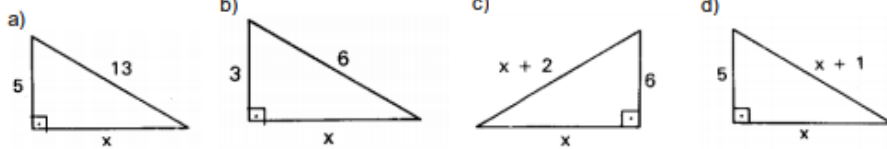


Trigonometria no Triângulo Retângulo

Prof. Rafael Cavallari

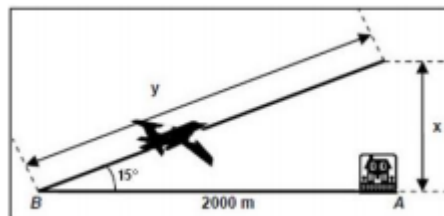
Parte 1 – Exercícios Básicos

1. Calcule x em cada caso:



2. Um avião levanta voo em B e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com a horizontal. A que altura x estará e qual distância y será percorrida quando alcançar a vertical que passa por um prédio A situado a 2000 m do ponto de partida?

Dados: $\sin 15^\circ = 0,26$, $\cos 15^\circ = 0,97$ e $\tan 15^\circ = 0,27$.



3. Um foguete é lançado sob um ângulo de 30° . A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

4. Quando o ângulo de elevação do sol é de 60° , a sombra de uma árvore mede 15 m. Calcule a altura da árvore.

5. Um alpinista de 1,60 m deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55° com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta.

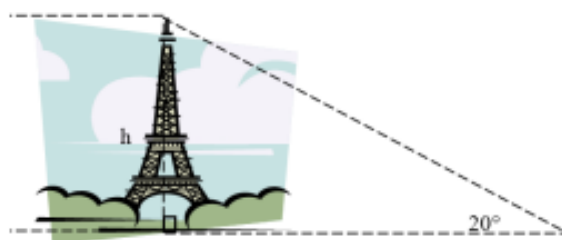
Dados: $\sin 55^\circ = 0,81$, $\cos 55^\circ = 0,57$ e $\tan 55^\circ = 1,42$.

6. Ao soltar pipa, um garoto libera 90 m de linha, supondo que a linha fique esticada e forme um ângulo de 30° com a horizontal. A que altura a pipa se encontra do solo?

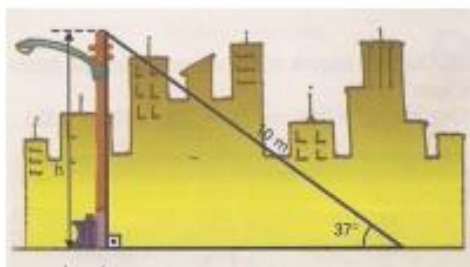
a) 45 m b) $45\sqrt{3}$ m c) $30\sqrt{3}$ m d) 30 m

7. A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20° , como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre.

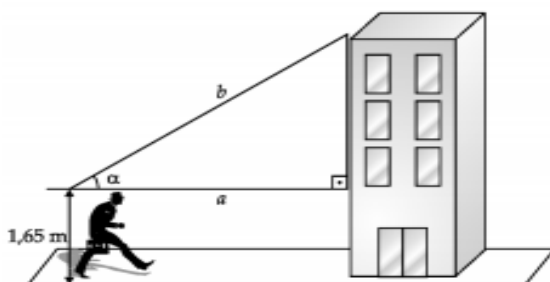
Dados: $\sin 20^\circ = 0,34$ e $\cos 20^\circ = 0,94$.



8. Qual é a altura h do poste representado pela figura abaixo? Dicas: note que há uma distância de 10 m na figura e use $\sin 37^\circ = 0,6$.



