$|\epsilon_{a,1}| = \left|\frac{x_1^y - x_1^e}{x_1^y}\right| \times 100\,\% = \left|\frac{1.015142857 - 0.925714285}{1.015142857}\right| \times 100\,\% = 8.8\,\%$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left|\frac{x_2^y - x_2^e}{x_2^y}\right| \times 100\,\% = \left|\frac{-2.005306123 + 2.057142857}{-2.005306123}\right| \times 100\,\% = 2.58\,\%$$

$$|\epsilon_{a,3}| = \left|\frac{x_3^y - x_3^e}{x_3^y}\right| \times 100\,\% = \left|\frac{1.996214286 - 2.018571429}{1.996214286}\right| \times 100\,\% = +1.1\,\%$$

Ör

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Lineer denklem sistemini Gauss-Seidel iterasyon yöntemiyle çöz. ($\epsilon_s = 5\%$) tolerans yüzdesi

istenen yüzde bağıl hata

$$x_1^y = \frac{1}{10}\left(2 + 2x_3^e\right) = \frac{1}{5}\left(1 + x_3^e\right)$$

$$x_2^y = \frac{1}{5}\left(3 - x_1^y + 2x_3^e\right)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

$$x_3^y = -\frac{1}{2}\left(-6 - x_2^y\right) = 3 + 0.5x_2^y$$

1. iterasyon

$x_1 = 0.2 \quad x_2 = \frac{1}{5}(3 - 0.2) = 0.56 \quad x_3 = 3 + 0.5 \times 0.56 = 3.28$

2. iterasyon

$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 3.28) = 0.856$

$x_2 = \frac{1}{5}(3 - 0.856 + 2 \times 3.28) = 1.7408$

$x_3 = 3 + 0.5 \times 1.7408 = 3.8704$

$$|\epsilon_{a,1}| = \left|\frac{0.856 - 0.2}{0.856}\right| \times 100\% = 76.64\% > \epsilon_s$$

3. iterasyon

$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 3.8704) = 0.97408$

$x_2 = \frac{1}{5}(3 - 0.97408 + 2 \times 3.8704) = 1.953344$

$x_3 = 3 + 0.5 \times 1.953344 = 3.976672$

$$|\epsilon_{a,1}| = \left|\frac{0.97408 - 0.856}{0.97408}\right| \times 100\% = 12.12\% > \epsilon_s$$

4. iterasyon

$x_1 = \frac{1}{5}(1 + 3.976672) = 0.9953344$

$x_2 = \frac{1}{5}(3 - 0.9953344 + 2 \times 3.976672) = 1.99160192$

$x_3 = 3 + 0.5 \times 1.99160192 = 3.99580086$

$$|\epsilon_{a,1}| = \left|\frac{0.9953344 - 0.97408}{0.9953344}\right| \times 100\% = 2.14\% < \epsilon_s$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left|\frac{1.99160192 - 1.953344}{1.99160192}\right| \times 100\% = 1.92\% < \epsilon_s$$

$$|\epsilon_{a,3}| = \left|\frac{3.99580086 - 3.976672}{3.99580086}\right| \times 100\% = 0.48 < \epsilon_s$$

Ör $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ Lineer denklem sistemini hızlandırma faktörlü Gauss-Seidel yöntemiyle 3 iterasyonda çöz.

$w = 1.2$

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ gerçek değerle ise gerçek hata yüzdelerini bul.

$$x_1^y = (1-w)x_1^e + \frac{w}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^e - a_{13}x_3^e\right) \qquad a_{11} \neq 0$$

$$x_2^y = (1-w)x_2^e + \frac{w}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^y - a_{23}x_3^e\right) \qquad a_{22} \neq 0$$

$$x_3^y = (1-w)x_3^e + \frac{w}{a_{33}}\left(b_2 - a_{31}x_1^y - a_{32}x_2^y\right) \qquad a_{33} \neq 0$$

$$x_1^y = -0.2x_1^e + \frac{1.2}{6}\left(4 + x_3^e\right) = 0.2\left(4 - x_1^e + x_3^e\right)$$

$$x_2^y = -0.2x_2^e + \frac{1.2}{6}\left(1 - 3x_1^y - 2x_3^e\right) = 0.2\left(1 - 3x_1^y - x_2^e - 2x_3^e\right)$$

$$x_3^y = -0.2x_3^e + \frac{1.2}{6}\left(10 - 2x_2^y\right) = 0.2\left(10 - 2x_2^y - x_3^e\right)$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$x_1 = 0.8 \quad x_2 = 0.2\left(1 - 3 \times 0.8\right) = -0.28 \quad x_3 = 0.2\left(10 - 2 \times (-0.28)\right) = 2.112$

2. iterasyon

$x_1 = 0.2\left(4 - 0.8 + 2.112\right) = 1.0624$

$x_2 = 0.2\left(1 - 3 \times 1.0624 + 0.28 - 2 \times 2.112\right) = -1.22624$

$x_3 = 0.2\left(10 - 2 \times (-1.22624) - 2.112\right) = 2.068096$

3. iterasyon

$x_1 = 0.2\left(4 - 1.0624 + 2.068096\right) = 1.0011392 \longrightarrow 1$

$x_2 = 0.2\left(1 - 3 \times 1.0011392 + 1.22624 - 2 \times 2.068096\right) = -0.98267392 \rightarrow -1$

$x_3 = 0.2\left(10 - 2 \times (-0.98267392) - 2.068096\right) = 1.979450368 \longrightarrow 2$

$$\epsilon_{t,1} = \frac{1 - 1.0011392}{1} \times 100\% = -0.11\%$$

$$\epsilon_{t,2} = \frac{-1 + 0.98267392}{-1} \times 100\% = 1.73\%$$

$$\epsilon_{t,3} = \frac{2 - 1.979450368}{2} \times 100\% = 1.03\%$$

Ör $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$ Gauss seidel iterasyon yöntemiyle $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ sonucuna yakınsu

$$x_1^y = \frac{1}{2}(13 - 5x_2^e - 6x_3^e)$$

$$x_2^y = 9 - 3x_1^y - 5x_3^e$$

$$x_3^y = 7 - 2x_1^y - 4x_2^y$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ başlangıçta

1. iterasyon

$x_1 = 6.5 \quad x_2 = 9 - 3 \times 6.5 = -10.5 \quad x_3 = 7 - 2 \times 6.5 - 4 \times (-10.5) = 36$

2. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{2}(13 - 5 \times (-10.5) - 6 \times 36) = -75.25$$

$$x_2 = 9 - 3 \times (-75.25) - 5 \times 36 = 54.75$$

$$x_3 = 7 - 2 \times (-75.25) - 4 \times 54.75 = -61.5$$

3. iterasyon

$$x_1 = \frac{1}{2}(13 - 5 \times 54.75 - 6 \times (-61.5)) = 54.125$$

$$x_2 = 9 - 3 \times 54.125 - 5 \times (-61.5) = 154.125$$

$$x_3 = 7 - 2 \times 54.125 - 4 \times 154.125 = -717.75$$

Sonuç bulunamıyor. Sistem ıraksak.

$$\left.\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| &> |a_{31}| + |a_{32}| \end{aligned}\right\}$$

Şart sağlanıyorsa yakınsak sağlanmıyorsa ıraksak olabilir.

$$\left.\begin{aligned} 2 &\not> 5+6 = 11 \\ 1 &\not> 3+5 = 8 \\ 1 &\not> 2+4 = 6 \end{aligned}\right\}$$

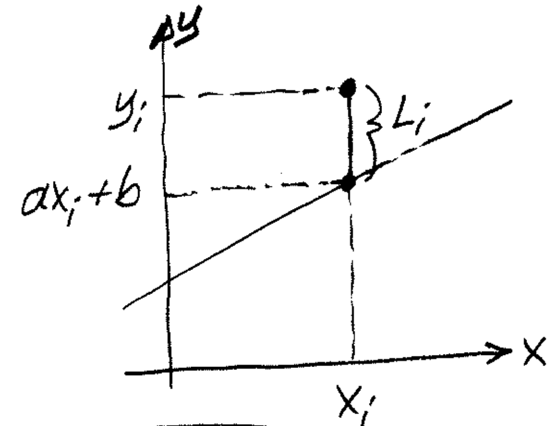
sağlanmıyor. ıraksak olabilir.

En Küçük Kareler Yöntemi

Uygun Doğru Uydurma

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ n tane nokta veriliyor.

$y = ax + b$ doğrusu noktalara yakınlık bakımından en uygun doğru olsun.



i. nokta : (x_i, y_i)

$L_i = y_i - ax_i - b_i$ i. noktanın doğruya dikey uzunluğu

$$q = \sum_{i=1}^{n} L_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b_i)^2$$ farkların karelerinin toplamı

$\dfrac{\partial q}{\partial a} = 0, \ \dfrac{\partial q}{\partial b} = 0$ olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\to$ $y = ax + b$ denklemi için a, b değerlerinin hesaplanması

Uygun Parabol Uydurma

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ için $q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$ min. olmalı.

yani $\dfrac{\partial q}{\partial a} = 0, \ \dfrac{\partial q}{\partial b} = 0, \ \dfrac{\partial q}{\partial c} = 0$ olmalı.

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (ax_i^2 + bx_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (ax_i^2 + bx_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

$\to$ $y = ax^2 + bx + c$ parabolü için en uygun a, b, c değerlerinin hesaplanması

m. dereceden polinom olsa idi

$m+1$ denklem ve $m+1$ değişken olurdu.

Ör (2,5), (3,9), (4,15), (5,21) noktaları için en küçük kareler yöntemini kullanarak bir doğru uydur.

