Informatik 1 Übungsblatt 1

Hendrik Kleine Vennekate, Lars-Ole Schlichting

Aufgabe 1

(a) $(2^p)^q = 2^{(p^q)}$ ✗

$(2^2)^3 = 64$, $2^{(2^3)} = 256$

(b) $(2^p)^q = 2^{pq}$ ✓

(c) $2^p \cdot 2^q = 2^{pq}$ ✗

$2^2 \cdot 2^3 = 16$, $2^{(2\cdot 3)} = 64$

(d) $\frac{2^p}{2^q} = 2^{\frac{p}{q}}$ ✗

$\frac{2^6}{2^2} = 16$, $2^{\frac{6}{2}} = 8$

(e) $\frac{x \text{ GiB}}{1 \text{ KiB}} = x \cdot 2^{20}$ ✓

Aufgabe 2 Zur Darstellung des ASCII-Codes als Dezimal-, Binär-, und Hexadezimalzahlen gibt es verschiedene Online-Tools. Wir haben bspw: Rapidtables genutzt.

1. ASCII-Code: Ist das schwierig?
2. Dezimal: 73 115 116 32 100 97 115 32 115 99 104 119 105 101 114 105 103 63
3. Binär: 01001001 01110011 01110100 00100000 01100100 01100001 01110011 00100000 01110011 01100011 01101000 01110111 01101001 01100101 01110010 01101001 01100111 00111111
4. Hex: 49 73 74 20 64 61 73 20 73 63 68 77 69 65 72 69 67 3F

Alternativ gibt es Tabellen, die eine einfache Übersetzung in verschiedene Zahlensysteme gewährleisten.

Aufgabe 3 Sei b_i ein Bit mit $0 < i < (n-1)$. Außerdem sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Allgemeine Formel für positive Zahlen (MSB = 0):

$$(b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0)_2 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$$

Allgemeine Formel für negative Zahlen (MSB = 1):

$$(b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0)_2 = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

(a)

(1) 0110 0100

Da das MSB 0 ist, handelt es sich bei der Binärzahl um eine positive Zahl.

$0110\ 0100_2 = 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 100$

(2) 1100 0110

Da das MSB 1 ist, handelt es sich bei der Binärzahl um eine negative Zahl.

$1100\ 0110_2 = -1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = -58$

(b) Nun addieren wir die beiden Zahlen schriftlich als Binärzahlen.

$$0110\ 0100_2 = 100$$

$$1100\ 0110_2 = -58$$

Addition der beiden Zahlen:

$$\begin{array}{r} 01100100 \\ +11000110 \\ \hline 00101010 \end{array}$$

Das Ergebnis ist $0010\ 1010_2$, und wenn wir diese Binärzahl in eine Dezimalzahl umrechnen:

$$0010\ 1010_2 = 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 42$$

Das Ergebnis der Addition ist also 42 als Dezimalzahl.

Aufgabe 4 Für diese Aufgabe betrachten wir das hypothetische Beispiel von 8-Bit-Gleitkommezahlen, wobei drei Bits für den Exponenten und vier Bits für die Mantisse genutzt wird.
Die allgemeine Formel für den Wert einer Gleitkommazahl mit 32 Bits nach IEEE 754 lautet:

$$(-1)^v \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{-i} \right) 2^{\overline{e}-127}$$

Für unseren Fall einer 8-Bit-Gleitkommazahl ändern wir die Formel zu:

$$(-1)^v \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{-i} \right) 2^{\overline{e}-3}$$

(a) 01001000_2

Das MSB ist in diesem Fall $= 0$, d.h. dass unser $v = 0$. Unser $n = 5$, da die Mantisse 4 explizite Bits und die implizite 1 umfasst, die am Anfang der Mantisse steht. Daher läuft unsere Summe von $i = 0$ bis $n - 1 = 4$. Unser *Exponent* $= \overline{e} = 100_2$. Im Dezimalsystem ist unser Exponent $= 4$, da $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$.
Wir setzen in die Formel ein:

$$(-1)^0 \left(\sum_{i=0}^{4} a_i 2^{-i} \right) 2^{4-3} = \left(\sum_{i=0}^{4} a_i 2^{-i} \right) 2$$

Berechnet man die Summe ergibt sich:

$$(1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}) \cdot 2 = 3$$

Das bedeutet, dass die Dezimalzahl 3 durch die Bitfolge 01001000_2 in unserem hypothetischen Beispiel repräsentiert wird.