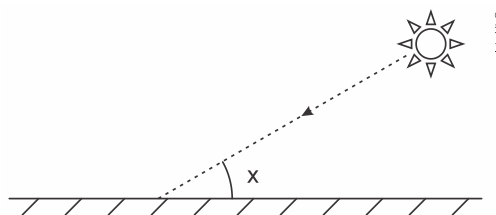
9. (Unicamp) Uma pessoa de 1,65 m de altura observa o topo de um edifício conforme o esquema abaixo. Esse prédio tem altura:



- a) $b \cdot \cos \alpha + 1,65$ b) $a \cdot \sin \alpha - 1,65$ c) $b \cdot \sin \alpha - 1,65$ d) $b \cdot \sin \alpha + 1,65$

10. Considere um triângulo retângulo, cujos ângulos agudos α e β satisfazem à condição $\cos \alpha = 0,8$ e $\cos \beta = 0,6$. Determine a área desse triângulo, em centímetros quadrados, sabendo que o comprimento da hipotenusa é 5 cm.

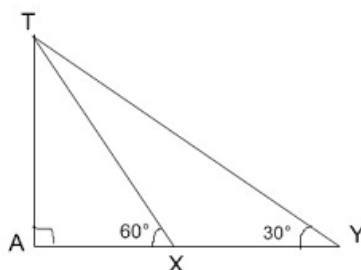
11. (Enem) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \sin(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90° .



Quando $x = 30^\circ$ a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- a) 33% b) 50% c) 57% d) 70% e) 86%

12. (PUC) Em uma rua plana um hotel AT é vista por dois observadores X e Y sob ângulos de 30° e 60° com a horizontal, como mostra a figura a seguir. Se a distância entre esses observadores é de 100 m, qual é a altura do hotel?

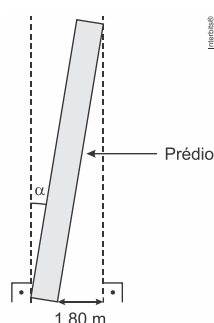


13. (IFAL) Um estudante do Curso de Edificações do IFAL utiliza um teodolito para determinar a altura de um prédio construído em um terreno plano. A uma determinada distância desse prédio, ele vê o topo do prédio sob um ângulo de 30° . Aproximando-se do prédio mais 60 m passa a ver o topo do prédio sob um ângulo de 60° . Considerando que a base do prédio está no mesmo nível da luneta do teodolito, qual a altura deste prédio?

- a) $10\sqrt{3}$ m. b) 28 m c) 30 m d) $30\sqrt{3}$ m

14. (Enem) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções.

Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo 1,80 metro, conforme mostra a figura.



| Ângulo α (Graus) | Seno |
|----------------------------|-------|
| 0,0 | 0,0 |
| 1,0 | 0,017 |
| 1,5 | 0,026 |
| 1,8 | 0,031 |
| 2,0 | 0,034 |
| 3,0 | 0,052 |

O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada. Uma estimativa para o ângulo de inclinação α , quando dado em grau, é tal que

- a) $0 \leq \alpha < 1,0$ b) $1,0 \leq \alpha < 1,5$ c) $1,5 \leq \alpha < 1,8$ d) $1,8 \leq \alpha < 2,0$ e) $2,0 \leq \alpha < 3,0$

15. (Unicamp) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância $AB = 1200$ metros. Quando em A ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo NAB é de 60° ; e quando em B, verifica que o ângulo NBA é de 45° .

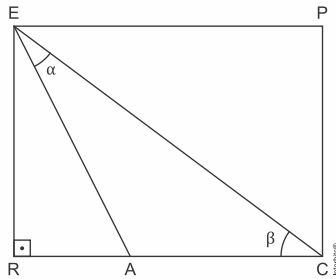
- a) faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) calcule a distância a que se encontra o navio da praia.

Gabarito – Parte 1

- 1) a) 12 b) $3\sqrt{3}$ c) 8 d) 12
2) 540 m
3) 6 km
4) $15\sqrt{3}$ m
5) 115,2 m
6) A
7) 14,5 m
8) 6 m
9) D
10) 6 cm^2
11) B
12) $50\sqrt{3}$ m
13) D
14) C
15) b) $600(3 - \sqrt{3}) \text{ m}$

Parte 2 – Questões de Vestibulares

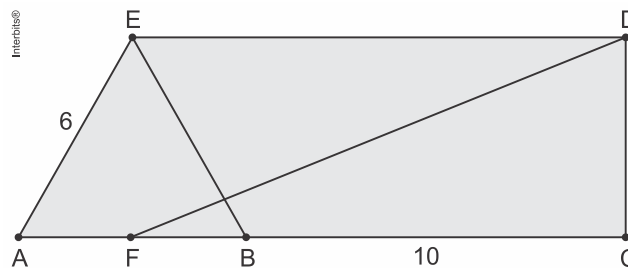
1. (G1 - epcar (Cpcar) 2021) No retângulo EPCR da figura a seguir, $\overline{PC} = 6$ cm, $\overline{RA} = 3$ cm e $\overline{AC} = 5$ cm.



