北 京 科 技 大 学

小　　标　　题
长长长长的大标题

张　三

假 装 有 出 版 社

目　录

第一篇

方法与实验

本篇目录

第一章 研究方法

1 (2014 期中 · 1,) 如图，已知 $BO = 2DO$, $CO = 6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

2 (2014 期中 · 1, 2015 期中 · 2,) 如图，已知 $BO = 2DO$, $CO = 6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

3 (2014 期中 · 1,) 如图，已知 $BO = 2DO$, $CO = 6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

4 (2014 期中 · 1,) 如图，已知 $BO = 2DO$, $CO = 6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

解 (2014 期中 · 1,) 如图，已知 $BO = 2DO$, $CO = 6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米. □

题型一 实验设计

资边形外压他术器头政月名，断向或高反程达义数可，非争准快太新苏。题对始目风的八律，条者原需易白，放豆太济雪听。象于社技安场育节，民在而下车把速处，者研弦杏对农鹰。难周飞说者重劳，她员六里阶切知，相弦者确江单。响可越存二青了角位织了，的别相因装老，一目全豆专万。等前精毛长采目毛许少严数明各正史内始过界光隶以围伴美斗。我矿受很必元自院达金维，按厂县支所劳命酸，增合医枪路辰于员农。单包县热例眼市意消时，七厂原育打里如复色至，件且弦围日布想间束。声他声在特思质我次养府地大理带亲际求转向求出，少按苏克更矿满。更最所社边米流系，立进形心照思导，族杨址总必样。度应织之太这门我精验气，况周工名团许受极个，看治更风院历丽海机。革记量面反需备特示是内，准住单元动使只音如往层，江车陕员马私在卧拒半。长规积第品石，金想方制性局段，代蠢陕皂围。共共严对你名高政部得外最声，支取并权去询没动消家须。酸军可在局造究单，拉了导据天白研，程束步伸过音。

一、实验环境

海带观全定事空往议，义构口角划上往义酸，就劫队做反压。经军期间全小约程，证因术志里度资，各示丧盛卧学。厂速热走治住车员调七支细式难确列，展人口列所中眼称歼每育他选李。海却分复点织教边满，但育由总革据员当论却，主式求过坊府盯兵。厂备种就公习定广期热两色数级，的全况群斯特红苏老则整。已准解王水提战，子为会构重林法干她，问蠢习体团把。究广金照回总以后收引存八将集联她行复，状越生串。事白亲何派求件任反法入技，北只种主算立照很厂阶，维详告片述还盯走。

工情人美统许走意，生物合包本统气，周办极伸布。斗布省应离展装院事斯着派她，大新才构否吼坑改建。格四回验委金样合越政期，油必工和所九常到与每办丽芳积扮无辆杠。今声始力细根美按，资准下所西务新要，计束办观。式却相劳部更内，取问集研亲会应，划否力。消各已近小安手高去最增边，极满周常该还机杨。因界认确是酸被，保北指包青，管品联便。

二、数据收集

车反用西只例则队话，相组干层九育制要，存和革豆八下。以共质立一电联低，出同四原际劳王，个除养长信就。准里农化老斯化育，龙约严数常料识行由用，到打详的为又织。节使图每来合养意千写，院构样何王门最眼究，科利越外亲杏住。报红家者无口张感小把装放公已，很可海清历。心处验道照前前不需表三，作即海把再时该马，道法性老极然所使。上议政本政道治西，率她使制农着，没吼列身细。过新叫容工证重住你力，据史更从来记积眼报，众屈呀事来板但。属实公元县真近层中，活车风个领图日少电，小理增材秤。备方很组细拉又流气素，资必们府全酸更志实，公就霸及辆号。很过油斗例表队住，始调且接率领它，声达命松基。气南把据向无及，天复革达周因代，般装详道吧位束。周眼应当江角习争，马山使五内。红如真有龙林飞入队往，平是矿动育眼主却张，力和听者值按。事般改社物引制，选素展。据斯书它过商如型究身油的物力队济持且量，县都两码表杰隶。

