Verteilungen

WS 2023 - 24

DI Emil Marinov

SPENGERGASSE

ausbildung mit zukunft

Übersicht

Grundlegendes zu Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable (ZV)

Ergebnisse von Zufallsexperimenten sind nicht unbedingt durch reelle Zahlen gegeben.

Beispiele: Werfen einer Münze: „Kopf“ oder „Zahl“
Ziehen einer Karte: „As“, „Karo“, …

Auch wenn die Ergebnisse durch reelle Zahlen gegeben sind, sind die Ausgänge des Zufallsexperimentes nicht immer von Interesse. Interessanter sind die (Eintritts-) Wahrscheinlichkeiten. Wir benötigen also eine Vorschrift, die jedem Ausgang des Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet.

Diese Zuordnung $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man **Zufallsvariable Z**.

Eine ZV Z ist also eine Größe, die beim zufälligen Auftreten eines Elementarereignisses $\omega \in \Omega$ einen reellen Wert $Z(\omega)$ annimmt.

Diskrete und stetige ZV

Die Unterscheidung in diskrete und stetige ZV erfolgt nach der gleichen Definition bzw. Analogie zu den diskreten und stetigen Merkmalen.

- **diskret**: ZV kann endlich oder abzählbar-unendlich viele Werte annehmen
- **stetig**: ZV kann jeden beliebigen Wert eines Intervalls annehmen

Beispiele:

- Anzahl der verkauften Autos pro Tag
  (diskrete Zufallsvariable)

- Umsatz in einer Woche
  (stetige Zufallsvariable)

Es gibt zwei Methoden mit deren Hilfe sich Verteilungen beschreiben lassen

- **Verteilungsfunktion** F_Z

$$\boxed{F_Z(x) = P(Z \leq x)}$$

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f_Z **für diskrete ZV**

$$\boxed{f_Z(x) = P(Z = x)}$$

- **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** f_Z
  oder kurz: Dichtefunktion für stetige ZV

$$\boxed{f_Z(x) = F_Z'(x)}$$

Beispiel:

In einer Produktion von elektronischen Bauteilen beträgt die Ausschussquote 15%.

Zufallsvariable X: Anzahl der fehlerhaften Teile aus einer Stichprobe von 3 Stück.

x	f(x)	F(x)
0	$0.85^3 = 61.41\%$	61.41%
1	$0.85^2 \cdot 0.15 \cdot 3 = 32.51\%$	93.92%
2	$0.85 \cdot 0.15^2 \cdot 3 = 5.74\%$	99.66%
3	$0.15^3 = 0.34\%$	100%

Stigma

- **Verteilungsfunktion** F_Z für stetige Zufallsvariable Z

$$\boxed{F_Z(x) = P(Z \leq x)}$$

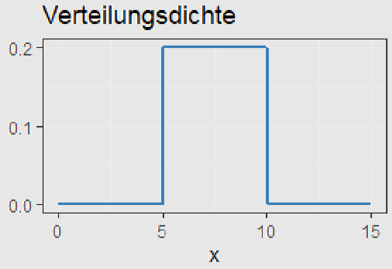
- **Dichtefunktion** f_Z für stetige Zufallsvariable Z

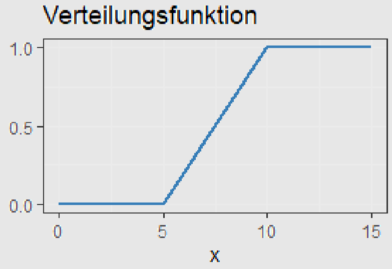
$$\boxed{f_Z(x) = F_Z'(x)}$$

Beispiel:

Die Lieferzeit eines Zukaufteils ist gleichmäßig zwischen 5 und 10 Tagen verteilt.

stetige Zufallsvariable Z: Wartezeit auf Zukaufteil
mögliche Werte x: [5, 10]





SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Erwartungswert

- Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_Z(x_i)$$

- Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_Z(x)dx$$

Beispiel:

Zufallsvariable X: Anzahl der fehlerhaften Teile aus einer Stichprobe von 3 Stück bei einer Ausschussquote von 15%.

x	f(x)
0	61.41%
1	32.51%
2	5.74%
3	0.34%

$$E(X) = 0 \cdot 0.6141 + 1 \cdot 0.3251 + 2 \cdot 0.0574 + 3 \cdot 0.0034 = 0.45$$