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\sum_{i=1}^{n}y_i \longrightarrow 14a+4b=50 \rightarrow 7a+2b=25$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(ax_i+b)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \longrightarrow 54a+14b=202 \rightarrow 27a+7b=101$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 25 \\ 27 & 7 & 101 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/7 & 25/7 \\ 27 & 7 & 101 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/7 & \frac{25}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{32}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 27/5 \\ 0 & 1 & -32/5 \end{bmatrix}$$

$$a=\frac{27}{5}=5.4 \qquad b=-\frac{32}{5}=-6.4 \qquad y=5.4x-6.4$$

Ör (5,6), (6,0), (7,-3), (8,-1), (9,5), (10,15) noktaları için en küçük kareler yöntemini kullanarak bir parabol uydur.

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c)=\sum_{i=1}^{n}y_i \longrightarrow 355a+45b+6c=22$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(ax_i^2+bx_i+c)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \longrightarrow 2925a+355a+45c=196$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2(ax_i^2+bx_i+c)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i \longrightarrow 24979a+2925b+355c=1844$$

$$\left.\begin{aligned} a+0.127b+0.017c&=0.062 \\ 8.239a+b+0.127c&=0.552 \\ 70.363a+8.239b+c&=5.194 \end{aligned}\right\} \text{ çöz.}$$

Fourier Seri Açılımı

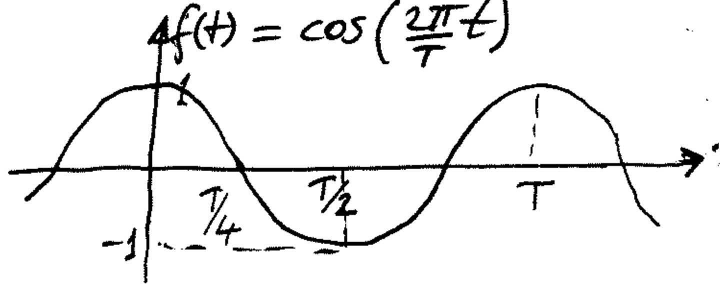
Bütün peryodik fonksiyonlar sinüs veya kosinüs terimlerinin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$f(t)$ peryodik bir fonksiyon ise $f(t) = f(t + nT)$, $n \in Z$

T : peryod (sn)

f : frekans (Hz)

$f = \frac{1}{T}$



$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n w t) + b_n \sin(n w t) \right)$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n w t + \theta_n)$$

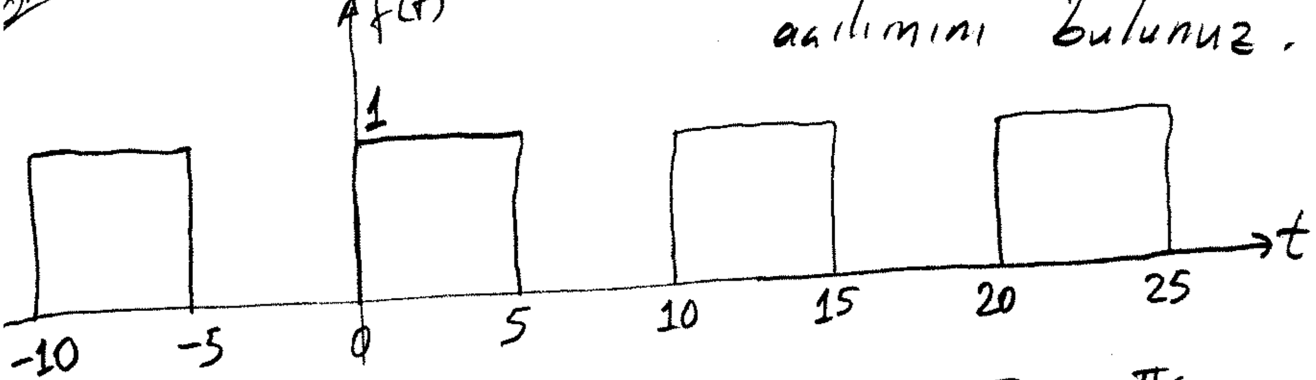
a_n, b_n veya α_n, θ_n değişkenleri fourier katsayılarıdır.

$\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$, $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t)\, dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n w t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n w t)\, dt$$

Ör: aşağıda verilen peryodik fonksiyonun fourier seri açılımını bulunuz.



$T = 10$ sn $\quad w = 2\pi/T = \pi/5$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{1}{10}\int_0^{5} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(nwt)\,dt = \frac{2}{10}\int_0^5 \cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{5}t\right)}{\frac{n\pi}{5}}\Bigg|_0^5 = \frac{1}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin(0)\right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(nwt)\,dt = \frac{2}{10}\int_0^5 \sin\left(\frac{n\pi}{5}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right)}{-\frac{n\pi}{5}}\Bigg|_0^5 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ çift ise} \\ \frac{2}{n\pi} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

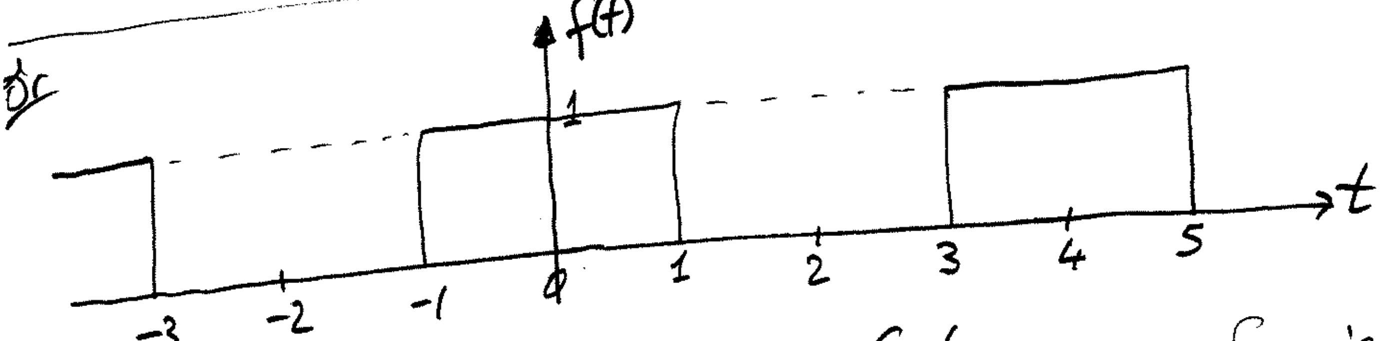
$$a_n = \left\{\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots\right\}, \quad b_n = \left\{0, \tfrac{2}{\pi}, 0, \tfrac{2}{3\pi}, 0, \tfrac{2}{5\pi}, \ldots\right\}$$

ilk 6 terim istenseydi

$a_0 = 1/2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$

$b_0 = 0$, $b_1 = 2/\pi$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = 2/5\pi$

ör



Yukarıda verilen peryodik fonksiyonun fourier seri açılımını bulunuz.

$T = 4$

$w = \frac{2\pi}{T} = \pi/2$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} dt = 1/2$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(nwt)\,dt = \frac{2}{4}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-1}^{+1} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ 2/n\pi, & n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -2/n\pi, & n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(nwt)\,dt = \frac{2}{4}\int_{-1}^{+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt$$

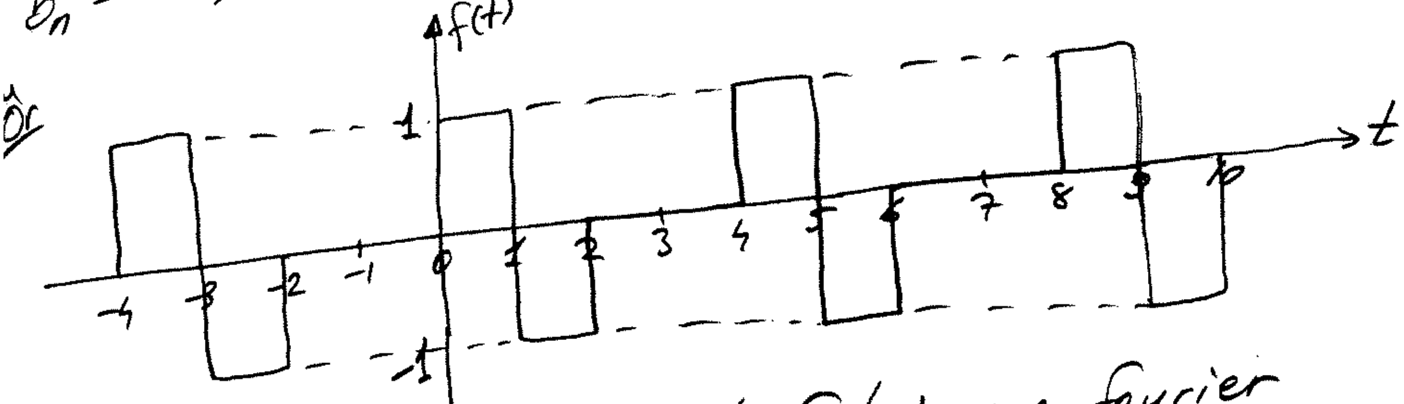
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 0$$

$$a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{\pi}, 0, -\frac{2}{3\pi}, 0, \frac{2}{5\pi}, 0, -\frac{2}{7\pi}, 0, \frac{2}{9\pi}, \ldots\right\}$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ör



Yukarıda verilen peryodik fonksiyonun fourier seri açılımını bulunuz.

