IF.05.22 — Theoretical Informatics — Proof Exercises

1. **Proof by Contradiction** Let $a, b \in \mathbb{Z}$. Proof the following proposition:

$$a + b \geq 19 \Rightarrow a \geq 10 \vee b \geq 10.$$

Take care to show every step of the proof carefully. How does such a proof look like, what do you assume, what do you have to show, where is the contradiction?

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$a + b \geq 19 \Rightarrow a \geq 10 \vee b \geq 10.$$

Beachten Sie, dass Sie jeden Beweisschritt sorgfältig protokollieren. Wie sieht so ein Beweis aus, was nehmen Sie an, was zeigen Sie, wo ist der Widerspruch?

2. **Indirect Proof** Let $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Proof the following proposition via an indirect proof:

$$a \cdot b = c \Rightarrow a \leq \sqrt{c} \vee b \leq \sqrt{c}.$$

Take care to show every step of the proof carefully. In particular accomplish the following tasks:

(a) Write down the general scheme of an indirect proof.
(b) Write down the starting point to proof the above proposition indirectly.
(c) Transform the starting point of your proof such that it becomes obvious in which range the required values for a and b are to be found.
(d) Give values of a and b to be able to finalize the proof.
(e) Finalize the proof.
(f) Take care of a clear and mathematically oriented structure of your proof.

Hint: If you need to express a real number $x > a$ you may assume an infinitely small number $\varepsilon > 0$ to construct it.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Beweisen Sie folgende Aussage mit Hilfe eines indirekten Beweises:

$$a \cdot b = c \Rightarrow a \leq \sqrt{c} \vee b \leq \sqrt{c}.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form eines indirekten Beweises an.
(b) Geben Sie den Ansatz für einen indirekten Beweis der obigen Behauptung.
(c) Formen Sie den Ansatz so um, dass offensichtlich wird, in welchem Bereich Werte für a und b gesucht sind.
(d) Bestimmen Sie Werte für a and b, mit denen Sie den Beweis fertigstellen können.
(e) Stellen Sie den Beweis fertig.
(f) Achten Sie auf eine klare, mathematikorientierte Struktur Ihres Beweises.

Hint: Falls Sie eine reelle Zahl $x > a$ für Ihren Beweis brauchen, dürfen Sie annehmen, dass es eine unendlich kleine Zahl $\varepsilon > 0$ mit der Sie x dann konstruieren können.

Solution:

(a) $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

(b) $\neg(a \leq \sqrt{c} \vee b \leq \sqrt{c}) \Rightarrow a \cdot b \neq c$

(c) Using DeMorgan we can rewrite the above formula to $(a > \sqrt{c} \wedge b > \sqrt{c}) \Rightarrow a \cdot b \neq c$

(d) We are looking for the smallest number a and b both $> \sqrt{c}$. So we assume a number $\varepsilon > 0$ and let $a, b = \sqrt{c + \varepsilon}$.

(e) In order to proof that $a \cdot b \neq c$ under the above condition it is sufficient to show that $\sqrt{c+\varepsilon} \cdot \sqrt{c+\varepsilon} \neq c$.
$\sqrt{c+\varepsilon} \cdot \sqrt{c+\varepsilon} = (\sqrt{c+\varepsilon})^2 = c + \varepsilon$ which is obviously unequal to c.