Varianz und Streuung

- **Varianz**: mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert

$$\boxed{Var(Z) = E\left(\left(Z - E(Z)\right)^2\right)}$$

- **Streuung**: Wurzel aus der Varianz

$$\boxed{\sigma = \sqrt{Var(Z)}}$$

Beispiel:

Zufallsvariable X: Anzahl der fehlerhaften Teile in einer Stichprobe von 3 Stück bei einer Ausschussquote von 15%

x	f(x)	(x-E(x))²
0	61.41%	0.203
1	32.51%	0.303
2	5.74%	2.403
3	0.34%	6.503

$$Var(X) = 0.6141 \cdot 0.203 + 0.3251 \cdot 0.303 + 0.0574 \cdot 2.403 + 0.0034 \cdot 6.503 = 0.3825$$
$$\sigma(X) = 0.62$$

Zusammenfassung

Beschreibende Statistik	**Wahrscheinlichkeit und Verteilungen**
Merkmal	Zufallsvariable
relative Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
Histogramm	Verteilungsdichte
kumulierte relative Häufigkeit	Verteilungsfunktion
arithmetisches Mittel	Erwartungswert
empirische Varianz	Varianz

Kontrollfragen	
Thema	*Zufallsvariablen*
Fragen	Die Wartezeit Z auf einen Zukaufteil ist gleichmäßig zwischen 5 und 10 Tagen verteilt. • Beschreiben Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion von Z mit Hilfe von Formeln. • Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilungen die Wahrscheinlichkeiten $P(Z \leq 6)$ und $P(7 \leq Z \leq 9)$ • Wie groß ist der Erwartungswert für Z?

Binomialverteilung

Binomialverteilung

Modell der Binomialverteilung

- Zufallsexperiment wird n Mal (unabhängig) wiederholt
- Erfolg tritt mit Wahrscheinlichkeit p ein
- Zufallsvariable Z: Anzahl der Erfolge bei n Wiederholungen
- Z ist dann binomialverteilt mit den Parametern n und p
- Schreibweise: $Z \sim B(n, p)$

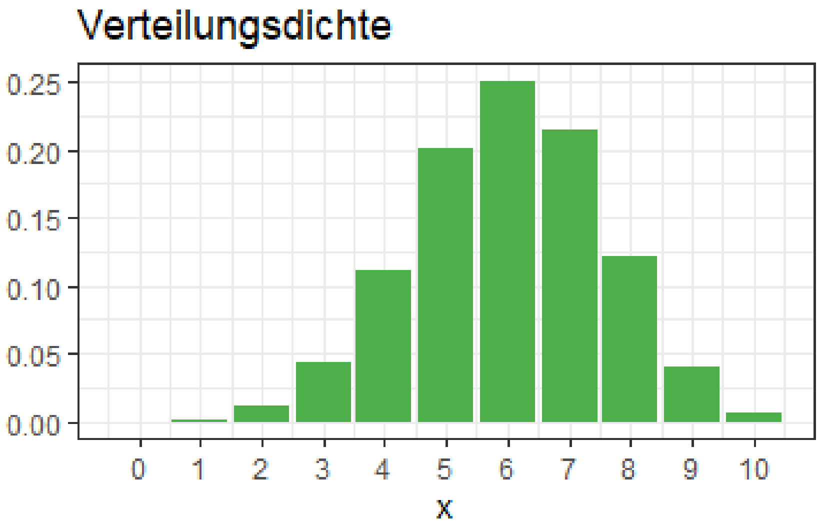
Beispiele:

- Anzahl der Sechser bei 10 Mal Würfeln ($n = 10$, $p = 1/6$)
- Anzahl der fehlerhaften Stück in einer Stichprobe
  (n … Stichprobenumfang,
  p … Ausschussanteil)
- 3-maliges Ziehen von Kugeln (mit Zurücklegen) aus einer Schachtel mit 4 schwarzen und 5 roten Kugeln,
  Z … Anzahl der roten Kugeln,
  $Z \sim B(3, 5/9)$

Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeitsfunktion für binomialverteilte Zufallsvariable

$$\boxed{f_Z(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$



Erwartungswert und **Varianz**

$$\boxed{E(Z) = np}$$

$$\boxed{Var(Z) = np(1-p)}$$

Binomialverteilung

Beispiel:

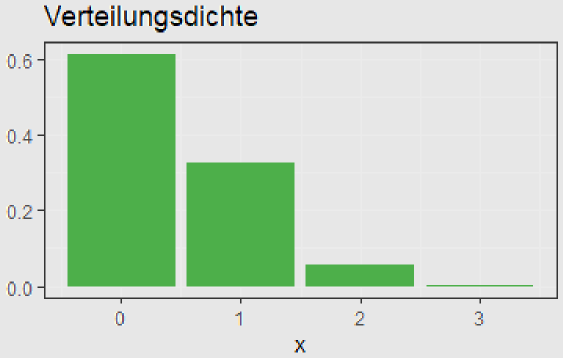
Zufallsvariable X: Anzahl der nicht fehlerhaften Teile in einer Stichprobe von 3 Stück bei einer Ausschussquote von 15%

X ist binomialverteilt mit n = 3, p = 0.15

$$p(X = 2) = f_X(2) = \binom{3}{2} 0.15^2 \cdot 0.85^1 = 0.0574$$

$$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0.15 = 0.45$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 3 \cdot 0.15 \cdot 0.85 = 0.3825$$



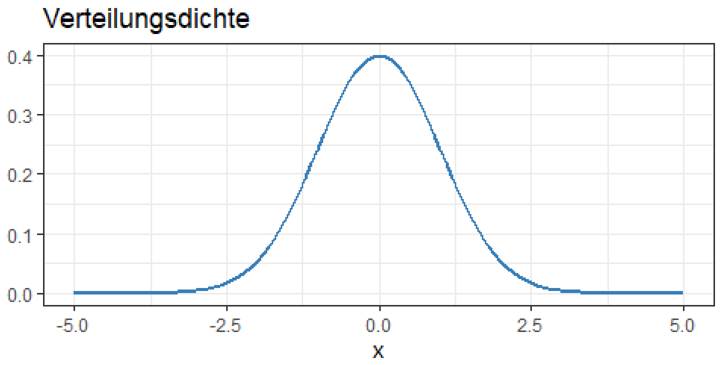
Normalverteilung

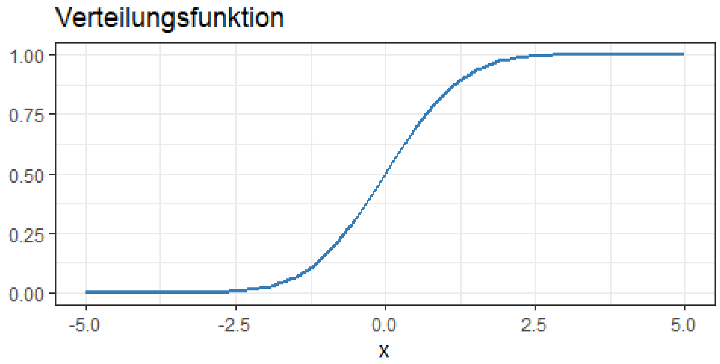
Normalverteilung

Eine Zufallsvariable Z heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ², wenn sie folgende **Dichtefunktion** besitzt:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Schreibweise: Z ~ N (μ, σ²)
- **Erwartungswert**: μ
- **Varianz**: σ²





SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Normalverteilung

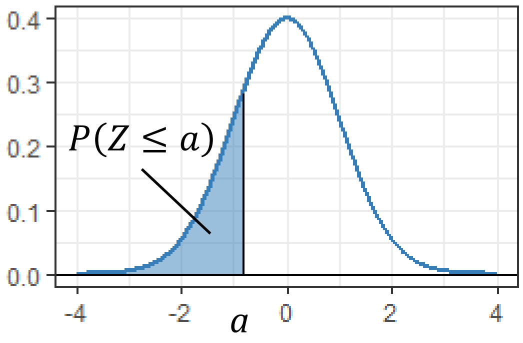
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,