O valor de $\sin \alpha + \cos \alpha$ é

- a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

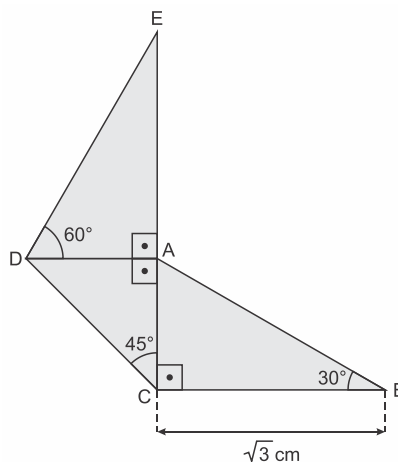
2. (Fuvest 2021)



Na figura, os segmentos AC e DE são paralelos entre si e perpendiculares ao segmento CD ; o ponto B pertence ao segmento AC ; F é o ponto médio do segmento AB ; e $\triangle ABE$ é um triângulo equilátero. Além disso, o segmento BC mede 10 unidades de comprimento e o segmento AE mede 6 unidades de comprimento. A medida do segmento DF , em unidades de comprimento, é igual a

a) 14. b) 15. c) 16. d) 17. e) 18.

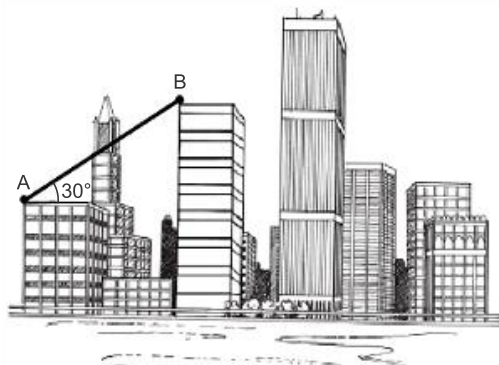
3. (Ufjf-pism 1 2020) Na figura abaixo, o ponto A é vértice comum dos triângulos retângulos ABC , ACD e ADE .



O comprimento do segmento EC , em centímetros, é

- a) $3 + \sqrt{3}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $1 + \sqrt{3}$ d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

4. (G1 - cftmg 2020) As alturas de dois prédios, em relação ao solo, são 2.640 cm e 4.720 cm. Do topo de um deles (ponto A), avista-se o topo do outro (ponto B) sob um ângulo de 30° , em relação ao plano horizontal, como mostra a figura a seguir.

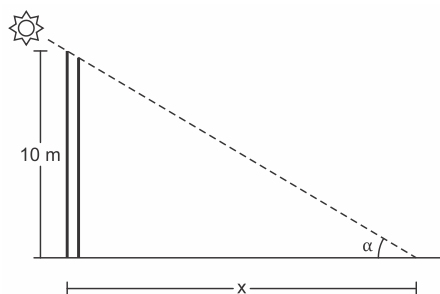


Disponível em: <<https://cuidandodeseupredio.wordpress.com/essencia/>>. (adaptado). Acesso em 12 de set. 2019

