



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
**«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ по лабораторной работе № 2
«Численное дифф. таб. заданной функции с помощью
мн-на Лагранжа»
Вариант № 10

Выполнил(а): студент гр. Б9122-02.03.01 сцт
Кузнецов Е. Д.

Проверил: преподаватель
Павленко Е. Р.

Владивосток

2024

Цели работы:

1. Реализовать формулу дифференцирования с учётом равномерной сетки для порядка первой производной;
2. Получить значения $\min R$ и $\max R$ для остаточного члена R ;
3. Проверить выполнение неравенства $\min R < R(x_m) < \max(R)$ где x_m – заданный узел;
4. Сделать вывод по проделанной работе.

Входные данные:

1. Функция: $y = x^2 - \cos(\pi x)$
2. Отрезок: $[0,1 ; 0,6]$
3. $n = 5$; $k = 1$; $m = 0$

Ход работы:

1. Вывод первой производной по методу Лагранжа

Необходимо вычислить первую производную из указанной в методичке таблицы:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j=0; j \neq i}^n (x - x_j)$$
$$L'_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \frac{d}{dx} \prod_{j=0; j \neq i}^n (x - x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \left(\sum_{j=0; j \neq i}^n \prod_{j_1=0; j_1 \neq j \neq i}^n (x - x_{j_1}) \right)$$
$$L'_n(x_m) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{h} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{i - j} \cdot \left(\sum_{j=0}^n \prod_{\substack{j_1=0 \\ j_1 \neq j \neq i}}^n (m - j) \right)$$

2. Инициализация входных данных:

Нам дана функция $y = x^2 - \cos(\pi x)$ и отрезок $[0.1 ; 0.6]$:

```
x = sy.symbols('x')
k = 1
m = 0
n = 5
a = 0.1
b = 0.6
step = (b - a) / 3

points = values(a, b, step)
print(points)

L = lagrange_polynomial(points, x)
```

```
def func(x):
    return x ** 2 - sy.cos(sy.pi * x)
```

3. Реализация основного алгоритма:

Создание таблицы значений функции

```
def values(a, b, step):
    table = []
    x = a
    while x <= b:
        table.append((x, func(x)))
        x += step
    return table
```

Эта функция создаёт таблицу значений функции на указанном интервале. Результатом её выполнения является список кортежей вида: (x, f(x)) (где x – значение аргумента, а f(x) – значение функции соответственно).

Вычисление многочлена Лагранжа

```
def lagrange_polynomial(points, x):
    l = 0
    for i, (x_i, y_i) in enumerate(points):
        l_i = 1
        for j, (x_j, _) in enumerate(points):
            if i != j:
                l_i *= (x - x_j) / (x_i - x_j)
        l += y_i * l_i
    return l
```

Эта функция вычисляет многочлен Лагранжа, для некоторого списка точек. На вход принимается список точек и аргумент **x**, для которого и необходимо вычислить значение многочлена.

Взятие n-ой производной

```
def take_diff(func, x, n):
    new_func = func
    for _ in range(n):
        new_func = sy.diff(new_func, x)
    return new_func
```

Эта функция вычисляет n-ую производную заданной функции по некоторой переменной (**x**). На вход подаётся сама функция, переменная, по которой вычисляется производная, а также степень производной.

Вычисление множителя omega

```
def omega(a, b, step, x):
    res = 1
    while round(a, 2) <= b:
        res *= (x - a)
        a += step
    return res
```

Эта функция вычисляет множитель для раздельной разности, используемый при вычислении многочлена Лагранжа для определённых точек.

Основная функция main()

```
points = values(a, b, step)
print(points)

L = lagrange_polynomial(points, x)

print(f"Многочлен Лагранжа: {L}")

L_diff = sy.diff(L, x)

f = x ** 2 - sy.cos(sy.pi * x)

d = take_diff(f, x, n)
df = take_diff(f, x, m)
r_1 = d.subs(x, 1.5) - L_diff.subs(x, 1.5)
r_min = (df.subs(x, a) / sy.factorial(4)) * omega(a, b, step, x)

r_max = (df.subs(x, b) / sy.factorial(4)) * omega(a, b, step, x)

print(f"Производная многочлена Лагранжа: {L_diff}")

print(L.subs(x, 1.5))

print(func(1.5))
print('-----')
print(L_diff.subs(x, 1.5))
print(d.subs(x, 1.5))
print('-----')
print(r_1)
print(r_min.subs(x, a))
print(r_max.subs(x, b))
```

В этой функции происходит организация последовательности вычислений, а также анализ полученных в их результате вычислений.