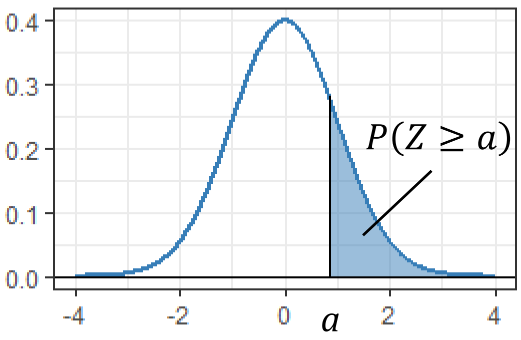
wenn Z ~ N (μ, σ²)

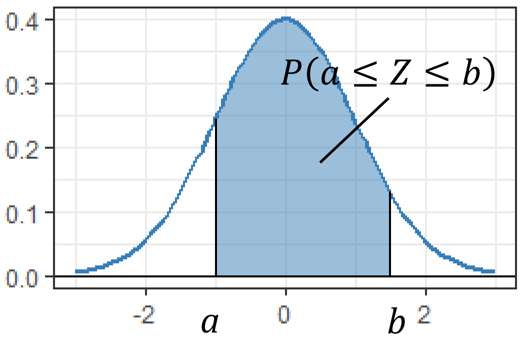
$P(Z \leq a) = F_{N(\mu,\sigma^2)}(a)$

$P(Z \geq a) = 1 - F_{N(\mu,\sigma^2)}(a)$

$P(a \leq Z \leq b) =$
$F_{N(\mu,\sigma^2)}(b) - F_{N(\mu,\sigma^2)}(a)$



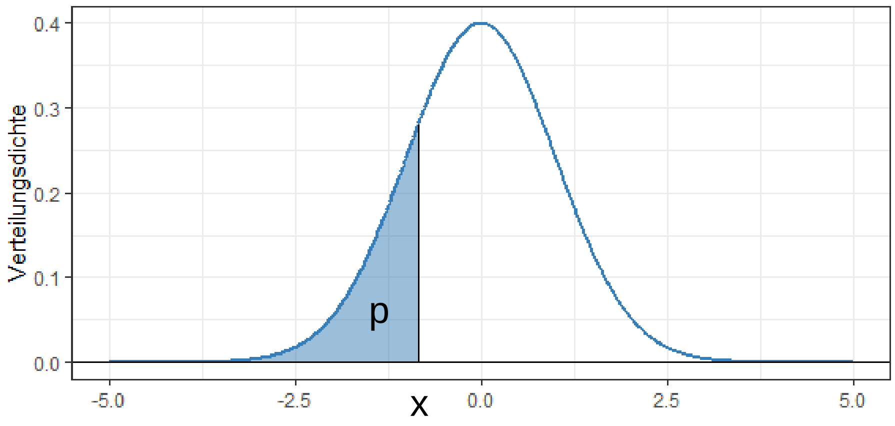




Normalverteilung

Quantile

- Umkehrfunktion zur Verteilungsfunktion
- gegeben: Wahrscheinlichkeit p
- gesucht: x-Wert, sodass p = F(x)
- Quantil q(p) = x



SPENGERGASSE
ausbildung mit zukunft

Normalverteilung

Standardnormalverteilung

- Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1

$$Z \sim N\,(0, 1)$$

- Jede Normalverteilung kann auf die Standardnormalverteilung zurückgeführt werden.

- **Standardisierung**: $X \sim N\,(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z \sim N\,(0, 1)$ mit

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Normalverteilung

Zentraler Grenzverteilungssatz

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sind unabhängige Zufallsvariablen

Erwartungswerte $E(Z_i) = \mu_i$

Varianzen $Var(Z_i) = \sigma_i^2$

Dann ist die Summe $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ annähernd normalverteilt mit

$$E(Z) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

$$Var(Z) = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \ldots + \sigma_n{}^2$$

Kontrollfragen

Thema	*Normalverteilung*

Fragen	Auf einer Anlage wird Zucker in Packungen abgefüllt. Der Mindestinhalt einer Packung soll 1000g betragen. Da die Anlage mit einer Standardabweichung von 1.5 g arbeitet, ist das Abfüllgewicht auf 1002 g eingestellt.
	
	• Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Packung
	    • unterfüllt ist?
	    • mehr als 1005 g wiegt?
	    • zwischen 1000 g und 1004 g wiegt?
	
	• Welches Mindestgewicht erreichen 95% der Packungen?
	• Auf welches Abfüllgewicht muss die Anlage eingestellt werden, damit nur max. 3% der Packungen unterfüllt sind?