Nessas condições, é correto afirmar que a distância de A até B é, em cm, igual a

- a) 2.360
- b) 2.640
- c) 4.160
- d) 4.320

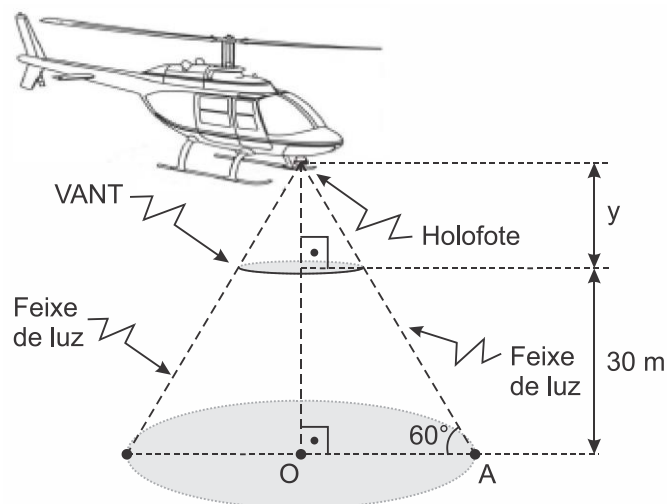
5. (G1 - ifpe 2020) André estava esperando a condução escolar quando percebeu que, pela posição do sol, um poste projetava uma sombra de comprimento "x", conforme a figura. Pesquisando na internet, ele descobriu que aquele tipo de poste tinha 10 metros de altura. Como ele estava estudando Trigonometria na escola, tentou descobrir o comprimento da sombra (representado pela letra "x"), o qual é de, aproximadamente, (Dados: $\text{Tg}\alpha = 0,75$)



- a) 17 metros.
- b) 16 metros.
- c) 13 metros.
- d) 14 metros.
- e) 15 metros.

6. (G1 - epcar (Cpcar) 2020) À noite, um helicóptero da Força Aérea Brasileira sobrevoa uma região plana e avista um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) de forma circular e altura desprezível, com raio de 3 m, estacionado paralelamente ao solo a 30 m de altura. O VANT está a uma distância y metros de um holofote que foi instalado no helicóptero. O feixe de luz do holofote que ultrapassa o VANT incide sobre a região plana e produz uma sombra circular de centro O e raio R.

O raio R da circunferência da sombra forma um ângulo de 60° com o feixe de luz, conforme se vê na figura seguinte.



Nesse momento, uma pessoa que se encontra num ponto A da circunferência da sombra corre para o ponto O, pé da perpendicular traçada do holofote à região plana.

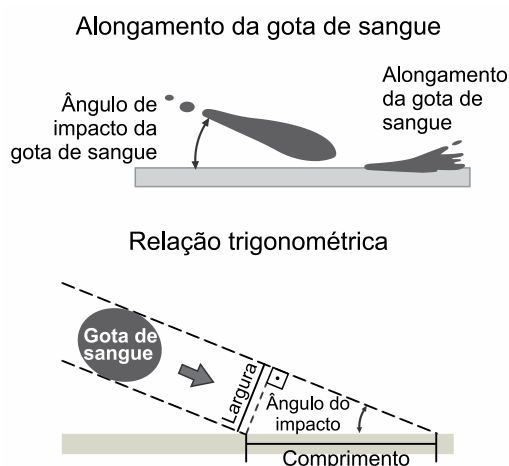
A distância, em metros, que essa pessoa percorre de A até O é um número entre

- a) 18 e 19 b) 19 e 20 c) 20 e 21 d) 22 e 23

7. (Unesp 2020) Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime.

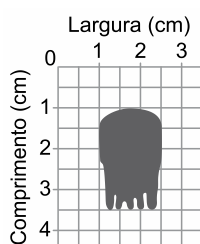
Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90° com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa.

As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.



(Ana Paula Sebastiany *et al.* "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didática de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentadas a seguir.



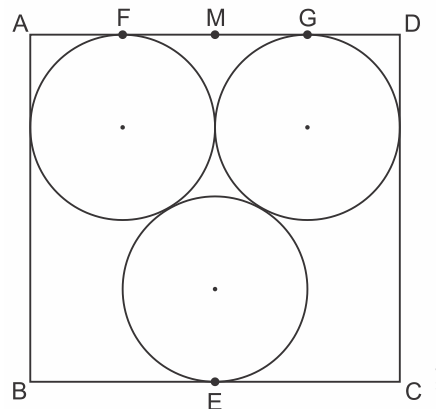
| α | $\text{sen } \alpha$ | $\text{cos } \alpha$ | $\text{tg } \alpha$ |
|------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| 31° | 0,51 | 0,85 | 0,60 |
| 37° | 0,60 | 0,80 | 0,75 |
| 53° | 0,80 | 0,60 | 1,32 |
| 59° | 0,85 | 0,51 | 1,66 |
| 74° | 0,96 | 0,28 | 3,50 |