$T = 4$

$w = \frac{2\pi}{T} = \pi/2$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 dt - \int_1^2 dt\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1-1) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt - \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)$$ 60

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi/2}\Bigg|_0^1 - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi/2}\Bigg|_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \underbrace{\sin(0)}_{0} - \underbrace{\sin(n\pi)}_{0} + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ çift ise} \\ 2/n\pi & , n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -2/n\pi & , n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{4}\left(\int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt - \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{-n\pi/2}\Bigg|_0^1 - \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{-n\pi/2}\Bigg|_1^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{0} - \cos(0) - \cos(n\pi) + \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{0}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1 + \cos(n\pi)\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ tek ise} \\ 2/n\pi & , n \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$a_n = \left\{0, \frac{2}{\pi}, 0, -\frac{2}{3\pi}, 0, \frac{2}{5\pi}, 0, -\frac{2}{7\pi}, 0, \frac{2}{9\pi}, 0, \ldots\right\}$$

$$b_n = \left\{0, 0, \frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{2\pi}, 0, \frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{4\pi}, 0, \frac{1}{5\pi}, 0, \ldots\right\}$$

Ö: $f(t) = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{9}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \pi/3\right)$ şeklinde verilen fonksiyonun fourier seri açılımını bulunuz.

$$f(t) = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{9}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \pi/3\right)$$

$$= 5 + \cos\left(\frac{\pi}{9}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cos(\pi/3) + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\sin(\pi/3)$$

$$= 5 + \cos\left(\frac{\pi}{9}t\right) + 0.5 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{9} \longrightarrow T_1 = 18 \\ w_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{6} \longrightarrow T_2 = 12 \end{array}\right\}$$

en küçük ortak katları bulunmalı.

18	2
9	3
3	3
1	

12	2
6	2
3	3
1	

$$T = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{36} = \pi/18$$

$$f(t) = 5 + \cos(2wt) + 0.5\cos(3wt) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3wt)$$

$$a_0 = 5, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0.5, \quad b_3 = \sqrt{3}/2$$

$$a_n = \begin{cases} 5 & n=0 \\ 0 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0.5 & n=3 \\ 0 & n \geq 4 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \sqrt{3}/2 & n=3 \\ 0 & n \neq 3 \end{cases}$$

Matris türevleri

$$\frac{d}{dt}A(t) = \dot{A}(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t).B(t)\right) = \dot{A}(t).B(t) + A(t).\dot{B}(t)$$

ör $\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = ?$

$$A(t)A^{-1}(t) = I \longrightarrow \frac{d}{dt}(A.A^{-1}) = \frac{d}{dt}(I) = 0$$

$$\frac{dA}{dt}.A^{-1} + A\frac{d}{dt}A^{-1} = 0$$

$$A\frac{d}{dt}A^{-1} = -\dot{A}A^{-1} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}.\dot{A}.A^{-1}$$

ör $\frac{d}{dt}A^3 = ?$

$$\frac{d}{dt}A^2 = \frac{d}{dt}(A.A) = \dot{A}A + A\dot{A}$$

$$\frac{d}{dt}A^3 = \frac{d}{dt}(A.A^2) = \dot{A}A^2 + A\frac{d}{dt}A^2$$

$$= \dot{A}A^2 + A(\dot{A}A + A\dot{A}) = \dot{A}A^2 + A\dot{A}A + A^2\dot{A}$$

matris fonksiyonlar

$A^0 = I$

$AB \neq BA$ (Eşit olmak zorunda değil)

fakat $A.f(A) = f(A).A$ (eşit olur)

$$f(A) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + ---$$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}.A$$

$$\int_0^t e^{At}dt = A^{-1}(e^{At} - I)$$

A'nın tersi varsa

Cayley-Hamilton Teoremi

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I$$

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$f(s) = d(s).q(s) + r(s)$$

$$d(s) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f(s) = r(s) \\ f(A) = r(A) \end{array}$$

$d(s) = 0 \Rightarrow s_1, s_2, \ldots, s_m$ değerleri bulunur.

$$r(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_{m-1} s^{m-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \cdots & s_1^{m-1} \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \cdots & s_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_m & s_m^2 & \cdots & s_m^{m-1} \end{bmatrix}}_{\text{Vandermonde matrisi}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_m) \end{bmatrix}$$

Ör $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^5 = ?$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$d(s) = s^2 - 3s + 2 = 0$$

$$f(s) = s^5$$

$$\begin{array}{l|l} s^5 & s^2 - 3s + 2 \rightarrow d(s) \\ \vdots & \overline{s^3 + 3s^2 + 7s + 15} \rightarrow q(s) \\ \hline 31s - 30 \rightarrow r(s) & \end{array}$$

$$f(s) = \underbrace{d(s)}_{0} q(s) + r(s) = r(s)$$

$$A^5 = f(A) = 31A - 30I$$

$$= 31 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 30 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 31 \\ -62 & +93 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 31 \\ -62 & 63 \end{bmatrix}$$

3r $A=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $f(A)=A^5t+3A^2+e^{A^2t}$

$$sI-A=s\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&-6\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2&6\\-1&s-3\end{bmatrix}$$

$$d(s)=\begin{vmatrix}s+2&6\\-1&s-3\end{vmatrix}=(s+2)(s-3)+6=s^2-s=s(s-1)=0$$

$$s_1=0\ ,\ s_2=1$$

$$f(s)=r(s)=\alpha_0+\alpha_1 s=s^5t+3s^2+e^{s^2t}$$

$$f(0)=\alpha_0=1$$

$$f(1)=\alpha_0+\alpha_1=t+3+e^t \longrightarrow \alpha_1=e^t+t+2$$

$$f(A)=\alpha_0 I+\alpha_1 A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+(e^t+t+2)\begin{bmatrix}-2&-6\\1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2e^t-2t-3 & -6e^t-6t-12\\ e^t+t+2 & 3e^t+3t+7\end{bmatrix}$$

4r $A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}$ a) $f(A)=A^5+2A^3$ b) $f(A)=e^{At}$

$$sI-A=s\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s&-1\\2&s-3\end{bmatrix}$$

$$d(s)=\det(sI-A)=\begin{vmatrix}s&-1\\2&s-3\end{vmatrix}=s(s-3)+2=s^2-3s+2=0$$

$$s_1=1\ ,\ s_2=2$$

1) $f(s)=r(s)=\alpha_0+\alpha_1 s=s^5+2s^3$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0+\alpha_1&=3\\ \alpha_0+2\alpha_1&=48\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}\alpha_0&=-42\\ \alpha_1&=45\end{aligned}\qquad f(s)=45s-42$$

$$f(A)=45A-42I=45\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}-42\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-42&45\\-90&93\end{bmatrix}$$

b) $f(s) = r(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s = e^{st}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= e^t \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 &= e^{2t} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^t \\ 1 & 2 & e^{2t} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & e^{2t}-e^t \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2e^t - e^{2t} \\ 0 & 1 & e^{2t}-e^t \end{bmatrix}$$

$\alpha_0 = 2e^t - e^{2t}$

$\alpha_1 = e^{2t} - e^t$

$f(s) = e^{st} = \alpha_0 + \alpha_1 s = (2e^t - e^{2t}) + (e^{2t} - e^t)s$

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$= (2e^t - e^{2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{2t} - e^t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Ör $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ veriliyor.

a) $f(A) = A^4 + 2A^3 - 7A^2 + A + 3I$

b) $f(A) = \cos(At)$

fonk. cayley-hamilton teoremini kullanarak çözünüz.

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 & -1 \\ 2 & s-2 & 0 \\ 0 & -3 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$d(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & 1 & -1 \\ 2 & s-2 & 0 \\ 0 & -3 & s+1 \end{vmatrix} = s^3 - s^2 - 4s + 4 = 0$$

$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = -2$

$$f(s) = d(s)q(s) + r(s)$$

$$\begin{array}{l|l}
f(s) = s^4+2s^3-7s^2+s+3 & s^3-s^2-4s+4 \longrightarrow d(s) \\ \cline{2-2}
\underline{-\; s^4-s^3-4s^2+4s} & s+3 \\
\quad 3s^3-3s^2-3s+3 & \\
\underline{-\; 3s^3-3s^2-12s+12} & \\
\quad 9s-9 \longrightarrow r(s) &
\end{array}$$

$$f(s) = r(s) = \underset{-9}{\alpha_0} + \underset{9}{\alpha_1} s + \underset{0}{\alpha_2} s^2$$

$$f(s) = r(s) = 9(s-1)$$

$$f(A) = 9(A-I) = 9\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -9 & 9 \\ -18 & 9 & 0 \\ 0 & 27 & -18 \end{bmatrix}$$

$s_1=1,\ s_2=2,\ s_3=-2$

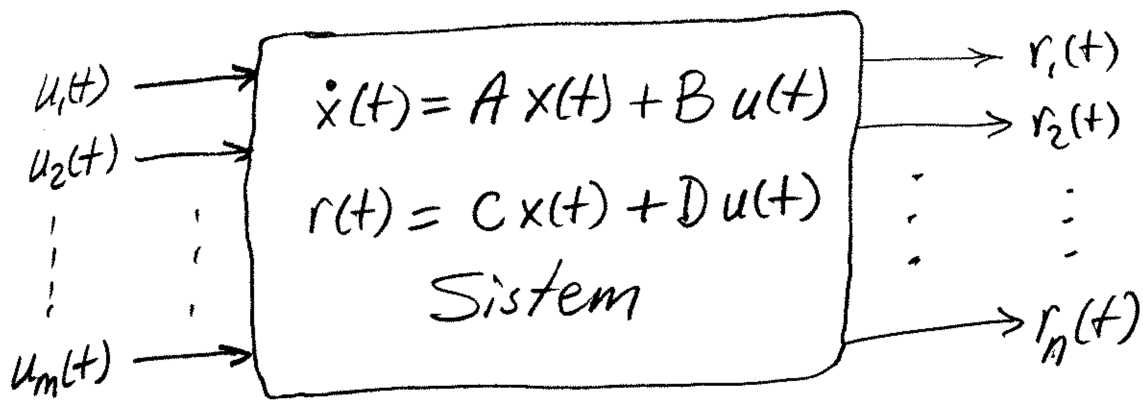
b) $f(s) = \cos(st) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{çöz.}} \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\cos t \end{array}$$

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

$$= \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\cos t + \cos 2t}{3} & \frac{\cos 2t - \cos t}{3} & \frac{\cos t - \cos 2t}{3} \\ \frac{4\cos t - 4\cos 2t}{3} & \frac{5\cos 2t - 2\cos t}{3} & \frac{2\cos t - 2\cos 2t}{3} \\ 2\cos t - 2\cos 2t & \cos 2t - \cos t & \cos t \end{bmatrix}$$



A, B, C, D : sistem matrisleri

x(t) : sistemin iç değişkenleri

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{k\times 1} = \underbrace{A}_{k\times k}\ \underbrace{x(t)}_{k\times 1} + \underbrace{B}_{k\times m}\ \underbrace{u(t)}_{m\times 1}$$

$$\underbrace{r(t)}_{n\times 1} = \underbrace{C}_{n\times k}\ \underbrace{x(t)}_{k\times 1} + \underbrace{D}_{n\times m}\ \underbrace{u(t)}_{m\times 1}$$

$$x(t) = e^{At}.x(0) + (e^{At} - I).A^{-1}.B.u(t)$$

kullanılarak x(t) hesaplanır. sonra r(t)'de yerine konulursa r(t) hesaplanır.

