Induktive Statistik

WS 2023-24

DI Emil Marinov

SPENGERGASSE

ausbildung mit zukunft

Übersicht

Induktive Statistik

Induktive Statistik (schließende Statistik)

- **Schätzen**: Eigenschaften der Grundgesamtheit werden geschätzt, Gültigkeit von Ergebnissen einer Stichprobe für die Grundgesamtheit werden überprüft.

- **Testen**: Hypothesen über Eigenschaften der Grundgesamtheit werden aufgestellt und getestet, ob sie angenommen oder abgelehnt werden sollen.

Beispiele:

- Befragung einer repräsentativen Stichprobe über die Markenbekanntheit
- Erhebung der durchschnittlichen Umsätze in bestimmten Einkaufslagen
- Haben Test- und Vergleichsgruppe dieselben Umsätze?
- Ändert sich das Einkaufsverhalten im Laufe der Zeit?

Stichproben

- **Vollerhebung:** zeitintensiv, kostenintensiv, oft undurchführbar
- **Teilerhebung**: bewusste Auswahl oder Zufallsauswahl

- Bei einer Zufallsauswahl kann man Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit ziehen (→ repräsentative Stichprobe)
- Jeder Objekt hat die selbe Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe zu sein.

Beispiele:

- Auswahl an Endprodukten für eine Qualitätskontrolle
- Auswahl von Teilen einer Lieferung für die Qualitätskontrolle
- Auswahl von Artikeln eines Sortiments für die Inventur
- Zufriedenheitsmessungen von Kunden

Schätzen

Grundprinzip Schätzen

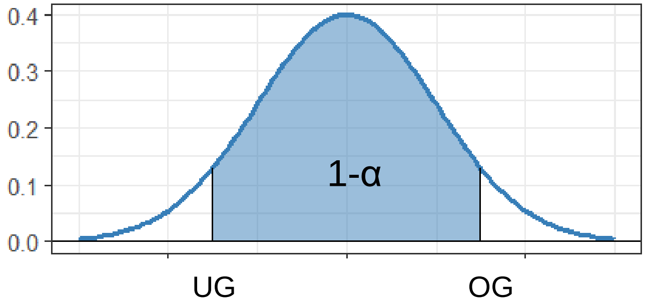
Punktschätzung

unbekannter Parameter (relative Häufigkeit, Mittelwert, Varianz) wird durch einen Wert geschätzt, keine Berücksichtigung der Streuung des Schätzers

Intervallschätzung

Angabe eines Konfidenzintervalls I = [UG, OG], das den unbekannten Parameter T mit einer vorgegebenen Sicherheit (1 - α) überdeckt:

$$P(UG \leq T \leq OG) = 1 - \alpha$$



- Vertrauenswahrscheinlichkeit: 1 – α
- Irrtumswahrscheinlichkeit: α

SPENGERGASSE ausbildung mit zukunft

Grundprinzip Schätzen

Bedeutung von Konfidenzintervallen

- wird aus der Stichprobe konstruiert und ist daher zufällig
- keine Aussage möglich, ob ein konkretes Konfidenzintervall den Parameter tatsächlich enthält
- aber: Wahrscheinlichkeit ein Intervall zu erhalten, das den Parameter nicht enthält ist mit α beschränkt.
- übliche Werte für α: 5%, 1%

Grundprinzip Schätzen

Gütekriterien für Schätzer

- **Erwartungstreue**: Der Schätzer soll im Mittel den wahren Wert des Parameters liefern
- **Effizienz**: Die Streuung des Schätzers soll so gering wie möglich sein.
- **Konsistenz**: Die Schätzung soll mit steigendem Stichprobenumfang genauer werden.

Beispiele:

- Schätzung des Parameters p der Binomialverteilung durch den Stichprobenanteil
- Schätzung von Parameter μ der Normalverteilung durch das Stichprobenmittel
- Schätzung von Parameter σ^2 der Normalverteilung durch die empirische Stichprobenvarianz:

Bezeichnungen

Eigenschaft	Punktschätzer Stichprobe	Parameter Grundgesamtheit
Relative Häufigkeit	p	π
Mittelwert	$\overline{X}$	μ
Varianz	s^2	σ^2
Differenz zweier relativer Häufigkeiten/Mittelwerte	d	δ
Größe	n	N

Schätzen einer relativen Häufigkeit

Konfidenzintervall einer relativen Häufigkeit

$$\pi_u = p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}} = p - \varepsilon$$

$$\pi_o = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, u_{1-\frac{\alpha}{2}} = p + \varepsilon$$

p	…	Punktschätzung rel. Häufigkeit
α	…	Irrtumswahrscheinlichkeit
n	…	Stichprobenumfang
$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$	…	Quantil der Standardnormalverteilung

Beispiel: Kundenzufriedenheit

Stichprobe n = 1000, 700 zufrieden

Punktschätzung: $p = 70\%$

Intervallschätzung:

$\alpha = 0.05 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\pi_u = 0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{1000}} = 67.16\%$$

$$\pi_o = 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{1000}} = 72.84\%$$

Schätzen einer relativen Häufigkeit

- **Länge des Konfidenzintervalls**

$$L = 2\varepsilon = 2u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- Bestimmung des **Stichprobenumfangs**, um vorgegebene Genauigkeit ε zu erreichen:

$$\boxed{n = \frac{{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^2}{\varepsilon^2} p(1-p)}$$

(Wenn rel. Häufigkeit unbekannt, dann p = 0,5 wählen.)