De acordo com as informações, o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra foi de
a) 37° b) 74° c) 59° d) 53° e) 31°

8. (G1 - ifpe 2020) Uma das mais fantásticas construções humanas é a Torre Eiffel, imagem de referência da cidade de Paris, na França. Construída no final do século XIX, ela impressiona pelo seu tamanho. Uma pessoa, a 561 metros de distância do centro da base da Torre, consegue avistar seu topo segundo um ângulo de 30° com a horizontal. Desconsiderando a altura da pessoa e tomando $\sqrt{3} = 1,7$, a altura da Torre corresponde, aproximadamente, à altura de um prédio de quantos andares? (Considere que cada andar mede 3 m).

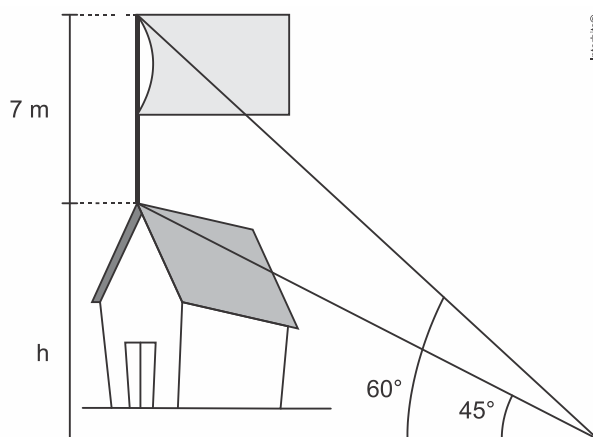
a) 140 andares. b) 110 andares. c) 200 andares. d) 170 andares. e) 80 andares.

9. (G1 - cotuca 2020) Na figura a seguir, temos três circunferências de raio 1, tangentes entre si e inscritas no retângulo ABCD. Sabendo que M é ponto do segmento \overline{AD} e que F, G e E são pontos de tangência entre as circunferências e os lados do retângulo, calcule o valor da tangente do ângulo $\hat{M}\hat{E}\hat{F}$.



a) $2 + \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ c) $2 - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\frac{1}{4}$

10. (G1 - cp2 2019) A haste (de 7 m de comprimento) de uma bandeira está apoiada, verticalmente, sobre o telhado de uma escola. De um ponto do plano horizontal onde a escola se situa, avistam-se a ponta superior e a base dessa haste, em ângulos de 60° e 45° , respectivamente, conforme mostra a figura:
Considere: $\sqrt{3} \cong 1,7$



A altura aproximada da escola, em metros, é

- a) 4. b) 7. c) 10. d) 17.

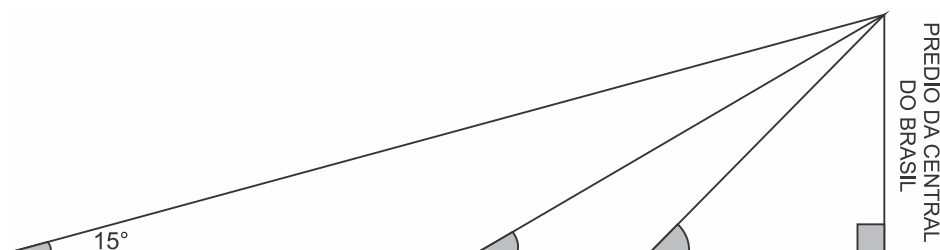
11. (G1 - cmrj 2019) Os alunos do 9º ano do CMRJ foram a uma visita ao Palácio Duque de Caxias para, além de conhecer o palácio, executar um trabalho sobre “grandes medições”, solicitado pelo seu professor de Matemática. Os alunos tinham que estimar a altura do prédio da Central do Brasil localizado ao lado do Palácio Duque de Caxias. Para realizar a tarefa, os alunos teriam que fazer a medição de ângulos a partir de três pontos distintos, determinados pelo professor, com o auxílio de um teodolito e utilizar $\sqrt{3} \approx 1,73$ em seus cálculos.