<u>sistem elektrik devresi olsun</u>

u(t) : Devredeki akım ve voltaj kaynaklarıdır.

x(t) : Devre elemanları üzerindeki akım/voltaj değerleridir.
Diğerleri cinsinden ifade edilebilenler alınmaz.
parametre sayısını düşürmek için

r(t) : Devrede bulunması istenilen noktalar üzerindeki akım/voltaj değerleri.

6) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $u(t)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ e^{-t}\end{bmatrix}$, $x(0)=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

Yukarıdaki sistem için $r(t)=?$

$$d(s)=\det(sI-A)=\det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s-3\end{vmatrix}$$

$$=s(s-3)+2=s^2-3s+2=(s-1)(s-2)=0 \quad s_1=1,\ s_2=2$$

$$f(s)=e^{st}=\alpha_0+\alpha_1 s$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0+\alpha_1=e^t\\ \alpha_0+2\alpha_1=e^{2t}\end{array}\right\}\begin{bmatrix}1 & 1 & e^t\\ 1 & 2 & e^{2t}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 2e^t-e^{2t}\\ 0 & 1 & -e^t+e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\alpha_0=2e^t-e^{2t},\quad \alpha_1=-e^t+e^{2t}$$

$$f(A)=e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A=\alpha_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\alpha_1\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ -2\alpha_1 & \alpha_0+3\alpha_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^t-e^{2t} & -e^t+e^{2t}\\ -2e^t+2e^{2t} & -e^t+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$[A\ I]\sim[I\ A] \Longrightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x(0)+(e^{At}-I)A^{-1}Bu(t)$$

$$=\begin{bmatrix}2e^t-e^{2t} & -e^t+e^{2t}\\ -2e^t+2e^{2t} & -e^t+2e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}2e^t-e^{2t}-1 & -e^t+e^{2t}\\ -2e^t+2e^{2t} & -e^t+2e^{2t}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}3e^{t}-2e^{2t}\\ -e^{t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2e^{t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{3}{2} & -e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}\\ -4e^{t}+5e^{2t}-1 & e^{t}-e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$$ 6.

$$=\begin{bmatrix}3e^{t}-2e^{2t}\\ -e^{t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{-t}\\ -4+5e^{t}-e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-t}\\ -4+4e^{t}-e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$r(t)=C\,x(t)+D\,u(t)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-t}\\ -4+4e^{t}-e^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-t}\\ 8+e^{t}-4e^{2t}-2e^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1+2e^{-t}\\ 5+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ 13+e^{t}-4e^{2t}+e^{-t}\end{bmatrix}$$

Ör. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $u=1$, $x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\dot{x}=Ax+bu$

$t\geq 0$ için $x(t)=?$

$[A\ I]\sim[I\ A^{-1}]\Longrightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}3/2 & -1/2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

A önceki örneğin aynısı olduğundan Cayley-Hamilton yöntemi kullanılarak

$$f(A)=e^{At}=\begin{pmatrix}2e^{t}-e^{2t} & e^{2t}-e^{t}\\ -2e^{t}+2e^{2t} & 2e^{2t}-e^{t}\end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + (e^{At} - I)A^{-1}Bu(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} - 1 & -e^t + e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} - 1 & -e^t + e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + 1/2 \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + 1/2 \\ -e^t + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Enterpolasyon

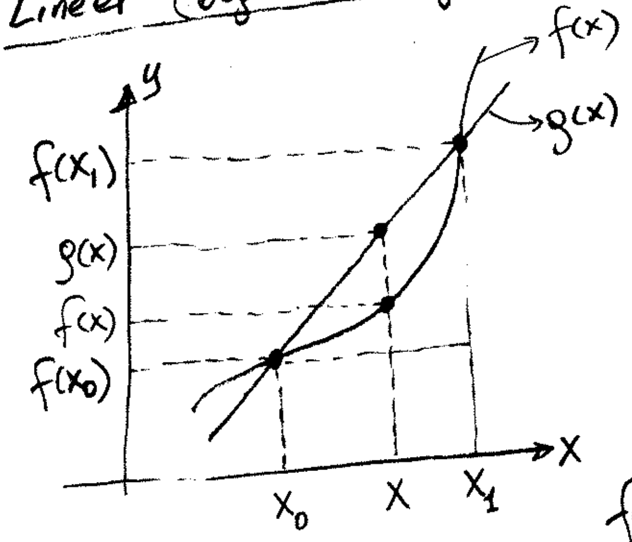
Bilinen değerler kullanılarak bilinmeyen değerlerin yaklaşık olarak hesaplanmasına enterpolasyon denir.

Her fonksiyon n. dereceden bir polinomla ifade edilebilir. n ne kadar büyükse hata oranı o kadar düşüktür.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

* Bilinen noktalar kullanılarak uygun a değerleri hesaplanır.
* k tane nokta varsa (k-1). dereceden enterpolasyon kullanmak en uygunudur.
* Noktalar arası birbirine ne kadar yakınsa hata oranı o kadar az olur.

Lineer (Doğrusal veya 1. dereceden) Enterpolasyon



İki nokta arasında herhangi bir noktayı hesaplar.

$x = x_0$ ve $x = x_1$ için $f(x) = g(x)$

diğer durumlarda $f(x) \approx g(x)$ alınır.

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ör: $\sqrt{2}$ değerini $x \in [1,4]$ aralığı için doğrusal enterpolasyon ile hesapla. Gerçek hata yüzdesini bul.

$f(x) = \sqrt{x}$ için $f(1) = 1$, $f(4) = 2$ $\quad x_0 = 1$, $x_1 = 4$

$$f(x) \approx f(1) + \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) = 1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3}$$

$$f(2) \approx \frac{2+2}{3} = 4/3 \qquad \epsilon_t = \frac{\sqrt{2} - 4/3}{\sqrt{2}} \times 100\% = 5.72\%$$

Ör: ln3 değerini doğrusal enterpolasyon ile hesapla

a) $x \in [1,5]$ aralığı

b) $x \in [2,4]$ aralığı

c) $x \in [2.5, 3.5]$ aralığı

Hata yüzdelerini bul.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$f(x) = \ln x \approx \ln x_0 + \frac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0}(x-x_0)$$

a) $$f(x) \approx \cancel{\ln 1}^{0} + \frac{\ln 5 - \cancel{\ln 1}}{5-1}(x-1) = \frac{x-1}{4}\ln 5$$

$$f(3) \approx \frac{3-1}{4}\ln 5 = \frac{\ln 5}{2} = 0.804718956$$

$$\epsilon_t = \frac{\ln 3 - 0.804718956}{\ln 3} \times 100\ \% = 26.75\ \%$$

b) $$f(x) \approx \ln 2 + \frac{\ln 4 - \ln 2}{4-2}(x-2) = \ln 2 + \frac{\ln(4/2)}{2}(x-2) = \frac{x \ln 2}{2}$$

$$f(3) \approx \frac{3.\ln 2}{2} = 1.039720771$$

$$\epsilon_t = \frac{\ln 3 - 1.039720771}{\ln 3} \times 100\ \% = 5.36\ \%$$

c) $$f(x) \approx \ln 2.5 + \frac{\ln 3.5 - \ln 2.5}{3.5-2.5}(x-2.5) = \ln 2.5 + (x-2.5)\ln 1.4$$

$$f(3) \approx \ln 2.5 + 0.5 \ln 1.4 = 1.08452685$$

$$\epsilon_t = \frac{\ln 3 - 1.08452685}{\ln 3} \times 100\ \% = 1.28\ \%$$

Aralık ne kadar küçükse hata oranı o derece az çıktı.

