Zufall und Wahrscheinlichkeit

WS 2023-24

DI Emil Marinov

Übersicht

SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Grundlegende Definitionen

Grundlegende Definitionen

- **Zufallsexperiment**:
  Vorgang mit nicht vorhersehbaren Ausgang
- **Ereignisraum** Ω :
  Menge der möglichen Ausgänge
- **Ereignisse**:
  Teilmengen von Ω

Beispiel:
Marketingumfrage bei 1000 Konsumenten

Zufallsexperiment:
Kauf eines neuen Fernsehers im nächsten Jahr

Ereignisraum:
Ω = { ja, nein}

Ereignisse:
A = { ja } (Konsument kauft Fernseher)
A‘ = { nein } (Konsument kauft keinen Fernseher)

Grundlegende Definitionen

Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis A wird ein reelle Zahl P(A) zwischen 0 und 1 zugeordnet, die ausdrücken soll, wie wahrscheinlich es ist, dass der tatsächliche Ausgang des Zufallsexperiments ein Element des Ereignisses ist.

Beispiel:
Marketingumfrage bei 1000 Konsumenten

$p(A) = 0{,}3$

Konsument kauft mit 30%-iger Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahr einen Fernseher

Grundlegende Definitionen

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- unmögliches Ereignis: $P(A) = 0$
- sicheres Ereignis: $P(A) = 1$

Laplace-Experiment

- nur endlich viele mögliche Ausgänge
- jeder Ausgang ist gleich wahrscheinlich

$$\boxed{P(A) = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ der\ möglichen\ Fälle}}$$

Beispiele:

Laplace-Experiment

- Würfeln mit einem Würfel

$$p(6) = \frac{1}{6}$$

$$p(gerade\ Zahl) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Werfen einer Münze

$$p(Kopf) = \frac{1}{2}$$

Kontrollfragen

Thema	*Wahrscheinlichkeit – Grundlegende Definitionen*
Fragen	Für jede Wahrscheinlichkeit p gilt: □ $0 \leq p \leq 1$ □ $0 \leq 1 - p \leq 1$ □ $p > 1 - p$ □ $1 - p > p$ Welche Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente? □ Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen □ Ziehen von Kugeln aus einer Urne ohne Zurücklegen □ Wahl eines Studierenden zum Studentenvertreter

SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

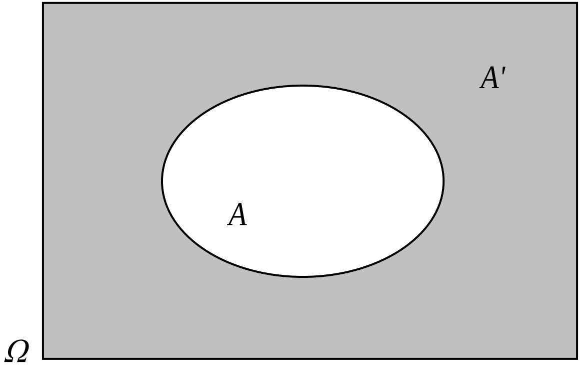
Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Komplementäres Ereignis

komplementäres Ereignis: A‘ = Ω \ A

Wahrscheinlichkeit für A‘ : $\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$



Beispiel:

Lieferant A hat eine Liefertreue von 95%.

Ereignis A …. Lieferung von Lieferant A kommt pünktlich $p(A) = 0.95$

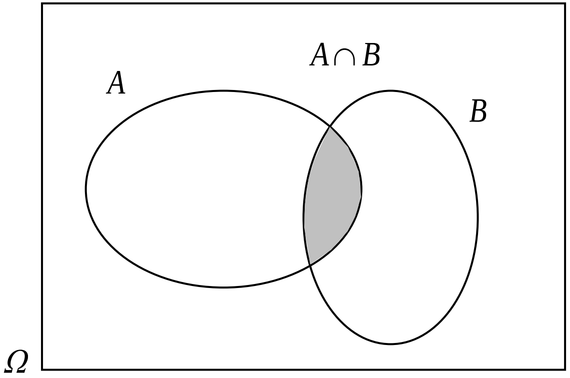
Ereignis A‘ … Lieferung von Lieferant A kommt nicht pünktlich $p(A') = 1 - 0.95 = 0.05$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Multiplikationssatz – unabhängige Ereignisse

A und B unabhängig: Ausgang von A hat keinen Einfluss auf den Ausgang von B und umgekehrt

$$\boxed{P(A\ und\ B) = P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$



Beispiel:

Lieferant A hat eine Liefertreue von 95%, Lieferant B hat eine Liefertreue von 97%.

Ereignis A …. Lieferung von Lieferant A kommt pünktlich

Ereignis B … Lieferung von Lieferant B kommt pünktlich

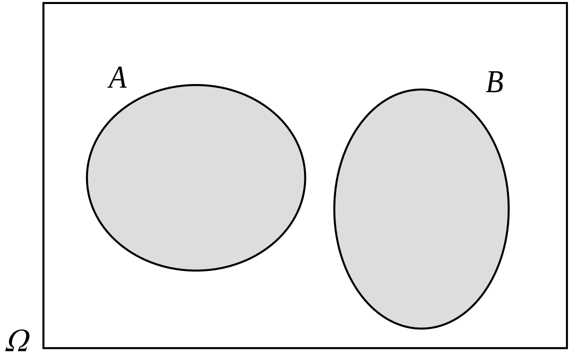
$$p(A\ und\ B) = 0.95 \cdot 0.97 = 0.92$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Additionssatz – einander ausschließende Ereignisse

einander ausschließende Ereignisse: $A \cap B = \{\}$

$$\boxed{P(A\ oder\ B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$



Beispiel:
Lieferant A (Liefertreue 95%) und Lieferant B (Liefertreue 97%) liefern jeweils eine Lieferung.