(b) Durch welche Bit-Folge wird 0.75 repräsentiert?

Da unsere Zahl positiv ist, ist unser $v = 0$. Wir wollen 0.75 als Binärzahl darstellen und gehen nach folgendem Schema vor:

1. Starte mit den Nachkommastellen der Dezimalzahl, die du in Binärform umwandeln möchtest. Nennen wir diese Zahl f.
2. Multipliziere f mit 2: $f' = f \cdot 2$
3. Überprüfe den Ganzzahlanteil von f':
   - Wenn der Ganzzahlanteil von f' gleich 1 ist, notiere eine 1 und setze $f = f' - 1$.
   - Wenn der Ganzzahlanteil von f' gleich 0 ist, notiere eine 0 und setze $f = f'$.
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3, indem du f jedes Mal erneut mit 2 multiplizierst, bis $f = 0$ ist oder bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

In unserem Fall wenden wir den Algorithmus auf 0.75 an.

$$\begin{array}{r|l} 0.75 \cdot 2 = 1.5 & 1 \\ 0.5 \cdot 2 = 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

Also lautet die binäre Darstellung unserer 0.75: 0.11_2
Wir wollen unser Komma so verschieben, dass eine einzige 1 links vom Komma steht, also in unserem Beispiel um eine Stelle nach rechts, was -1 Stellen entspricht. Analog wäre 1 Stelle = Einer Verschiebung nach links. Da unser Exponent in unserem Beispiel 3 entspricht, rechnen

wir $3 - 1 = 2$. Die 2 übertragen wir ins Binärsystem und erhalten eine 010_2, da unser Exponent drei Bits umfasst. Unsere Mantisse ist 1000_2, da die 1 links vom Komma jetzt nur noch impliziert wird. Der Rest ist mit 0 aufgefüllt, damit wir 4 Bits für die Mantisse bekommen. Alles zusammengefasst erhalten wir diese Gleitkommazahl:

$$00101000_2$$

(c) Begründen Sie, welche Bit-Folgen die kleinste positive Zahl (ungleich 0) sowie die größte positive Zahl (ungleich unendlich) repräsentieren. Beachten Sie dabei die oben erklärten Sonderrollen der Exponenten 000 und 111.

(1) kleinste positive Zahl $\neq 0$.

Je größer unser Exponent ist, desto größer wird unsere Zahl, da wir bspw. die implizite 1 immer weiter nach links bringen und sie damit mit einer immer größer werdenden 2er-Potenz multipliziert wird. Daher ist unser kleinster Exponent: 000_2.

Unsere kleinstmögliche Mantisse ist 0001_2, oder mit der impliziten 0 dann 0.0000_2, da im Falle 0000_2 unsere Zahl 0 werden würde, was sich mit der Voraussetzung, die kleinste positive Zahl zu finden, nicht verträgt.

Da unsere Zahl positiv sein soll, wählen wir als Vorzeichen eine 0.

1. Da wir durch die Wahl des Exponenten eine denormalisierte Zahl erhalten, wird der Exponent durch Verschiebung von 1 festgelegt, also $1 - 3 = -2$.
2. Der Wert unserer kleinsten positiven Zahl ist also: $0.0001_2 \cdot 2^{-2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0.015625$.

(2) größte positive Zahl $\neq \infty$.

Wir wollen einen möglichst großen Exponenten, also wählen wir 110_2. Wieder sei zu beachten, dass 111_2 für den Exponenten nicht in Frage kommt, da dieser entweder Unendlichkeit, oder Undefinierheit repräsentiert.

Unsere größtmögliche Mantisse ist 1111_2, oder mit der impliziten 1 dann 1.1111_2.

Um die höchstmögliche Zahl zu erreichen, wählen wir als Vorzeichen eine 0.

1. Exponent $110_2 = 6_{10}$.
2. Da unser $\overline{e} = 3$ subtrahieren wir 3 von 6 und erhalten 3.
3. Der Wert unserer kleinsten positiven Zahl ist also: $1.1111_2 \cdot 2^3 = 1.9375 \cdot 8 = 15.5$.