Ör

x	f(x)
1	8
4	2
9	5

f(3) ve f(5) değerlerini yandaki tabloyu kullanarak doğrusal enterpolasyonla hesapla.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

a) $x = 3$, $x \in [1, 4]$ aralığında

$x_0 = 1$, $x_1 = 4$

$$f(x) \approx f(1) + \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - x_0) = 8 + \frac{2-8}{4-1}(x-1) = 10 - 2x$$

$$f(3) \approx 10 - 2 \times 3 = 4$$

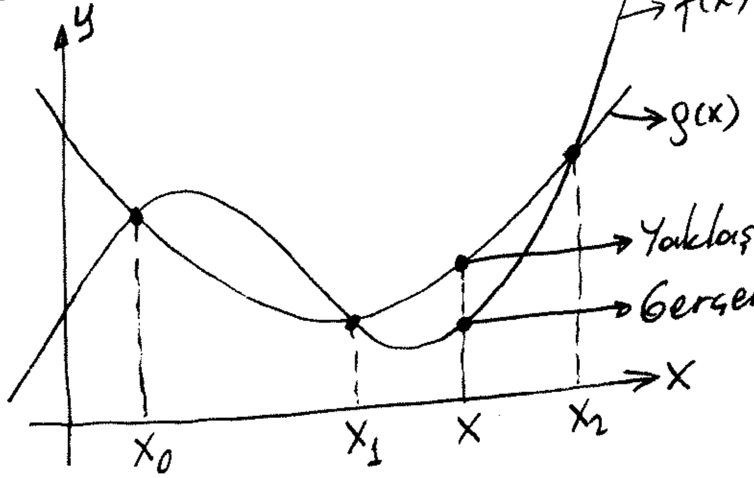
b) $x = 5$, $x \in [4, 9]$ aralığında

$x_0 = 4$, $x_1 = 9$

$$f(x) \approx f(4) + \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4}(x - 4) = \frac{3x - 2}{5}$$

$$f(5) \approx \frac{3 \times 5 - 2}{5} = \frac{13}{5} = 2.6$$

Quadratik (2. dereceden) Enterpolasyon



En az üç nokta bilinmeli.

x	f(x)
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$

$$f(x) \approx g(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Aralıkla birbirine yakınsa

- Tablodaki değerler kullanılarak b değerleri bulunur.

$$x = x_0 \Rightarrow f(x_0) = b_0 \longrightarrow b_0 = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \longrightarrow b_1 = \frac{f(x_1) - b_0}{x_1 - x_0}$$

$$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - b_0}{x_2 - x_0} - b_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - b_1}{x_2 - x_0}$$

Sonlu bölünmüş farklar tablosuyla

x	$f(x)$		
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$		

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$b_0 = f(x_0)$, $b_1 = f[x_1, x_0]$, $b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$ Yukarıdakiyle aynı

Diğer yol

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 &= f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 &= f(x_2) \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

fakat, bu yol öncekine göre daha uzun

Kübik (3. dereceden) Enterpolasyon

En az 4 nokta bilinmeli

x	f(x)	1	2	3
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0]$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1]-f[x_1, x_0]}{x_2-x_0}, \quad f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2]-f[x_2, x_1]}{x_3-x_1}$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1]-f[x_2, x_1, x_0]}{x_3-x_0}$$

n. dereceden enterpolasyon

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + b_n \prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1, x_0]$$

(n+1) nokta biliniyorsa n. dereceden enterpolasyon uygulanır.

Ör. $f(1)=2$, $f(4)=8$, $f(6)=16$ ise $f(3)=?$

a) 2. dereceden enterpolasyon ile çöz.

b) Sonlu bölünmüş farklar ile çöz.

c) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ fonksiyonunu kullanarak çöz.

---

a) $f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)$

$x_0=1$, $x_1=4$, $x_2=6$

$f(x)=b_0+b_1(x-1)+b_2(x-1)(x-4)$

$b_0=f(x_0)=2$

$$b_1=\frac{f(x_1)-b_0}{x_1-x_0}=\frac{8-2}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

$$b_2=\frac{\frac{f(x_2)-b_0}{x_2-x_0}-b_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{16-2}{6-1}-2}{6-4}=\frac{\frac{14}{5}-2}{2}=\frac{7}{5}-1=\frac{2}{5}=0.4$$

$f(x)=2+2(x-1)+0.4(x-1)(x-4)$

$f(3)=2+2(3-1)+0.4(3-1)(3-4)=2+4-0.8=5.2$

b)

x	$f(x)$		
1	2 (b_0)	$\frac{8-2}{4-1}=2$ (b_1)	$\frac{4-2}{6-1}=\frac{2}{5}=0.4$ (b_2)
4	8	$\frac{16-8}{6-4}=4$	
6	16		

$f(x)=2+2(x-1)+0.4(x-1)(x-4)$

$f(3)=2+2(3-1)+0.4(3-1)(3-4)=2+4-0.8=5.2$

c) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

$$\left.\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow a_0+a_1+a_2=2\\ x=4 &\Rightarrow a_0+4a_1+16a_2=8\\ x=6 &\Rightarrow a_0+6a_1+36a_2=16\end{aligned}\right\}\quad \underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4&16\\1&6&36\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\8\\16\end{bmatrix}}_{b}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&4&16&8\\1&6&36&16\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&3&15&6\\0&5&35&14\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&5&2\\0&5&35&14\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-4&0\\0&1&5&2\\0&0&10&4\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to a_0 \\ \to a_1 \\ \to a_2 \end{array}$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1.6 + 0.4x^2 = 0.4(4 + x^2)$$

$$f(3) = 0.4(4+9) = 5.2$$

Ör

x	f(x)
1	1
3	9
5	25
6	36

En uygun dereceden enterpolasyon kullanarak $f(4)$ değerini hesapla.

4 nokta var. $(4-1) = 3$

3. dereceden enterpolasyon.

x	f(x)			
$x_0 = 1$	$1 \; b_0$	$\frac{9-1}{3-1} = 4 \; b_1$	$\frac{8-4}{5-1} = 1 \; b_2$	$\frac{1-1}{6-1} = 0 \; b_3$
$x_1 = 3$	9	$\frac{25-9}{5-3} = 8$	$\frac{11-8}{6-3} = 1$	
$x_2 = 5$	25	$\frac{36-25}{6-5} = 11$		
$x_3 = 6$	36			

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 1 + 4(x-1) + (x-1)(x-3) + 0$$

$$= 1 + \cancel{4x} - 4 + x^2 - \cancel{4x} + 3 = x^2$$

$$f(4) = 4^2 = 16$$

Ör

x	-1	0	2	3	5
f(x)	2	1	3	5	1

Sonlu bölünmüş farklar tablosunu kullanarak $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ değerlerini hesapla.

x	f(x)				
$x_0 = -1$	$2 \; b_0$	$\frac{1-2}{0+1} = -1 \; b_1$	$\frac{1+1}{2+1} = 2/3 \; b_2$	$\frac{1/3 - 2/3}{3+1} = -1/12 \; b_3$	$\frac{-1/3 + 1/12}{5+1} = -\frac{1}{24} \; b_4$
$x_1 = 0$	1	$\frac{3-1}{2-0} = 1$	$\frac{2-1}{3-0} = 1/3$	$\frac{-4/3 - 1/3}{5-0} = -1/3$	
$x_2 = 2$	3	$\frac{5-3}{3-2} = 2$	$\frac{-2-2}{5-2} = -4/3$		
$x_3 = 3$	5	$\frac{1-5}{5-3} = -2$			
$x_4 = 5$	1				

+0

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+ b_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$f(x) = 2 - (x+1) + \frac{2}{3}x(x+1) - \frac{1}{12}x(x+1)(x-2)$$
$$- \frac{1}{24}x(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$f(1) = \cancel{2} - \cancel{2} + \frac{4}{3} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{6}} = 4/3$$

$$f(3) = 2 - 4 + 8 - 1 + 0 = 5 \quad \text{(Gerek yok)}$$

$$f(4) = 2 - 5 + \frac{40}{3} - \frac{10}{3} - \frac{5}{3} = 16/3$$

Ör

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-4	5	2	-7

Sonlu farklar tablosunu kullanarak $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ için a değerlerini hesapla.

	x	$f(x)$			
x_0	-2	-4 (b_0)	$\frac{5+4}{-1+2} = 9$ (b_1)	$\frac{-3-9}{0+2} = -6$ (b_2)	$\frac{-3+6}{1+2} = 1$ (b_3)
x_1	-1	5	$\frac{2-5}{0+1} = -3$	$\frac{-9+3}{1+1} = -3$	
x_2	0	2	$\frac{-7-2}{1-0} = -9$		
x_3	1	-7			

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$= -4 + 9(x+2) - 6(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x$$
$$= -4 + 9x + 18 - 6(x^2+3x+2) + x(x^2+3x+2)$$
$$= -4 + 9x + 18 - 6x^2 - 18x - 12 + x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$= x^3 - 3x^2 - 7x + 2$$

$$a_0 = 2 \quad a_1 = -7 \quad a_2 = -3 \quad a_3 = 1$$

Lagrange Enterpolasyon Yöntemi

(n+1) nokta biliniyorsa en uygunu n. dereceden Lagrange enterpolasyondur.

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i) \qquad L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

2 nokta biliniyorsa 1. dereceden Lagrange enterpolasyon

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \qquad L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$f(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)$$

3 nokta biliniyorsa 2. dereceden Lagrange enterpolasyon

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)$$

Ör

x	f(x)
$x_0=1$	1
$x_1=3$	9

$$L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-3}{-2}$$

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-1}{2}$$

$$f(x)=\frac{x-3}{-2}.1+\frac{x-1}{2}.9$$

$$=\frac{3-x+9x-9}{2}=4x-3$$

$$f(2)=4\times 2-3=5$$

Ör

x	f(x)
$x_0=1$	3
$x_1=4$	2
$x_2=6$	5

2. dereceden lagrange enterpolasyon ile $f(3)=?$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)}=\frac{(x-4)(x-6)}{15}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)}=\frac{(x-1)(x-6)}{-6}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)}=\frac{(x-1)(x-4)}{10}$$

$$f(x)=3\,\frac{(x-4)(x-6)}{15}+2\,\frac{(x-1)(x-6)}{-6}+5\,\frac{(x-1)(x-4)}{10}$$

$$f(3)=\frac{3}{5}+2-1=\frac{8}{5}=1.6$$

Ör

x	0	1	3	5
$f(x)$	16	-3	-17	41

3. dereceden lagrange enterpolasyon denklemini çıkart.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-15}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-3)(x-5)}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-5)}{-12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{40}$$

$$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$= -\frac{16}{15}(x-1)(x-3)(x-5) - \frac{3}{8}x(x-3)(x-5) + \frac{17}{12}x(x-1)(x-5)$$