4. Вывод

По результатам выполненной лабораторной работы, можно сделать следующие выводы:

1. Была реализована программа для дифференцирования таблично заданной функции при помощи многочлена Лагранжа.
2. Программа вычисляет многочлен Лагранжа, его производную, а также погрешности для заданных значений.
3. В конечном итоге программа выводит многочлен Лагранжа, его производную, значения многочлена и производной в указанных точках, а также оценки погрешностей.
4. Полученные данные позволяют оценить аппроксимацию дифференцирования таблично заданной функции при помощи многочлена Лагранжа.

```
[(0.1, 0.01 - cos(0.1*pi)), (0.2666666666666667, 0.07111111111111111 - cos(0.2666666666666667*pi)), (0.43333333333333335, 0.18777777777777777 - cos(0.43333333333333335*pi)), (0.6, 0.3 - cos(0.6*pi)), (0.7666666666666667, 0.4988888888888889 - cos(0.7666666666666667*pi)), (0.9333333333333333, 0.7011111111111111 - cos(0.9333333333333333*pi)), (1.0, 1.0 - cos(1.0*pi))]
Многочлен Лагранжа: (0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.3 - 3.0*x)*(1.0 - 0.0*x) + (0.07111111111111111 - cos(0.2666666666666667*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.3 - 3.0*x)*(1.0 - 0.0*x) + (0.18777777777777777 - cos(0.43333333333333335*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) + (0.3 - cos(0.6*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) + (0.4988888888888889 - cos(0.7666666666666667*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.0 - 0.0*x)*(1.3 - 3.0*x) + (0.7011111111111111 - cos(0.9333333333333333*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.3 - 3.0*x) + (1.0 - cos(1.0*pi))*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.3 - 3.0*x)
Производная многочлена Лагранжа: -6.0*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.3 - 3.0*x) - 3.0*(0.01 - cos(0.1*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) - 3.0*(0.07111111111111111 - cos(0.2666666666666667*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) - 3.0*(0.18777777777777777 - cos(0.43333333333333335*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) - 3.0*(0.3 - cos(0.6*pi))*(1.2 - 2.0*x)*(1.0 - 0.0*x) - 3.0*(0.4988888888888889 - cos(0.7666666666666667*pi))*(1.0 - 0.0*x)*(1.3 - 3.0*x) - 3.0*(0.7011111111111111 - cos(0.9333333333333333*pi))*(1.0 - 0.0*x)*(1.3 - 3.0*x) - 3.0*(1.0 - cos(1.0*pi))*(1.0 - 0.0*x)*(1.3 - 3.0*x)
Значения дифференциала полинома Лагранжа и дифференциала функции соответственно:
-----
-18.0*cos(0.2666666666666667*pi) + 0.2 - 2.0*cos(0.6*pi) + 9.0*cos(0.4333333333333333*pi) + 11.0*cos(0.1*pi)
pi**5*sin(0.1*pi)
-----
Значение остаточного члена, верхняя и нижняя оценки:
-----
-11.0*cos(0.1*pi) - 9.0*cos(0.4333333333333333*pi) + 2.0*cos(0.6*pi) - 0.2 + 18.0*cos(0.2666666666666667*pi) + pi**5*sin(0.1*pi)
(1.388888888888889e-5 - cos(0.1*pi)/720)*(x - 0.6)*(x - 0.4333333333333333)*(x - 0.2666666666666667)*(x - 0.1)
0
(0.0005 - cos(0.6*pi)/720)*(x - 0.6)*(x - 0.4333333333333333)*(x - 0.2666666666666667)*(x - 0.1)
0
```