Observe os resultados obtidos com as três medições descritas a seguir:

- a primeira medição foi feita a uma distância de 410 m do prédio, e o topo do prédio foi observado segundo um ângulo de 15° ;
- a segunda medição foi feita depois de se aproximar do prédio, e o ângulo observado foi o dobro do ângulo da primeira medição;
- a terceira medição foi feita depois de se aproximar 84 m do prédio, a partir do ponto da segunda medição, e o ângulo observado foi o triplo do ângulo da primeira medição.



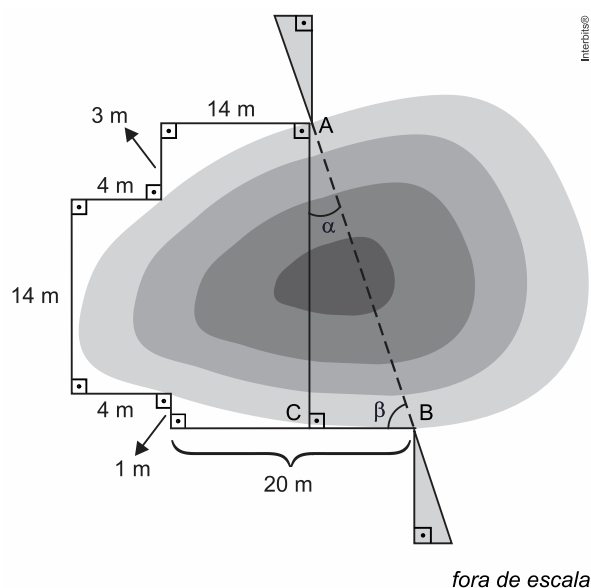
Disponível em: <<<https://fatosfotoseregistros.files.wordpress.com/2016/06/central2015.jpg?w=640>>>. Acesso em: 20 jun 2018.



A partir desses dados, calcule o valor aproximado da altura do prédio da Central do Brasil.

- a) 34 m b) 48 m c) 79 m d) 115 m e) 121 m

12. (Famerp 2019) Duas equipes de escavação vão perfurar um túnel \overline{AB} em uma montanha, sendo que uma delas partirá de A e a outra de B, a fim de se encontrarem. Para cavar nas direções corretas os engenheiros precisam determinar as medidas dos ângulos α e β , indicados na figura, que essa direção forma com as retas perpendiculares \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente.



Dados:

| | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-----|-----|
| x | 63,4° | 68,2° | 71,6° | 74° | 76° |
| tgx | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |

De acordo com o projeto e com os dados fornecidos, α e β são, respectivamente, iguais a

- a) 18,4° e 71,6°. b) 21,8° e 68,2°. c) 14° e 76°. d) 26,6° e 63,4°. e) 16° e 74°.

13. (G1 - ifpe 2019)

Cama com Escorregador de Madeira Maciça na Cor Castanho Exclusivo.



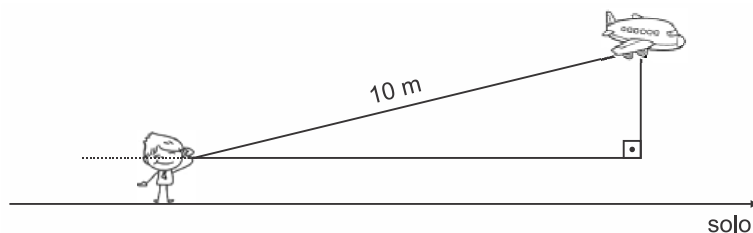
Disponível em: <<https://www.megamobilia.com.br/cama-com-escorregador-madeira-macica-na-cor-castanho-exclusivo-p5242/>>. Acesso em: 10 maio 2019.

A imagem mostra uma cama com escorregador acoplado. Sabendo que o escorregador tem 1,10 metros de altura e que sua inclinação, em relação ao plano horizontal, é de 32°, o comprimento desse escorregador (parte por onde se escorrega), em metros, é, aproximadamente,

Dados: $\sin 32^\circ = 0,53$; $\cos 32^\circ = 0,85$ e $\tan 32^\circ = 0,62$.

- a) 0,935. b) 1,294. c) 1,774. d) 0,583. e) 2,075.