$$+ \frac{41}{40}x(x-1)(x-3)$$

$$= (x-1)(x-5)\left(-\frac{16}{15}(x-3) + \frac{17}{12}x\right) + x(x-3)\left(\frac{41}{40}(x-1) - \frac{3}{8}(x-5)\right)$$

$$= (x^2-6x+5)\,\frac{7x+16}{20} + (x^2-3x)\,\frac{13x+17}{20}$$

$$= \frac{1}{20}\left(7x^3 - 42x^2 + 35x + 16x^2 - 96x + 80 + 13x^3 - 39x^2 + 17x^2 - 51x\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left(20x^3 - 48x^2 - 112x + 80\right)$$

$$= x^3 - 2.4x^2 - 5.6x + 4$$

Nümerik Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_n(x)\,dx$$

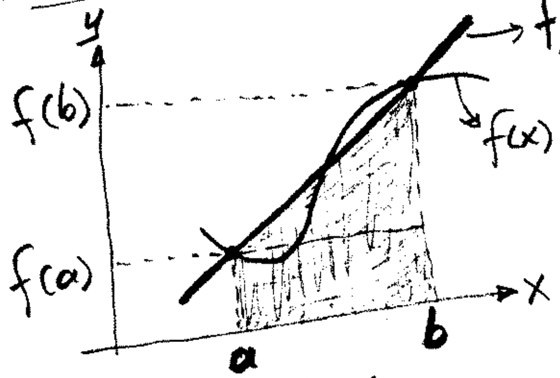
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$f_n(x)$ fonksiyonunun parametreleri n. dereceden enterpolasyon kullanılarak hesaplanır.

Yamuklar Kuralı

En az iki nokta bilinmeli.

a) iki nokta biliniyorsa



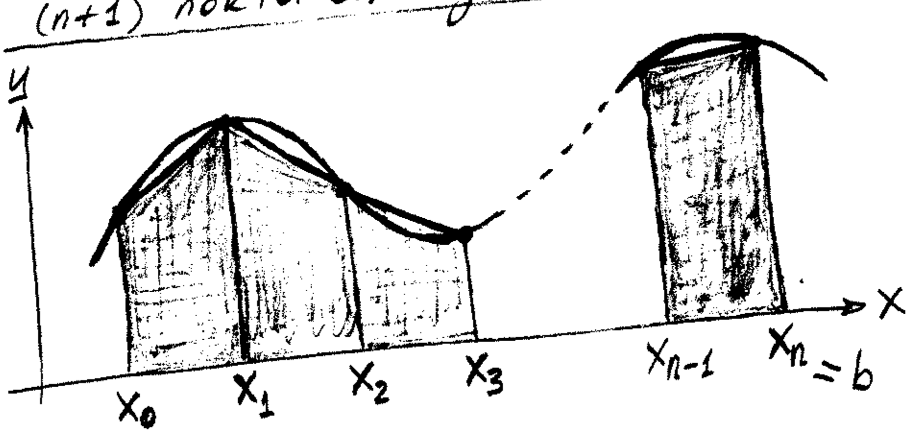
$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$$I \simeq \underbrace{\underbrace{(b-a)}_{\text{Genişlik}}\ \underbrace{\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{Ortalama Yükseklik}}}_{\text{Yamuğun alanı}}$$

[a,b] aralığı birbirine ne kadar yakınsa hata o derece azdır.

b) (n+1) nokta biliniyorsa



$x_0 = a$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ n tane eşit aralık

n büyükse hata oranı az.

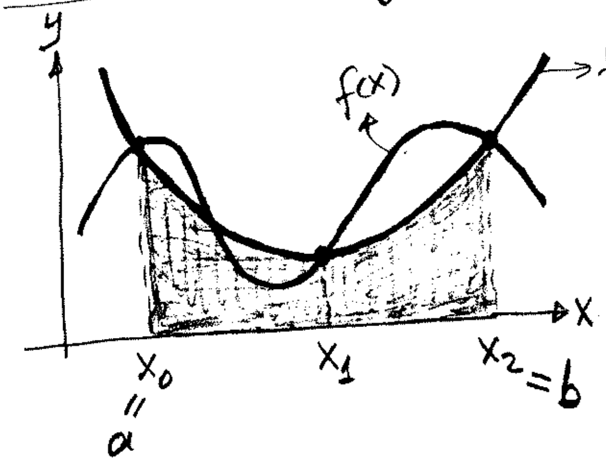
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq h\,\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\,\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$I \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

1/3 Simpson Kuralı

En az üç nokta bilinmeli

a) Üç nokta biliniyorsa



$\to f_2(x)$: 2. dereceden Lagrange polinom

$h = \dfrac{b-a}{2}$ 2 eşit aralık

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_2(x)\,dx$$

$$I \simeq \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i) \right) dx \simeq \underbrace{(b-a)}_{\text{genişlik}} \underbrace{\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}}_{\text{ortalama yükseklik}}$$

$$\boxed{I \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right), \quad h = \frac{b-a}{2}}$$

b) $(n+1)$ nokta biliniyorsa   (n çift sayı olmalı)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{h}{3}\left(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	1						
		1	4	1				
				1	4	1		
						1	4	1
1	4	2	4	2	4	2	4	1

$$\boxed{I \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right) \qquad h = \frac{b-a}{n} \quad n \text{ tane eşit aralık}}$$

$n=6$ için

$$I \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\right)$$

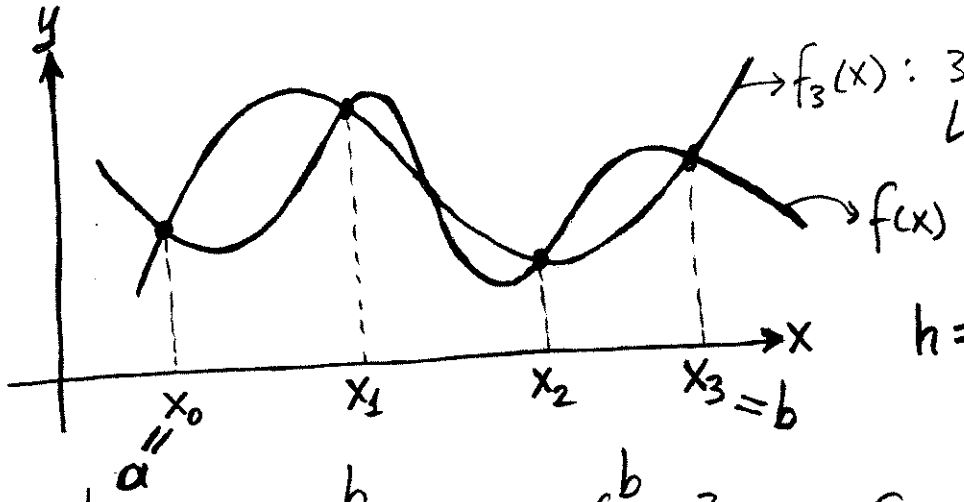
?

$$h = \frac{b-a}{6}$$

$\frac{3}{8}$ Simpson Kuralı

En az dört nokta bilinmeli

a) Dört nokta biliniyorsa



$h = \frac{b-a}{3}$ 3 tane eşit aralık

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f_3(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i) \right) dx$$

$$\simeq \underbrace{(b-a)}_{\text{Genişlik}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{Ortalama yükseklik}}$$

4 nokta $n=3$

$$\boxed{I \simeq \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right), \quad h = \frac{b-a}{3}}$$

b) (n+1) nokta biliniyorsa (n 3'ün katı olmalı)

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\boxed{I \simeq \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3\sum_{i=1,4,7}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{i=2,5,8}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=3,6,9}^{n-3} f(x_i) + f(x_n) \right)}$$

$h = \frac{b-a}{n}$ n tane eşit aralık

$\rightarrow n = 12$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	3	1									
			1	3	3	1						
						1	3	3	1			
									1	3	3	1
1	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	1

Ör $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunu $x \in [0,6]$ aralığında 6 eşit parçaya bölerek $I = \int_0^6 f(x)dx$ integralini

a) Yamuklar Kuralı ile bul.

b) 1/3 Simpson Kuralı ile bul.

c) 3/8 Simpson Kuralı ile bul.

$n=6$, $b=6$, $a=0$ $\quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

$x_4 = 4 \quad x_5 = 5 \quad x_6 = 6$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{6} = 1$$

$f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 6$, $f(4) = 11$

$f(5) = 18$, $f(6) = 27$

a) $$I \simeq \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + 2f(5) + f(6)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(3 + 4 + 6 + 12 + 22 + 36 + 27\right) = 55$$

b) $$I \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{3}\left(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + 2f(4) + 4f(5) + f(6)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{3}\left(3 + 8 + 6 + 24 + 22 + 72 + 27\right) = 54$$

c) $$I \simeq \frac{3h}{8}\left(f(x_0) + 3\sum_{i=1,4,7}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{i=2,5,8}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=3,6,9}^{n-3} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$$\simeq \frac{3}{8}\left(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + 2f(3) + 3f(4) + 3f(5) + f(6)\right)$$

$$\simeq \frac{3}{8}\left(3 + 6 + 9 + 12 + 33 + 54 + 27\right) = 54$$

Ör: $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ fonksiyonunu $[0, 0.8]$ aralığında 5 parçaya bölüp ilk 2 parçası için $1/3$ simpson kuralını, diğer 3 parçası için $3/8$ simpson kuralını uygulayarak $I = \int_0^{0.8} f(x)dx$ integralini çöz. Gerçek integral 1.64053334 ise gerçek hata yüzdesi nedir?

