S1LA1Ü2

Lars Schlichting, Leo Pritzkoleit

2.1 Die Gerade G im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichungen

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \text{ und } x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

Für eine fest gewählte reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei die Ebene E_a im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Gleichung

$$5x_1 - 5x_2 + a^2 x_3 = 3a + 1$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von a sich die Gerade G und die Ebene E schneiden bzw. parallel sind bzw. G in E enthalten ist.

Proof. Die Gerade ist durch folgendes LGS beschreibbar:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$*_1 = *_1 - 2 \cdot *_2$

$$\begin{aligned} -5x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Wir setzen $x_3 = \lambda$
Wir können dann die obere Gleichung nach x_2 umstellen

$$\begin{aligned} -5x_2 &= 1 + 3\lambda \\ x_2 &= \frac{-3\lambda - 1}{5} \end{aligned}$$

Wir haben jetzt x_2 in Abhängigkeit von λ beschrieben und setzen in $*_2$ ein.

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{-3\lambda - 1}{5} + 2\lambda &= 1 \\ 5x_1 - 3\lambda - 1 + 10\lambda &= 5 \\ 5x_1 &= 6 - 7\lambda \\ x_1 &= \frac{6 - 7\lambda}{5} \end{aligned}$$

Unsere parametrisierte Geradengleichung mit λ als freie Variable lautet:

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir dies in unsere Ebenengleichung einsetzen und erhalten:

$$5(\frac{6}{5} - \frac{7}{5}\lambda) - 5(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\lambda) + a^2\lambda = 3a + 1$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} 6 - 7\lambda + 1 + 3\lambda + a^2\lambda &= 3a + 1, \\ 7 + (-4 + a^2)\lambda &= 3a + 1, \\ (-4 + a^2)\lambda &= 3a - 6, \\ \lambda &= \frac{3a - 6}{a^2 - 4} = \frac{3}{a + 2}. \end{aligned}$$

Wenn wir $a = 2$ in die obige Gleichung $(-4 + a^2)\lambda = 3a - 6$,
einsetzen, erhalten wir $0 = 0$. Die Gleichung ist immer wahr, egal welchen Wert λ annimmt. Das bedeutet, dass für $a = 2$ die Gerade G in der Ebene E enthalten ist.

Da wir nun λ haben, können wir es in die Geradengleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{a + 2} \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst ergeben die Lösungen des Gleichungssystems für die Gerade G und die Ebene E_a:

$$x_1 = \frac{3(2a - 3)}{5(a + 2)}, x_2 = \frac{-a - 11}{5(a + 2)}, x_3 = \frac{3}{a + 2}$$

Dies zeigt, dass es für alle Werte $a \neq -2 \wedge a \neq 2$ einen eindeutigen Schnittpunkt zwischen Gerade G und Ebene E_a gibt. Wenn jedoch $a = -2$, dann führt dies zur Division durch 0 und demnach sind die Gerade und die Ebene dafür parallel, da keine Lösung für λ existiert. Für $a = 2$ ist die Gerade in der Ebene enthalten.

□

2.2 Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + (a + 1)y \quad &+(a + 2)z = 0 \\ (a + 3)x + (a + 4)y \quad &+(a + 5)z = 0 \\ (a + 6)x + (a + 7)y \quad &+(a + 8)z = 0 \end{aligned}$$

nicht nur die triviale Lösung besitzt.

Proof. Multiplizieren wir die 3 Gleichungen aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &ax + ay \quad +y + az \quad +2z = 0 \\ &ax + 3x \quad +ay + 4y \quad +az + 5z \quad = 0 \\ &ax + 6x \quad +ay + 7y \quad +az + 8z \quad = 0 \end{aligned}$$

$*_2 = *_2 - *_1$
$*_3 = *_3 - *_2$

$$\begin{aligned} ax + ay + y + az + 2z &= 0 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

$*_2 = *_3$
$*_2 \cdot \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} ax + ay + y + az + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Wir wählen $x = z$ und damit $y = -2x$
Zum Prüfen setzen wir ein:

$$ax + a(-2x) \quad +(-2x) + ax \quad +2x = 0$$

Dies ergibt 0 und somit ist die Lösungsmenge definiert als:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

□

2.3 Gegeben seien Mengen X, Y und Z, sowie zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$.

(a) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv)

Proof. Da f injektiv ist, gilt $\{\forall x_1, x_2 \in X : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\}$. Analoges gilt für g.

Seien $x_1, x_2 \in X$ und wir nehmen an, dass $x_1 \neq x_2$, jedoch $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Diese Ausdrücke sind gleichbedeutend mit: $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da g injektiv ist, gilt $f(x_1) = f(x_2)$. Aus der Injektivität von f folgt dann, dass $x_1 = x_2$. Widerspruch zur Annahme, dass $x_1 \neq x_2$.

Somit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist, falls f und g injektiv sind.

□

Proof. Da f surjektiv ist, gilt $\{\forall y \in Y : \exists x \in X$, sodass $f(x) = y\}$. Analoges gilt für g. Sei $z \in Z$ und wir nehmen an, dass $\{\forall x \in X : g(f(x)) \neq z\}$. Aus der Surjektivität von g folgt, dass $\{\exists y \in Y : g(y) = z\}$. Also ist $g^{-1}(z) \neq \emptyset$. Durch die Surjektivität von f folgt, dass $\{\exists x \in X : f(x) = y\}$. Also ist $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Widerspruch zur Annahme $\{\forall x \in X : g(f(x)) \neq z\}$.