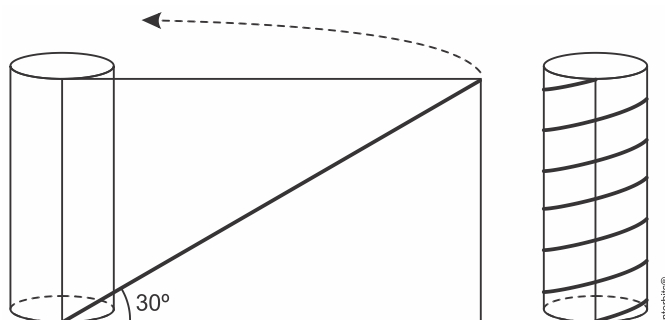
14. (G1 - ifpe 2019) Analise a figura a seguir e responda o que é solicitado.



Um avião está voando paralelamente ao solo conforme demonstrado na figura. Marcelinho, cuja distância dos olhos até o solo é de 1,5 m, avista o avião com um ângulo de visão de 30° . Nesse momento, a distância do avião ao solo é igual a

- a) $6,5\sqrt{3}$ m. b) 5 m. c) $5\sqrt{3}$. d) 6,5 m. e) 11,5 m.

15. (Enem 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.

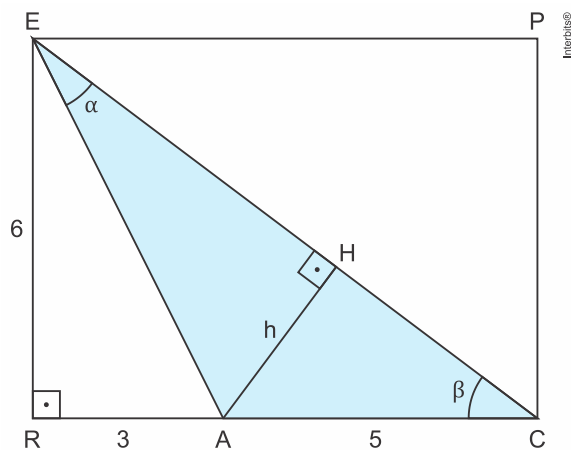


O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- a) $36\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) 36 e) 72

Gabarito – Parte 2

Resposta da questão 1: [A]



No triângulo EPC, temos:

$$EC^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow EC = 10$$

Calculando a área do triângulo AEC, obtemos: $\frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{10 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 3$

No triângulo ERA, temos: $AE^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow AE = 3\sqrt{5}$

$\triangle EHA \cong \triangle ERA$ (caso H.C.) $\Rightarrow \hat{AER} = \alpha$.

No triângulo ERA, obtemos:

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} + \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Resposta da questão 2: [A]

A medida da altura do triângulo ABE é $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ unidades de comprimento. Ademais, como F é ponto médio de AB, temos $\overline{BF} = \frac{6}{2} = 3$ unidades de comprimento. Portanto, segue que $\overline{CF} = 10 + 3 = 13$ unidades de comprimento.

Finalmente, do triângulo CDF, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} \overline{DF}^2 &= \overline{CD}^2 + \overline{CF}^2 \Rightarrow \overline{DF}^2 = (3\sqrt{3})^2 + 13^2 \\ &\Rightarrow \overline{DF} = 14 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Resposta da questão 3: [C]

$$\hat{ADC} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow AD = AC.$$

$$\hat{CAB} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$\triangle ADE \cong \triangle CAB$ (caso A.L.A.)

Logo, $AE = BC$.

No $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 1.$$

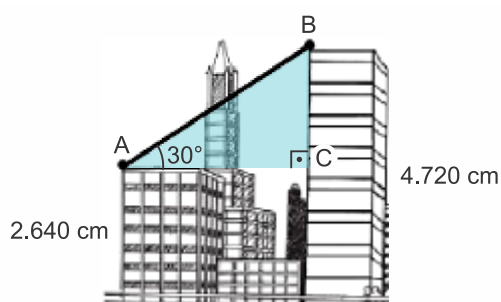
Portanto,

$$CE = AC + AE$$

$$CE = AC + BC$$

$$CE = 1 + \sqrt{3}$$

Resposta da questão 4: [C]