Beispiel: Kundenzufriedenheit

Bestimmung Stichprobenumfang, damit $\varepsilon = 0.02$ mit $p = 0.7$, $\alpha = 0.05$

$$n = \frac{1.96^2}{0.02^2} \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 2017 \text{ Personen}$$

Schätzen eines Mittelwerts

Intervallschätzung eines Mittelwerts

σ bekannt

$$\mu_u = \bar{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\mu_o = \bar{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$\overline{X}$ … Punktschätzung Mittelwert
σ^2 … Varianz in der Grundgesamtheit
n … Stichprobenumfang

σ unbekannt

$$\mu_u = \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$$\mu_o = \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

s^2… Stichprobenvarianz
α … Irrtumswahrscheinlichkeit
$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$… Quantil der t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden

Kontrollfragen

Thema	*Schätzen*
Aufgabe 1	In einem Produktionsunternehmen wird vor der Auslieferung die Qualität der Ware auf Stichprobenbasis kontrolliert. Bei einer Stichprobe von 1000 Stück werden 102 Ausschussstücke detektiert. Geben Sie ein Konfidenzintervall für den Ausschussanteil an. Wie verändert sich das Intervall, wenn Sie verschiedene Wert für α wählen?
Aufgabe 2	Die Länge eines Werkstück hat einen Sollwert von 85 mm. In einer Stichprobe von 10 Stück wurden folgende Längen gemessen: 84.6, 86.2, 85.4, 84.9, 86.0, 85.7, 84.5, 84.7, 85.3, 85.9. Geben Sie ein Konfidenzintervall für die mittlere Länge der Werkstücke an ($\alpha = 0.05$).

Testen

Grundprinzip Testen

1. Aufstellen von Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1.
   Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegung einer geeigneten Prüfgröße (Teststatistik)
3. Bestimmen des kritischen Bereichs
4. Berechnung der Teststatistik
5. Entscheidung und Interpretation

Testen einer relativen Häufigkeit

Testen von zweiseitigen Hypothesen über eine relative Häufigkeit

1. Nullhypothese H_0: $\pi = \pi_0$

   Alternativhypothese H_1: $\pi \neq \pi_0$

   Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

2. Teststatistik: $$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Beispiel: Kundenzufriedenheit

Test, ob die Kundenzufriedenheit bei 70% liegt oder sich verändert hat.

Stichprobenerhebung: n = 1000, 680 zufrieden

H_0: $\pi = 0.7$

H_1: $\pi \neq 0.7$

Testen einer relativen Häufigkeit

Testen von zweiseitigen Hypothesen über eine relative Häufigkeit

3. kritischer Bereich: bei $|Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\rightarrow$ Ablehnung von H_0

   bei $|Z| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\rightarrow$ Beibehaltung von H_0

4. Berechnung der Teststatistik Z aus der Stichprobe

5. Liegt Z im Beibehaltungs- oder Ablehnungsbereich?

   Interpretation des Ergebnisses

Beispiel: Kundenzufriedenheit

$p = 0.68$

$$Z = \frac{0.68 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{1000}}} = -1.38$$

$|Z| = 1.38 \leq 1.96$

Nullhypothese wird beibehalten

Testen eines Mittelwerts

Testen von zweiseitigen Hypothesen über einen Mittelwert (σ^2 bekannt)

1. Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$

   Alternativhypothese $H_1: \mu \neq \mu_0$

   Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$

2. Teststatistik:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Testen eines Mittelwerts

Testen von zweiseitigen Hypothesen über einen Mittelwert (σ^2 bekannt)

3. kritischer Bereich: bei $|Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow$ Ablehnung von H_0

   bei $|Z| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow$ Beibehaltung von H_0

4. Berechnung der Teststatistik Z aus der Stichprobe

5. Liegt Z im Beibehaltungs- oder Ablehnungsbereich?

   Interpretation des Ergebnisses

Testen

Entscheidung und Fehler

	H_0 wahr	H_1 wahr
Beibehaltung von H_0	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art (β - Fehler)
Ablehnung von H_0	Fehler 1. Art (α - Fehler)	richtige Entscheidung

Testen

Mögliche Fehlentscheidungen beim Testen

- **Fehler 1. Art (α - Fehler):**
  irrtümliche Ablehnung der Hypothese H0
  Wahrscheinlichkeit: α
  kontrollierbar, da α vorher festgelegt wird

- **Fehler 2. Art (β - Fehler):**
  irrtümliche Beibehaltung der Hypothese H0
  Wahrscheinlichkeit: β
  unkontrollierbar

Kontrollfragen

Thema	*Testen*
Aufgabe 1	In einem Produktionsunternehmen wird vor der Auslieferung die Qualität der Ware auf Stichprobenbasis kontrolliert. Bei einer Stichprobe von 1000 Stück werden 102 Ausschussstücke detektiert. Kann ein Ausschussanteil von 10% angenommen werden ($\alpha = 0.05$)?
Aufgabe 2	Die Länge eines Werkstück hat einen Sollwert von 185 mm. In einer Stichprobe von 10 Stück wurde eine mittlere Länge von 184 mm festgestellt. Nehmen Sie für die Streuung der Länge einen Wert von 1 mm an und ein Signifikanzniveau von 5%. Kann man sagen, dass die Länge der Werkstücke signifikant kleiner ist als der Sollwert?

Kontrollfragen	
Thema	*Testen*
Aufgabe 3	Von Werkstücken, die ein Jahr lang gelagert wurden, sind 40 Prozent unbrauchbar. Nach einer Änderung der Lagerbedingungen wird überprüft, ob sich die relative Häufigkeit an unbrauchbaren Werkstücken verringert hat. a) Formulieren Sie für dieses Problem geeignete statistische Hypothesen. b) Entscheiden Sie sich auf dem Signifikanzniveau von 5% für eine der formulierten Hypothesen, wenn unter 100 zufällig ausgewählten Stücken nur mehr 36 Prozent unbrauchbar waren.