Analysis 1 Übungsblatt 1

Jarne, Lars

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen

(a) $\neg(A \land B)$ ist äquivalent zu $\neg A \lor \neg B$.

A	B	$A \land B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$	$\neg(A \land B)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

(b) $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(c) $A \lor (B \land C)$ ist äquivalent zu $(A \lor B) \land (A \lor C)$

A	B	C	$B \land C$	$A \lor B$	$A \lor C$	$A \lor (B \land C)$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 2 Sei M eine Menge. Für jedes Element $x \in M$ bezeichne $A(x)$ eine gegebene Aussage. Zeigen Sie:

(a) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$.

"$\Rightarrow$": $\neg(\forall x \in M : A(x))$ bedeutet: Es ist nicht wahr, dass für alle x aus M die Aussage gilt. Diese Aussage ist wahr, wenn es ein $x \in M$ gibt, für welches $A(x)$ nicht gilt, also: $\exists x \in M : \neg A(x)$.

"$\Leftarrow$": $\exists x \in M : \neg A(x)$ bedeutet: Es existiert ein x aus M für das $A(x)$ nicht gilt. Das bedeutet, dass es nicht für alle x aus M gelten kann, also: $\neg(\forall x \in M : A(x))$.

(b) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$.

"$\Rightarrow$": $\neg(\exists x \in M : A(x))$ bedeutet: Es ist nicht wahr, dass es ein x aus M gibt, für das $A(x)$ gilt. Also bedeutet das, dass für jedes x aus M die Aussage $A(x)$ nicht gilt: $\forall x \in M : \neg A(x)$.

"$\Leftarrow$": $\forall x \in M : \neg A(x)$ bedeutet: Für alle x aus M gilt, dass $A(x)$ nicht gilt. Also gibt es kein x aus M, für das $A(x)$ gilt: $\neg(\exists x \in M : A(x))$.

Aufgabe 3

(a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 100\}$,

$A = \{n \in X \mid 2(n-13)(n-3) < 0\}$,

$B = \{n \in X \mid \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m^2 = n\}$,

$C = \{n \in X \mid n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$.

Bestimmen Sie die Mengen:

1. $A \cup B$ - $C = \{1, 5, 7, 9, 11, 25, 49, 81\}$
2. $A \cup (B - C) = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 25, 49, 81\}$
3. $(B \cap A)$ - C $= \{9\}$
4. $B \cap (A$ - C$) = \{9\}$

(b) Seien X, Y, Z Mengen. Beweisen Sie die De Morganschen Regeln:

(i) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

"$\Rightarrow$": Sei $x \in X - (Y \cap Z)$.

- Dann ist $x \in X \wedge x \notin (Y \cap Z)$.
- Daraus folgt, dass $(x \notin Y) \vee (x \notin Z)$, da x sonst im Schnitt wäre.
- Wenn $x \notin Y$, dann $x \in X - Y$.
- Wenn $x \notin Z$, dann $x \in X - Z$.
- Aus Punkt 2 folgt, dass x mindestens in $(X - Y) \vee (X - Z)$.
- Somit folgt $x \in (X - Y) \cup (X - Z)$.

"$\Leftarrow$": Sei $x \in (X - Y) \cup (X - Z)$.

- Somit ist $x \in X \wedge (x \in (X - Y) \vee x \in (X - Z))$.
- Daraus folgt $x \notin Y \vee x \notin Z$.
- Da Punkt 2 gilt, muss $x \notin (Y \cap Z)$, da sonst $x \in Y \wedge x \in Z$ wäre.
- Somit ist $x \in X \wedge x \notin (Y \cap Z)$.
- Daraus folgt $x \in X - (Y \cap Z)$.

Da beide Implikationen gezeigt wurden, folgt: $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$.

(ii) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$

"$\Rightarrow$": Sei $x \in X - (Y \cup Z)$.

- Dann ist $x \in X \wedge x \notin (Y \cup Z)$.
- Daraus folgt, dass $x \notin Y \wedge x \notin Z$, da x nicht in der Vereinigung von Y und Z ist.
- Wenn $x \notin Y$, dann $x \in X - Y$.
- Wenn $x \notin Z$, dann $x \in X - Z$.
- Da beide Bedingungen erfüllt sind, folgt $x \in (X - Y) \wedge x \in (X - Z)$.
- Somit folgt $x \in (X - Y) \cap (X - Z)$.

"$\Leftarrow$": Sei $x \in (X - Y) \cap (X - Z)$.

- Dann ist $x \in X \wedge x \in (X - Y) \wedge x \in (X - Z)$.
- Das bedeutet, dass $x \notin Y \wedge x \notin Z$.
- Daraus folgt, dass $x \notin (Y \cup Z)$, da x weder in Y noch in Z enthalten ist.
- Da $x \in X$ und $x \notin (Y \cup Z)$, folgt $x \in X - (Y \cup Z)$.

Da beide Implikationen gezeigt wurden, folgt: $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z)$.

Aufgabe 4 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Für $A \subseteq X$ setzen wir $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$.

(ii) Für $B \subseteq Y$ setzen wir $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen oder widerlegen Sie.

(a) Für alle $A, B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

1. Richtung: $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   - Sei $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Daraus folgt, dass $f(x) \in A \cap B$, also $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$.
   - Das bedeutet, dass $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$, also $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Richtung: $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$
   - Sei $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dann gilt $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$.
   - Das bedeutet, dass $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$, also $f(x) \in A \cap B$.
   - Somit gilt $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Da beide Inklusionen gezeigt wurden, folgt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

(b) Für alle $A, B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

1. Richtung: $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
   - Sei $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Dann gilt $f(x) \in A \cup B$, also $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$.
   - Daraus folgt $x \in f^{-1}(A)$ oder $x \in f^{-1}(B)$, also $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
2. Richtung: $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B)$
   - Sei $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dann gilt $f(x) \in A$ oder $f(x) \in B$, also $f(x) \in A \cup B$.
   - Das bedeutet $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Da beide Inklusionen gezeigt wurden, folgt $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

(c) Für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1. Richtung: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
   - Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann existiert ein $x \in A \cap B$, sodass $f(x) = y$.
   - Da $x \in A$ und $x \in B$, folgt $y = f(x) \in f(A)$ und $y = f(x) \in f(B)$.
   - Also gilt $y \in f(A) \cap f(B)$.
2. Richtung: $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$
   - Sei $y \in f(A) \cap f(B)$. Dann existieren $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$, sodass $f(x_1) = y$ und $f(x_2) = y$.
   - Da jedoch x_1 und x_2 nicht unbedingt gleich sind (da f nicht injektiv sein muss), folgt nicht, dass $y \in f(A \cap B)$.

Da die Umkehrung nicht gilt, ist $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, aber nicht umgekehrt.

Ergebnis: Die Aussage ist falsch.

(d) Für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

1. Richtung: $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

    - Sei $y \in f(A \cup B)$. Dann existiert ein $x \in A \cup B$, sodass $f(x) = y$.
    - Da $x \in A$ oder $x \in B$, folgt $y = f(x) \in f(A)$ oder $y = f(x) \in f(B)$, also $y \in f(A) \cup f(B)$.

2. Richtung: $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

    - Sei $y \in f(A) \cup f(B)$. Dann existieren $x_1 \in A$ oder $x_2 \in B$, sodass $f(x_1) = y$ oder $f(x_2) = y$.
    - In beiden Fällen gilt $x_1 \in A \cup B$ oder $x_2 \in A \cup B$, also $y \in f(A \cup B)$.

Da beide Inklusionen gezeigt wurden, folgt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.