No triângulo ABC, destacado na figura, temos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{4720 - 2640}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2080}{AB} \Rightarrow AB = 4160 \text{ cm}$$

Resposta da questão 5: [C]

Calculando:

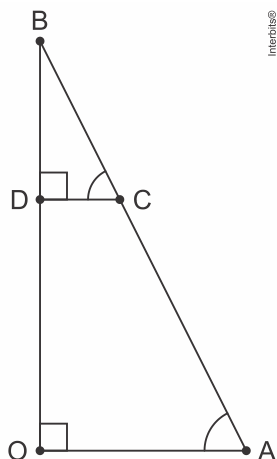
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{x}$$

$$x = \frac{10}{0,75}$$

$$\therefore x \cong 13 \text{ m}$$

Resposta da questão 6: [C]

Considere a figura.



Desde que os ângulos BAO e BCD são correspondentes, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle BCD &= \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow y = 3\sqrt{3} \text{ m.} \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle BAO &= \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{3\sqrt{3} + 30}{x} \\ &\Leftrightarrow x = 3 + \frac{30}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow x = 3 + 10\sqrt{3} \\ &\Rightarrow x \cong 20,3 \text{ m.} \end{aligned}$$

É imediato que $x \in]20, 21[$.

Resposta da questão 7: [A]

Desde que o seno do ângulo de impacto, α , é dado pela razão entre a largura e o comprimento da gota de sangue, temos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6.$$

Portanto, da tabela, segue que $\alpha \cong 37^\circ$.

Resposta da questão 8: [B]

Sendo H a altura da torre, temos:



nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®



nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®

nterbits®

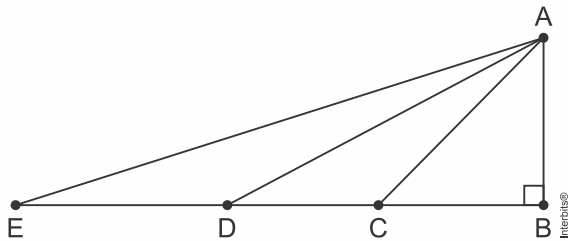
nterbits®

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{h}{x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{h+7}{h} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h+7}{h} \Rightarrow h\sqrt{3} - h = 7 \Rightarrow 1,7h - h = 7 \Rightarrow h = \frac{7}{0,7} = 10$$

Resposta da questão 11: [D]

Considere a figura.



Sabendo que $\angle AEB = 15^{\circ}$, $\angle ADB = 30^{\circ}$, $\angle ACB = 45^{\circ}$ e $\overline{CD} = 84$ m, podemos concluir que o triângulo ABC é isósceles. Logo, temos $\overline{AB} = \overline{BC}$ e, portanto, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle ADB &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} + 84} \\ &\Rightarrow 1,73(\overline{AB} + 84) = 3\overline{AB} \\ &\Rightarrow \overline{AB} \cong 114,43 \text{ m.} \end{aligned}$$

Resposta da questão 12: [A]

Calculando:

$$\overline{BC} = 20 - 14 = 6 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 3 + 14 + 1 = 18 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow \beta = 71,6^{\circ}$$

$$\alpha + \beta = 90^{\circ} \Rightarrow \alpha + 71,6^{\circ} = 90^{\circ} \Rightarrow \alpha = 18,4^{\circ}$$

Resposta da questão 13: [E]

Calculando:

x = comprimento do escorregador

$$\operatorname{sen} 32^{\circ} = \frac{1,10}{x} \Rightarrow 0,53x = 1,10 \Rightarrow x = 2,075 \text{ m}$$

Resposta da questão 14: [D]

Calculando:

$$\text{altitude avião} = x + 1,5$$

$$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$$

$$\text{altitude avião} = 5 + 1,5 = 6,5 \text{ m}$$

Resposta da questão 15: [B]

Seja h a altura do cilindro.

Na figura é possível perceber que foram dadas seis voltas em torno do cilindro. Logo o cateto adjacente ao

ângulo de 30° mede $6 \cdot 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 72$ cm e, portanto, temos $\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{h}{72} \Leftrightarrow h = 24\sqrt{3}$ cm.