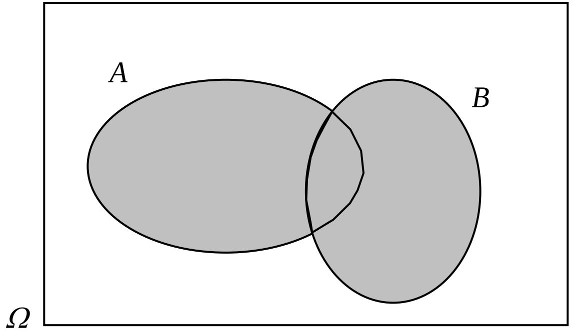
$$p(genau\ eine\ Lieferung\ pünktlich) = 0.95 \cdot 0.03 + 0.05 \cdot 0.97 = 0.077$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Additionssatz – nicht ausschließende Ereignisse

nicht ausschließende Ereignisse: $A \cap B \neq \{\}$

$$\boxed{P(A\ oder\ B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



Beispiel:

Lieferant A hat eine Liefertreue von 95%, Lieferant B hat eine Liefertreue von 97%.

Ereignis A …. Lieferung von Lieferant A kommt pünktlich

Ereignis B … Lieferung von Lieferant B kommt pünktlich

$$p(A\ oder\ B) = 0.95 + 0.97 - 0.95 \cdot 0.97 = 0.9985$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- P(A|B) … Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn man weiß, dass B bereits eingetreten ist (B: Bedingung, Annahme)

- Es gilt:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ falls\ P(B) > 0}$$

- Unabhängigkeit von A und B, wenn $P(A|B) = P(A)$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Multiplikationssatz allgemein

Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt

$$\boxed{P(A \text{ und } B) = P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)}$$

Daraus folgt für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

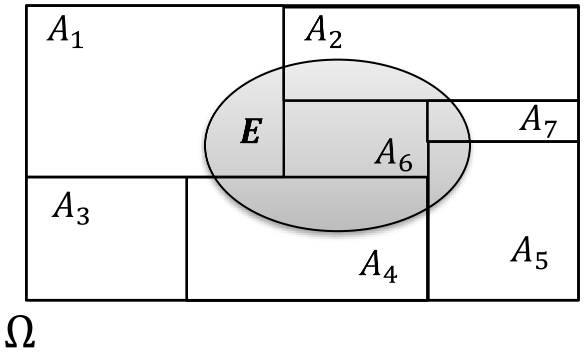
$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}}$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_k$

decken den gesamten Ereignisraum ab: $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$



Dann gilt:

$$\boxed{P(E) = \sum_{i=1}^{k} P(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(E|A_i)P(A_i)}$$

SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Beispiel:
Von einem medizinischen Test zur Diagnose einer Krankheit weiß man, dass dieser Test in 95% der untersuchten Fälle negativ ausfällt, falls diese Testperson nicht krank ist und in 98% der Fälle positiv ausfällt, falls die Testperson erkrankt ist.

Aus Erfahrung weiß man, dass 0.5% der Bevölkerung an dieser Krankheit leidet.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn bei ihr dieser Test positiv ausgefallen ist?

K … Testperson ist krank

G … Testperson ist gesund

P … Test ist positiv

N … Test ist negativ

$$p(K) = 0.005$$
$$p(G) = 1 - 0.005 = 0.995$$
$$p(P|K) = 0.98 \Rightarrow p(N|K) = 0.02$$
$$p(N|G) = 0.95 \Rightarrow p(P|G) = 0.05$$

$$p(K|P) = \frac{p(P|K) \cdot p(K)}{p(P)} = \frac{p(P|K) \cdot p(K)}{p(P|K) \cdot p(K) + p(P|G) \cdot p(G)} = \frac{0.0049}{0.0049 + 0.04975} = 0.09 = 9\%$$

Kontrollfragen

Thema	*Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten*
Beispiel 1	Auf zwei verschiedenen Bändern B1 und B2 wird der gleiche Chip gefertigt. B1 liefert 20% und B2 80% der Produktion. Bei B1 beträgt der Ausschussanteil 10%, bei B2 5%. aus der Gesamtproduktion wird ein Chip zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er auf B1 bzw. B2 gefertigt worden ist, wenn vorher festgestellt worden ist, dass er a) von einwandfreier Qualität ist, b) dass er defekt ist.

Kontrollfragen

Thema	*Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten*
Beispiel 2	Ein Unternehmen führt auf dem Markt die drei Produkte A, B und C ein. Die drei Produkte sind voneinander unabhängig, d.h. sie konkurrieren nicht miteinander und ergänzen sich nicht. Die Marketingabteilung schätzt die Wahrscheinlichkeiten für eine erfolgreiche Einführung auf 0,9, 0,8 bzw. 0,95. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für • einen totalen Misserfolg • einen totalen Erfolg • mindestens einen Misserfolg • mindestens einen Erfolg • genau zwei Erfolge