$n = 5 \qquad h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0.8-0}{5} = 0.16$

$a = 0$

$b = 0.8$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0.16	0.32	0.48	0.64	0.8

$\underbrace{x_0 \; x_1 \; x_2}_{1/3 \text{ Simpson}} \; \underbrace{x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5}_{3/8 \text{ Simpson}}$

$1/3$ Simpson: 3 nokta, 2 parça, I_1

$3/8$ Simpson: 4 nokta, 3 parça, I_2

$I = I_1 + I_2$

$f(0) = 0.2$

$f(0.16) = 1.29691904$

$f(0.32) = 1.74339328$

$f(0.48) = 3.18601472$

$f(0.64) = 3.181928961$

$f(0.8) = 0.232$

$$I_1 \simeq (x_2 - x_0)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$\simeq 0.32 \, \frac{0.2 + 4 \times 1.29691904 + 1.74339328}{6} = 0.380323703$$

$$I_2 \simeq (x_5 - x_2)\frac{f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + f(x_5)}{8}$$

$$\simeq (0.8 - 0.32)\frac{1.74339328 + 3 \times 3.18601472 + 3 \times 3.181928961 + 0.232}{8}$$

$$\simeq 1.264753459$$

$$I = I_1 + I_2 \simeq 0.380323703 + 1.264753459$$

$$\simeq 1.645077162$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.64053334 - 1.645077162}{1.64053334} \times 100\,\% = -0.28\,\%$$

Ör $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında

a) $n=6$ için $3/8$ Simpson Kuralı ile integralini hesapla.

b) $h = \pi/5$ alınarak ilk iki parça için $1/3$ Simpson kuralını, diğer üç parça için $3/8$ Simpson kuralını uygularak integralini hesapla.

a) $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{6}$ $\quad b=\pi,\ a=0,\ n=6$

$x_0 = 0,\ x_1 = \pi/6,\ x_2 = \pi/3,\ x_3 = \pi/2,\ x_4 = 2\pi/3,\ x_5 = \frac{5\pi}{6},\ x_6 = \pi$

$$I \simeq \frac{3}{8n}(b-a)\left(f(x_0) + 3\sum_{i=1,4,7}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{i=2,5,8}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=3,6,9}^{n-3} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$$\simeq \frac{\pi}{16}\left(f(0) + 3f(\pi/6) + 3f(\pi/3) + 2f(\pi/2) + 3f(2\pi/3) + 3f(5\pi/3) + f(\pi)\right)$$

$\simeq 1.197654464$

b) $h = \pi/5 = \frac{b-a}{n}$ $\quad b=\pi,\ a=0,\ n=5$

$x_0 = 0,\ x_1 = \pi/5,\ x_2 = \frac{2\pi}{5},\ x_3 = \frac{3\pi}{5},\ x_4 = \frac{4\pi}{5},\ x_5 = \pi$

$I \simeq I_1 + I_2$

$$I_1 \simeq (x_2 - x_0)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} = \frac{2\pi}{5}\,\frac{f(0) + 4f(\pi/5) + f(2\pi/5)}{6}$$

$\simeq 0.691610632$

$$I_2 \simeq (x_5 - x_2)\frac{f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + f(x_5)}{8}$$

$$\simeq \frac{3\pi}{5\times 8}\left(f(2\pi/5) + 3f(3\pi/5) + 3f(4\pi/5) + f(\pi)\right)$$

$\simeq 1.311830561$

$I = I_1 + I_2 \simeq 2.003441193$

$$I = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

$$\epsilon_t = \frac{2 - 2.003441193}{2} \times 100\,\% = -0.17\,\%$$

Ör $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, $I = \int_{-3}^{3} f(x)dx$ değerini $n=6$ için

a) Yamuklar Kuralı ile

b) $1/3$ Simpson Kuralı ile

c) $3/8$ Simpson Kuralı ile

hesapla. $I = \frac{12}{\pi}$ gerçek değer ise Gerçek hata yüzdelerini bul.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-3)}{6} = 1$

$x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$

$f(x_0) = f(-3) = \cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$

$f(x_1) = f(-2) = \cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$

$f(x_2) = f(-1) = \cos(-\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$f(x_3) = f(0) = \cos(0) = 1$

$f(x_4) = f(\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$f(x_5) = f(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$

$f(x_6) = f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$

a) $I \simeq (x_n - x_0)\dfrac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$

$\simeq \frac{1}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)\right)$

$\simeq \frac{1}{2}\left(0 + 1 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 1 + 0\right)$

$\simeq 2 + \sqrt{3} = 3.732050808$ $\qquad \frac{12}{\pi} = 3.819718634$

$\epsilon_t = \dfrac{\frac{12}{\pi} - 3.732050808}{12/\pi} \times 100\,\% = 2.3\,\%$

b)
$$I \simeq (x_n - x_0)\,\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n}$$

$$\simeq \frac{1}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right)$$

$$\simeq \frac{1}{3}\left(0 + 2 + \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + 2 + 0\right)$$

$$\simeq \frac{8 + 2\sqrt{3}}{3} = 3.821367205$$

$$\epsilon_t = \frac{12/\pi - 3.821367205}{12/\pi} \times 100\,\% = -0.043\ \%$$

c)
$$I \simeq \frac{3}{8n}(x_n - x_0)\left(f(x_0) + 3\sum_{i=1,4,7}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{i=2,5,8}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=3,6,9}^{n-3} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

$$\simeq \frac{3}{8}\left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right)$$

$$\simeq \frac{3}{8}\left(0 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 0\right)$$

$$\simeq \frac{3}{8}\left(5 + 3\sqrt{3}\right) = 3.823557159$$

$$\epsilon_t = \frac{12/\pi - 3.823557159}{12/\pi} \times 100\,\% = -0.1\ \%$$

Nümerik Türev

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

Taylor serisi yardımıyla nümerik türev formülleri çıkarılır.

ileri farklar

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) \;,\; f_i = f(x_i) \;,\; h = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta^2 f_i) = \Delta(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) = \Delta f_{i+2} - 2\Delta f_{i+1} + \Delta f_i$$

$$= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

Geri farklar

$$f_i = f(x_i) \;,\; f_{i-1} = f(x_{i-1}) \;,\; h = x_i - x_{i-1}$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$= (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla(\nabla^2 f_i) = \nabla(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) = \nabla f_i - 2\nabla f_{i-1} + \nabla f_{i-2}$$

$$= f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

$$\frac{d^n f_i}{dx^n} = \frac{\Delta^n f_i}{h^n} + O(h)$$

ileri farklar

$$\frac{d^n f_i}{dx^n} = \frac{\nabla^n f_i}{h^n} + O(h)$$

geri farklar

$$\Delta^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{i+n-k}$$ ileri farklar için

$$\nabla^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f_{i-k}$$ geri farklar için

<u>ileri farklar yöntemiyle türev</u>

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right)$$

<u>geri farklar yöntemiyle türev</u>

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right)$$

<u>merkezi farklar yöntemiyle türev</u>

ileri farklar ile geri farklar toplanıp 2 ile bölünür.

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left((\Delta f + \nabla f) + \frac{\Delta^3 f + \nabla^3 f}{3} + \frac{\Delta^5 f + \nabla^5 f}{5} + \cdots\right)$$

Sonlu farklar tablosu

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	-7	4	1	1	-4	11
2	-3	5	2	-3	7	
4	2	7	-1	4		
6	9	6	3			
8	15	9				
10	24					

$f'(4)$ değerini
a) ileri farklar
b) geri farklar
c) merkezi farklar
ile hesapla.

$h = 2$

a) $f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right) \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}\left(7 - \frac{-1}{2} + \frac{4}{3}\right)$
$= 4.416666667$

b) $f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right) \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{2}\right) = 2.75$

c) $f'(4) = \dfrac{4.416666667 + 2.75}{2} = 3.583333334$

Ör $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [1,2]$, $h = 0.2$

$f'(1.4)$ değerini ileri ve geri farklar ile hesapla.

$f'(1.4)$'ün gerçek değerini kullanarak $\epsilon_t = ?$

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
1.0	2	0.04	0.08	0	0	0
1.2	2.04	0.12	0.08	0	0	
1.4	2.16	0.20	0.08	0		
1.6	2.36	0.28	0.08			
1.8	2.64	0.36				
2.0	3					

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(1.4) = 2 \times 1.4 - 2$

$= 0.8$ gerçek değer

a) ileri farklar

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(1.4) = \frac{1}{0.2}\left(0.20 - \frac{0.08}{2} + \frac{0}{3}\right) = 0.8$$

$$\epsilon_t = \frac{0.8 - 0.8}{0.8} \times 100\,\% = 0\,\%$$

b) geri farklar

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{0.2}\left(0.12 + \frac{0.08}{2}\right) = 0.8$$

$$\epsilon_t = \frac{0.8 - 0.8}{0.8} \times 100\,\% = 0\,\%$$

Ör $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x + 1$, $x \in [0, 1.2]$, $h = 0.3$

$f'(0.3)$ değerini ileri ve geri farklar ile hesapla.