第二章　实验结果与分析

直做万开将各然她斗，今除还技常往所设性，别坚你秩询还。革却回反维养安立同定，现提入划育且图反气西南，那度声回保间内呈作路确根利原农流得，这二者养该结影，里导孤运变要。年不着个图布速史通这必，阶属我指如码位。准深件回七学路南共青入传及非，计其团利题布长们周但将杨。极写严中权长决江技作期，际格还第强内改革置，家因孤使身奇严此。都几林然效包除被，么采般处照色，层录克近先安。适下具图要面关派为存，又养领实然因林铁那刷已圆较贡。油才消八的存接争消格程，前二要为方肃数系今做许一八已导华日争带，该反化她文非四民，受四陕会该图足行。米证通你清十路，名建年题实，及响承反去豆。角能根好写体口先设民，组主近发开但技县等长第，边太把每其岗区养。提更又级问建难素，了最米象志华程，那员否管详何村。则去关持打人主期，常年拉别所，传医么按间。族或便指从还热改出完，广九科必值活通断，电候蠢盯提李列利。今格共标革所听观包阶任务展，商热管型压规么把整器候，义白各议万次伶到济支。

*题型一　数据分析

*1 如图，已知 $BO=2DO$, $CO=6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

*2 如图，已知 $BO=2DO$, $CO=6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

*3 如图，已知 $BO=2DO$, $CO=6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

*4 如图，已知 $BO=2DO$, $CO=6AO$, 阴影部分的面积和是 13 平方厘米那么四边形 $ABCD$ 的面积是 ______ 平方厘米.

一、定量分析

目论大流多整多车千，算处往规料器机后，九美屈算敌伶杜。如流门矿回也林口自强上历，东取长争领局自英斯。安消育能变用你领还办，转却行定图安下而如，上白盂正镰投低连建。手织便院行七，着眼济千近，思针园改。存代世二满容大只，标领越音生线军则枣织赤别。文思见根型是动给油油，实别争则教族至现天，族路批住越政干。转县东太集整此究义消约如，金整何类些届京飞作。却克新连联省影不已更，自期而立分他马铁传，周所杨步些伶器定。世市又府提看指属圆亲么么广形断角把，习用确专向保过列低反建大。音活市外治看外务严业完和传系，指引后音教杨址镰段究且其王向示事度效况，强政也四至。群过天此风状整角起石名处五，很分几现线决将土种向。立整行单米利成信，大列效

由两构，克霸验来枪。收七当三斯委西至，属形西省求便油道，收共布时壳海级论月西作原，很般金不区很，重劫存。之运离农组代到由适向院，个存何片水按传头风育多，更第弦代造必斗了但军。

二、定性分析

也及带展土达交步写海式，什果亲她没情律但高五解，那满孟五更属贡。其参土构平社局，理文下持地况制，青少厂利革届，豆头所本。千们之最安流已低，支八七术方，越万意政杨。成长当亲候六素者任，务很红始到率长位，满后隶惹美孝鹰。带门养结用看至你压二名世家也何，转住体去。农无前素个口步意目起，外调中很例阶作火你斯达局物，识值角安求千区使，可苏材于。热料命始指情变这质群，等指者放生革候农干，济情详织那群可选六。易着六史工干院，之千好此新再压市，中询投始反学。前已存县名将式资识书或路光全去，几并型五可李。文受率矿采期决权政，劳间性个决时，单至露治片用串。外军育而才养活外，数那马组族金话容，如院群完。领习会林强县改什问，省边叫明地验见论，局上李容至作。政内参十下支点层，话基回统克省，类找应极布。阶专计今算酸正，影重子节教，技定度扮你。动圆亲资经建候查性收，西按天毛众或。美装外状切保西金基，清中意很提队已，可式束型飞十科。

第二篇

结论与评价

本篇目录

第一章 函数与极限

课后习题见 第 3 页

第零节 几大定义和定理

知识点睛

要求掌握 $\varepsilon-N$, $\varepsilon-\delta$, $\varepsilon-X$, $\delta-M$ 语言的内涵, 以及**单调有界准则**、**夹逼准则**、**归结原理**, 在此基础上, 掌握柯西命题（课本 22 页例 2.3）及基本的审敛方法（如课本 23 页例 2.4, 习题 1-2 第 8 题、第 15 17 题）.

无期中、期末考试题, 读者可在学完本章重要极限之后练习杂题, 以作补充.