Somit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist, falls f und g surjektiv sind.

□

(b) Ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist f injektiv (bzw. g surjektiv).

Proof. Da $g \circ f$ injektiv, $\{\forall x_1, x_2 \in X : g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2\}$. Seien $x_1 \neq x_2 \in X$ und f nicht injektiv, dann ist $f(x_1) = f(x_2)$ möglich. Daraus folgt, dass $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Durch die Injektivität von $g \circ f$ folgt $x_1 = x_2$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $x_1 \neq x_2$ ist.

Somit haben wir gezeigt, dass wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

□

Proof. Da $g \circ f$ surjektiv, $\{\forall z \in Z : \exists x \in X$, sodass $g(f(x)) = z\}$. Sei g nicht surjektiv. Dann kann es ein Element $z \in Z$ geben, sodass $\{\nexists y \in Y$, sodass $g(y) = z\}$ Durch die Surjektivität von $g \circ f$ muss dies jedoch gewährleistet sein.

Somit haben wir gezeigt, dass wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

□

(c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Proof. Seien $x_1 \neq x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$. Wir nehmen an, dass $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Gehen wir davon aus, g müsse nicht injektiv sein und $g(y_1) = g(y_2)$. Dies würde bedeuten, dass $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ mit $x_1 \neq x_2$, wodurch $g \circ f$ nicht injektiv wäre.

Somit haben wir gezeigt, dass g injektiv sein muss, wenn f surjektiv und $g \circ f$ injektiv.

□

(d) Nehmen Sie $X = Z$ an und konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv, f aber nicht surjektiv und g nicht injektiv.

Seien $X = Z = \mathbb{N}$ und $Y = \mathbb{N}_0$. Wir definieren die nicht surjektive Abbildung $f : X \to Y$, $x \mapsto x$. Da die $0 \in Y$ nicht getroffen wird, ist die Abbildung f nicht surjektiv. Die Abbildung g definieren wir so, dass jedes $y \in Y$ wieder auf sich selbst in Z abgebildet wird. Die 0 bilden wir auf ein beliebiges $z \in Z$ ab, beispielsweise auf die 1. Somit ist die Abbildung g nicht injektiv, da $g(0) = g(1)$. Die Komposition $g \circ f$ ist jedoch bijektiv, da jedes $x \in X$ auf sich selbst in Z abgebildet wird.

2.4 Es sei I eine Menge. Zu jedem Element $i \in I$ sei eine Menge X_i gegeben, und für $j \in I$ bezeichne $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die durch $p_j((x_i)_{i \in I}) := x_j$ definierte j-te Projektionsabbildung. Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Abb}(X, Y) := \{\text{Abbildungen } f\colon\ X \to Y\}$ die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge Y. Zeigen Sie, dass die durch $(f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I})$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Abb}(X, \prod_{i \in I} X_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Abb}(X, X_i)$$

bijektiv ist.

Wir wollen die Abbildung $\mathrm{Abb}(X, \prod_{i\in I} X_i) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Abb}(X, X_i), (f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I})$ im folgenden c nennen.

Sei f eine beliebige Funktion aus $D(c) := \mathrm{Abb}(X, \prod_{i\in I} X_i)$. $(f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I})$ wendet nun die Funktion p_i auf die Abbildung f an und zerteilt diese in ihre einzelnen Komponenten $f_i \in f$, wobei f_i nur auf X_i wirkt. Die Menge der Funktionskomponenten f_i ist somit im $Z(f) := \prod_{i\in I} \mathrm{Abb}(X, X_i)$.

Proof. Wir zeigen, dass c sowohl injektiv, als auch surjektiv.

Widerspruchsbeweis zur Injektivität

Nach der Def. von Injektivität gilt: $(\forall x_1, x_2 \in X \mid f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Annahme: Seien $g \neq h \in D(c)$ mit $(p_i \circ g) = (p_i \circ h)$.

$\Rightarrow (g_i) = (h_i)\ \forall i \in I \overset{\text{Def. von } p_i}{\Rightarrow} \forall i \in I, \forall x \in X$: i-te Stelle von $g(x) =$ i-te Stelle von $h(x)$.

$\Rightarrow f = g$, was der Annahme widerspricht.

Dies zeigt, dass die Abbildung c injektiv ist.

Surjektivität

Nach der Def. von Surjektivität gilt: $(\forall y \in Y \mid \exists x \in X$ mit $f(x) = y)$.

Annahme: Sei $k = ((f_i)_{i\in I}) \in Z(c)$, sodass $(\exists g \in D(c)$ mit $(p_i \circ g)_{i\in I} = k)$.

Sei nun $j \in D(c) := j(x) = (f_i(x))_{i\in I}$.

$\Rightarrow \forall i \in I$: $p_i \circ j = f_i$.

Da $D(c)$ die Menge aller Abbildungen von X in $\prod_{i\in I} X_i$ ist, kann j so gewählt werden, dass diese Bedingung erfüllt ist.

Somit ist $c(j) = (p_i \circ j)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I} = k$.

Da für jedes $k \in Z(c)$ ein $g \in D(c)$ existiert, sodass $c(g) = k$, ist die Abbildung c surjektiv.

Da c sowohl injektiv, als auch surjektiv ist, ist c bijektiv, was gezeigt werden sollte.

$\square$