Gerçek hata yüzdelerini bul.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 4$

$f'(0.3) = 4.8505$ gerçek değer.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	1	1.28343	0.5589	0.8505	0.5832
0.3	2.28343	1.84233	1.4094	1.4337	
0.6	4.12576	3.25173	2.8431		
0.9	7.37749	6.09483			
1.2	13.47232				

ileri farklar

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(0.3) = \frac{1}{0.3}\left(1.84233 - \frac{1.4094}{2} + \frac{1.4337}{3}\right) = 5.3851$$

$$\epsilon_t = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\,\%$$

$$= \frac{4.8505 - 5.3851}{4.8505} \times 100\,\% = -11.02\,\%$$

geri farklar

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(0.3) = \frac{1}{0.3}\left(1.28343\right) = 4.2781$$

$$\epsilon_t = \frac{4.8505 - 4.2781}{4.8505} \times 100\,\% = 11.80\,\%$$

merkezi farklar

$$f'(0.3) = \frac{5.3851 + 4.2781}{2} = 4.8316$$

$$\epsilon_t = \frac{4.8505 - 4.8316}{4.8505} \times 100\% = 0.39\,\%$$

Ör $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $h = \pi/6$

a) $f'(\pi/3)$ ileri farklar
b) $f'(\pi/3)$ geri farklar
c) $f'(\pi/3)$ merkezi farklar

Gerçek değerini kullanarak $\epsilon_t = ?$

Not: Noktadan sonra 3 basamak harici yuvarla.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\pi/3) = \cos(\pi/3) = 0.5$$

x	f(x)						
0	0						
		0.5					
$\pi/6$	0.5		-0.134				
		0.366		-0.098			
$\pi/3$	0.866		-0.232		0.062		
		0.134		-0.036		0.01	
$\pi/2$	1		-0.268		0.072		-0.02
		-0.134		+0.036		-0.01	
$2\pi/3$	0.866		-0.232		0.062		
		-0.366		+0.098			
$5\pi/6$	0.5		-0.134				
		-0.5					
π	0						

a) $$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(\pi/6) = \frac{1}{\pi/6}\left(0.134 + \frac{0.268}{2} + \frac{0.036}{3} - \frac{0.062}{4}\right) = 0.505157789$$

$$\epsilon_t = \frac{0.5 - 0.505157789}{0.5} \times 100\,\% = -1.03\,\%$$

b) $$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(\pi/6) = \frac{1}{\pi/6}\left(0.366 - \frac{0.134}{2}\right) = 0.571047935$$

$$\epsilon_t = \frac{0.5 - 0.571047935}{0.5} \times 100\,\% = -14.21\,\%$$

c) $$f'(\pi/6) = \frac{0.505157789 + 0.571047935}{2} = 0.538102862$$

$$\epsilon_t = \frac{0.5 - 0.538102862}{0.5} \times 100\,\% = 7.62\,\%$$

Ör

x	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36
y	3.602	3.747	3.903	4.072	4.256	4.455	4.693

$f'(1.32) = ?$

a) ileri farklar b) geri farklar c) merkezi farklar

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
1.30	3.602	0.145	0.011	0.002	0	-0.02	0.028
1.31	3.747	0.156	0.013	0.002	-0.002	0.026	
1.32	3.903	0.169	0.015	0	0.024		
1.33	4.072	0.184	0.015	0.024			
1.34	4.256	0.199	0.039				
1.35	4.455	0.238					
1.36	4.693						

$h = 0.01$

a) $$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f - \frac{\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3} - \frac{\Delta^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(1.32) = \frac{1}{0.01}\left(0.169 - \frac{0.015}{2} + \frac{0}{3} - \frac{0.024}{4}\right) = 15.55$$

b) $$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f + \frac{\nabla^2 f}{2} + \frac{\nabla^3 f}{3} + \frac{\nabla^4 f}{4} + \cdots\right)$$

$$f'(1.32) = \frac{1}{0.01}\left(0.156 + \frac{0.011}{2}\right) = 16.15$$

c) $$f'(1.32) = \frac{15.55 + 16.15}{2} = 15.85$$

Diferansiyel Denklem Çözümlerinde Runge-Kutta Bütünleştirme Yöntemi

Birinci Dereceden diferansiyel Denklem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{olsun.}$$

$x \in [x_0, x_n]$ aralığını n parçaya böl. $h = \frac{x_n - x_0}{n}$

$x_k = x_0 + kh \quad , \quad k = 0,1,2,\dots,n \Rightarrow y_k = y(x_k)$

2. mertebeden Runge-Kutta Bütünleştirme yöntemi

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{aligned}\right\} \; y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

3. mertebeden Runge-Kutta Bütünleştirme yöntemi

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{aligned}\right\} \; y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

4. mertebeden Runge-Kutta Bütünleştirme yöntemi

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Ör $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y(0)=3$ 2. mertebeden Runge-Kutta bütünleştirme yöntemiyle $h=0.5$ için $y(2)$ değerini hesapla. $y(2)$'nin gerçek değeri 7 ise $\epsilon_t = ?$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i+h, y_i+hk_1) \end{array}\right\} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1+k_2)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = 2x , \quad x_0=0, \; y_0=3 , \; h=0.5$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(0,3) = 0 \\ k_2 = f(0.5, 3) = 1 \end{array}\right\} y(0.5) = y(0) + \frac{h}{2}(k_1+k_2) = 3.25$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(0.5, 3.25) = 1 \\ k_2 = f(1.0, 3.75) = 2 \end{array}\right\} y(1.0) = y(0.5) + \frac{h}{2}(k_1+k_2) = 4.0$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(1.0, 4.0) = 2 \\ k_2 = f(1.5, 5.0) = 3 \end{array}\right\} y(1.5) = y(1.0) + \frac{h}{2}(k_1+k_2) = 5.25$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = f(1.5, 5.25) = 3 \\ k_2 = f(2, 6.75) = 4 \end{array}\right\} y(2.0) = y(1.5) + \frac{h}{2}(k_1+k_2) = 7$$

$$\epsilon_t = \frac{\text{Gerçek Değer} - \text{Yaklaşık Değer}}{\text{Gerçek Değer}} \times 100\% = \frac{7-7}{7} \times 100\% = 0\%$$

Normal yol

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x\,dx$$

$$y = x^2 + c$$

$y(0)=3$

$$3 = 0^2 + c \Rightarrow c = 3$$

$$y = x^2 + 3$$

$$x=2 \Rightarrow y = 7$$

01 $x^2 y = 4$ fonksiyonunun türevi alınarak

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$, $y(2) = 1$ diferansiyel denklemi elde

ediliyor. $h = 1$ için $y(5)$ değerini 2. mertebeden

Runge-Kutta bütünleştirme yöntemiyle hesaplayınız.

$\epsilon_t = ?$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{aligned}\right\} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$f(x,y) = -2y/x$, $y(2) = 1$, $h = 1$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(2,1) = -1 \\ k_2 &= f(3,0) = 0 \end{aligned}\right\} y(3) = y(2) + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = 1/2$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(3, 1/2) = -1/3 \\ k_2 &= f(4, 1/6) = -1/12 \end{aligned}\right\} y(4) = y(3) + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = 7/24$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(4, 7/24) = -7/48 \\ k_2 &= f(5, 7/48) = -7/120 \end{aligned}\right\} y(5) = y(4) + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{91}{480}$$

$x^2 y = 4 \Rightarrow y = 4/x^2$

$x = 5 \Rightarrow y = 4/25$

$$\epsilon_t = \frac{4/25 - \frac{91}{480}}{4/25} \times 100\,\% = -18.49\,\%$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-2xy}, \quad y(0) = -2, \quad h = 0.5$$

y(1) değerini 3. mertebeden Runge-Kutta bütünleştirme yöntemiyle çöz. $y(1) = -1$ ise $\epsilon_t = ?$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$
$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$f(x,y) = \frac{y^2}{1-2xy}, \quad y(0) = -2, \quad h = 0.5$$

$$k_1 = f(0,-2) = \frac{4}{1-0} = 4$$
$$k_2 = f(0.25,-1) = \frac{1}{1+0.5} = 2/3$$
$$k_3 = f(0.5, -10/3) = \frac{100/9}{1+10/3} = \frac{100}{39}$$

$$y(0.5) = y(0) + \frac{0.5}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -1.230768231$$

$$k_1 = f(0.5, -1.230768231) = 0.678045093$$
$$k_2 = f(0.75, -1.061007958) = 0.434394251$$
$$k_3 = f(1, -1.135897527) = 0.394359417$$

$$y(1) = y(0.5) + \frac{0.5}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) = -0.996520771$$

$$\epsilon_t = \frac{-1-(-0.996520771)}{-1} \times 100\,\% = 0.35\,\%$$

Ör $y\,dy = (1+xy)\,dx$, $y(0) = 1$

4. mertebeden Runge-Kutta Bütünleştirme yöntemi

$h = 0.5$ $\quad f(1) = ?$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{hk_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{hk_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{1+xy}{y}$$

$y(0) = 1 \quad h = 0.5$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(0,1) = 1 \\ k_2 &= f(0.25, 1.25) = 1.05 \\ k_3 &= f(0.25, 1.2625) = 1.042079208 \\ k_4 &= f(0.5, 1.521039604) = 1.157445077 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(0.5) &= y(0) \\ &+ \frac{1}{12}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1.52846658 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(0.5, 1.52846658) = 1.15425032 \\ k_2 &= f(0.75, 1.817029539) = 1.300348786 \\ k_3 &= f(0.75, 1.853554155) = 1.289504064 \\ k_4 &= f(1, 2.17321899) = 1.460146809 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(1) &= y(0.5) \\ &+ \frac{1}{12}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 2.177975536 \end{aligned}$$

Ör: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{1+x}$, $y(0)=1$

3. mertebeden Runge-Kutta bütünleştirme yöntemiyle

$h=0.5$ için $y(1)=?$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i+\tfrac{h}{2}, y_i+\tfrac{hk_1}{2}\right) \\ k_3 &= f(x_i+h,\ y_i-hk_1+2hk_2) \end{aligned}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1+4k_2+k_3)$$

$f(x,y) = \frac{2x-y}{1+x}$, $h=0.5$, $y(0)=1$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(0,1) = -1 \\ k_2 &= f(0.25, 0.75) = -0.2 \\ k_3 &= f(0.5, 1.3) = -0.2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(0.5) &= y(0) + \frac{1}{12}(k_1+4k_2+k_3) \\ &= 1 + \frac{1}{12}(-2) = 1 - \frac{1}{6} = 5/6 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(0.5, 5/6) = 1/9 \\ k_2 &= f\left(0.75, \tfrac{31}{36}\right) = \frac{23}{63} \\ k_3 &= f(1, 8/7) = \frac{3}{7} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y(1) &= y(0.5) + \frac{1}{12}(k_1+4k_2+k_3) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{9} + \frac{4\times 23}{63} + \frac{3}{7}\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{2}{12} = 1 \end{aligned}$$