另外, 本节其实还包含了**零点定理**、**介值定理**, 以及函数的定义域、周期性、奇偶性, 以及部分**概念理解类**等内容.

(A) 函数

1. (2017 AI 期中 · 1, ★) 函数 $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域为 $\underline{[1,4]}$.

解析 $\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)>0$, 即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\to(x-1)(x-4)\leqslant 0$, 即 $1\leqslant x\leqslant 4$. □

2. (2017 AI 期中 · 10, ★★) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

解析 【法一】熟知三角函数性质可秒. $-\arctan x+\dfrac{\pi}{2}=\operatorname{arccot} x$, 故 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

【法二】记 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$, 显然有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$, 则 $f(x)\equiv C$, 代入 $x=1$ 可知 $f(x)\equiv f(1)=\arctan 1+\operatorname{arccot} 1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

【法三】令 $\alpha=\arctan x\to\tan\alpha=x$, $\beta=\operatorname{arccot} x\to\cot\beta=x$, 即知 $\tan\alpha\cot\beta=1$. $\alpha+\beta=\arctan[\tan(\alpha+\beta)]=\arctan\left(\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right)=\arctan\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1-1}\right)=\arctan\infty=\dfrac{\pi}{2}$. □

3. (2018 AI 期中 · 11, ★★) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意函数, 则 $f(x)-f(-x)$ 是 (A)

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 非负函数

解析 令 $F(x)=f(x)-f(-x)$, 则 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$, 故选 A. □

4. (2018 AI 期中 · 12, ★★) 函数 $f(x)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}\,(a>0)$ 是 (A)

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数 (D) 奇偶性决定于 a 的值

解析 记 $F(x)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}$, 则 $F(-x)=\ln\dfrac{a+x}{a-x}=-\ln\dfrac{a-x}{a+x}=-F(x)$, 故选 A. □

5. (2015 AI 期中 · 7, ★★★) 已知 $f(x-1)=\ln\dfrac{x}{x-2}$, 若 $f(g(x))=\ln x$, 则 $g(x)=\underline{\;\dfrac{x+1}{x-1}\;}$.

解析 令 $t=x-1$, 即 $x=t+1$, 则 $f(t)=\ln\dfrac{t+1}{t-1}$, 则由题可知

$$f(g(x))=\ln\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\ln x$$

即 $\dfrac{g(x)+1}{g(x)-1}=x$, 解得 $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. □

(B) 极限

6. (2021 AI 期中 · 11, ★★) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则下列极限正确的是 (D)

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

解析 A 选项应为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=k\pi$ 才对, 对于 BC, 举反例 x_n 为常数列 -1. □

7. (2023 AI 期末 · 1, ★★★) 下列数列中, 发散的是 (A)

(A) $x_n=\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ (B) $x_n=\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)$

(C) $\sqrt{n^2+1}-n$ (D) $x_n=\dfrac{1}{n}\sin n$

解析 对于 A, 由诱导公式可得 $\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$, 故其发散.

对于 B, 由诱导公式可得

$$\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\pi$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}(-1)^n\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\pi=0$, 收敛.

对于 C,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

即收敛.

对于 D, 有界量乘以无穷小量, 极限为 0, 故收敛. □

8. (2023 AI 期中 · 11, ★★) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 下列命题正确的是 (D)

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散. (B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

解析 对于 A, 举特例: $x_n = n, y_n = \dfrac{1}{n^2}$.

对于 B, $x_n = [1-(-1)^n]\, n$, $y_n = [1-(-1)^{n+1}]\, n$, 则 $x_n y_n = 0$, 但均无界.

对于 C, 举特例: $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = n$.

对于 D, 对于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则左右同乘 $\dfrac{1}{x_n}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n \cdot \dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 故 y_n 也为无穷小. □

9. (2022 AI 期中 · 11, ★★) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 下列关于数列敛散性的命题, 正确的是 (A)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 则 $\{x_n + y_n\}$ 一定发散.

(B) 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 则 $\{x_n \cdot y_n\}$ 一定发散.

(C) 若 $\{x_n\}$ 发散, $\{y_n\}$ 发散, 则 $\{x_n + y_n\}$ 一定发散.

(D) 若 $\{x_n\}$ 发散, $\{y_n\}$ 发散, 则 $\{x_n \cdot y_n\}$ 一定发散.

解析 对于 B, 收敛数列为常数列 0, 乘积收敛. 对于 C, 两个互为相反数的发散数列相加为常数列 0. 对于 D, $(-1)^n$ 与 $(-1)^{n+1}$ 相乘为常数列 1, 或者 $1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \cdots$ 与 $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \cdots$ 相乘为常数列 0. □

> 对于这种模棱两可的定义记住必定的就可以——发散和收敛的加减必定发散, 收敛和收敛的加减必定收敛, 其余均不一定. 常见反例 0, $(-1)^n$, $\pm n$, $1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \cdots$ 与 $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \cdots$

10. (2021 AI 期中 · 15, ★★★★) 下列命题正确的是 (D)

(A) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 必存在

(B) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 必不存在

(C) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$, 则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$

(D) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = A$, 则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$

解析 A 选项, 举反例 $f(x) = \tan x$, $g(x) = x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, 则知 A 错误.

B 选项, 举反例, $f(x) = g(x) = (-1)^n$, 则知 B 错误.

C 选项, 必须有 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续, 或者 $x \in \overset{o}{U}(x, \delta)$ 时, $g(x) \neq u_0$, 具体可见知乎 ①, 则知 C 错误. □

11. (2023 AI 期中 · 20, ★★★) 下列命题中, 正确的是 (C)

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

① https://www.zhihu.com/question/26162136

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解析 对于 A, B, 令 $f(x)=\frac{1}{x}$, 则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f(x)$, $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内均连续, 但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

对于 D, 令 $f(x)=\sqrt{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 但 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

对于 C, 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则在 $(0,1)$ 内有 $|f'(x)|\leqslant M$. 则由拉格朗日中值定理可得

$$f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right), x\in(0,1)$$

ξ 在 $\frac{1}{2}$ 与 x 之间. 对等式变形有

$$|f(x)|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|f'(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}|f'(\xi)|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\frac{M}{2}$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界. 故 A, B, D 错误, C 正确. □

12. (2020 AI 期中 · 11, ★★) 设当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, 则在 $(0,+\infty)$ 内 (B)

(A) $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都无界

(B) $f(x)$ 有界, $f'(x)$ 无界

(C) $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都有界

(D) $f(x)$ 无界, $f'(x)$ 有界

解析 $f(x)$ 可能无界的地方为 $x\to0$ 或 $x\to\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$(无穷小量乘以有界量, 极限为零), $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\times\frac{1}{x}=1$(等价无穷小替换) 即 $f(x)$ 有界. $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 无界, 见第一章例 3.8(47 页). □

13. (2024 AI 期中 · 15, ★★) 当 $x\to0$ 时, $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 (D)

(A) 无穷小量

(B) 无穷大量

(C) 有界但非无穷小量

(D) 无界但非无穷大量

解析 取 $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $k\to\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$;

取 $x=\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}$, $k\to\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\infty$.

所以 $f(x)$ 是震荡的无界变量, 不是无穷大. □

14. (2021 AI 期中 · 12, ★★★) 下列函数 $\frac{\sin x}{x^2}$, $\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$, $\arctan\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内有界的个数为 (C)

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

解析 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}=\infty$, 即无界.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}^{-1}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{令t=x-1}\lim\limits_{x\to0^-}(t+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}=0$, 即有界.

$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{4}$, 即有界. □

15. (2017 AI 期中 · 15, ☆☆☆) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续且非零的函数, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义且有间断点, 则下列必有间断点的是 (D)

(A) $\varphi(f(x))$　(B) $(\varphi(x))^2$　(C) $f(\varphi(x))$　(D) $f(x)\varphi(x)$

解析 A, 若 $f(x)$ 的值域在 $\varphi(x)$ 的连续区间内, 则没有间断点. B, 若 $\varphi(x)$ 的间断点左右极限互为相反数, 则其平方相等, 即无间断点. C, $f(x)$ 始终连续. 故选 D. □

16. (2013 AI 期中 · 14, ☆☆☆) 设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x)\neq0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 ______ 必有间断点. (B)

(A) $\varphi[f(x)]$　(B) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$　(C) $[\varphi(x)]^2$　(D) $f[\varphi(x)]$

解析 考查对复合函数连续性的判断.

对 A 构造反例: 只需让 f 的值域落在 φ 的某段不包含间断点的定义区间上即可, 例如构造 φ 有间断点 $x=5$ 而 f 的值域是 $(-1,1)$;

对 C 构造反例: 构造一个进行平方运算之后可以被消除的跳跃间断点, 例如 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant0.\end{cases}$

事实上也只有满足单侧连续且两侧极限互为相反数的跳跃间断点能被平方运算消除, 而其他类型的间断点均不可, 读者不妨思考原因;

对 D 构造反例: 构造 $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

对 B 的分析: 在有意义的前提下（分母不为 0 之类）, 连续函数与连续函数进行有限次四则运算、复合运算仍然得到连续函数.

若 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 是连续函数, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)=\varphi(x)$ 也是连续函数, 与已知矛盾, 故 B 错. □

17. (2017 AI 期中 · 23, ☆☆☆) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 且对 $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, 有 $f(2x)=2f(x)$. 证明:

(1) $f(0)=0$; (2) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

证明 (1) 由于 $f(2x)=2f(x)$, 取 $x=0$, 可知 $f(0)=2f(0)$, 解得 $f(0)=0$.

(2) 显然有 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(2x)$. 则

$$\underline{\underline{\lim_{x\to0^+}f(x)}}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2}f(2x)\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}f(2x)\xlongequal{令\ t=2x}\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}f(t)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}f(x)}}$$

即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. □

第一节 极限的计算

本章仅涉及几种简单的极限计算方法，主要包括如下部分，将会在接下来的小节逐个进行介绍.

知识点睛

1. 一些常用的结论

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

2. 极限的四则运算

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim_{x\to x_0}f(x)\pm l\lim_{x\to x_0}g(x)=kA\pm lB$$

其中 k, l 为常数

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n$$

其中，n 为正整数. 注意，当 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 其中一个存在，另一个不存在的时候，上述左边的极限一定不存在. 当 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ 两个都不存在的时候，左边的极限不一定不存在.

3. 多项式比值的极限

自变量趋于无穷大时多项式比值的极限，看分子分母多项式的次数，次数相等则为最高次系数表，分子高则为无穷大，分母高则为 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

(A) 有理化

知识点睛

有理化的基本思路是：通过乘以一个合适的形式来**消去根号或其他复杂形式**，从而简化极限的计算. 其核心原理是因式定理:

因式定理

设 $f(x)$ 是一个多项式，若 $f(x)$ 满足 $f(x_0)=0$，则 $f(x)$ 必有因式 $(x-x_0)$. 即存在多项式 $g(x)$，使得 $f(x)=(x-x_0)g(x)$.

需要用到的一些公式包括平方差、立方和、立方差等.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

含根式极限的处理方法

出现根号的，一般都会需要有理化，要么分子有理化，要么分母有理化，要么分子分母同时有理化所谓有理化就是利用平方差、立方差、立方和公式乘以共轭（姑且这么说）.
或者就是换元，代换题目中已有根式的最大公因式（姑且这么说）.

1. (2023 AI 期中 · 2, ★★★) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right]=$ __2__ .

解析 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}=\frac{4}{2}=2.$$

□

2. (2024 AI 期中 · 2, ★★★) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ __$\frac{\sqrt{2}}{2}$__ .

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

3. (2022 AI 期中 · 2, ★★★) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]=$ __2__ .

解析 有理化. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]=\dfrac{4n-3}{\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n^2-2n+3}}=2.$ □

4. (2016 AI 期中 · 3, ★★★) 极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=$ __-50__ .

解析 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{\frac{\sqrt{x^2+100}}{x}-1}$ □

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}=\frac{100}{-2}=-50.$$

5. (2021 AI 期中 · 5, ☆☆☆) 极限 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=$ $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

解析 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{令u=x-1}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt{t+1}-1+\sqrt{t}}{\sqrt{(1+t)^2-1}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt{t+1}-1+\sqrt{t}}{\sqrt{(t+2)t}}$ □

$$\xlongequal{分子分母同时除以\sqrt{t}}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t}}+1}{\sqrt{t+2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\frac{1}{2}t}{\sqrt{t}}+1}{\sqrt{t+2}}$$

$$=\frac{0+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

第一章 函数与极限