

Lista 1 - Inteligência Artificial Avançada INF05004

Gustavo Prolla Lacroix
gustavo.lacroix@ufrgs.br

Henrique Lorentz Trein
henrique.trein@ufrgs.br

Abril 2025

1 Introdução

Neste trabalho, foram implementados os seguintes algoritmos de busca para o problema do 8-puzzle: BFS, IDFS, GBFS, A* e IDA*. Além disso, os algoritmos A* e IDA* também foram implementados para o problema do 15-puzzle. Após a execução de um conjunto teste de estados iniciais, foram coletadas e analisadas estatísticas relativas à execução de cada um dos algoritmos.

2 Implementação

2.1 BFS, IDFS e GBFS

Para esses algoritmos, cada estado do problema foi representado pelo tipo `vector<int>`. Essa escolha se deve pela eficiência em comparações e cópias, flexibilidade e alta integrabilidade com outros componentes da STL (Standard Template Library) que `vector<>` possui. Além disso, todos os algoritmos retornam um estrutura do tipo `pair<vector<Action>, SearchStatistics>` que contém respectivamente, a sequência de ações - RIGHT, LEFT, UP, DOWN - que são necessárias para levar o estado inicial ao estado final do quebra-cabeça e uma estrutura que mantém estatísticas relativas à execução dos algoritmos.

2.2 A* e IDA*

Para melhorar o desempenho, foram realizadas algumas otimizações:

Representação de Estados. O grid do N-puzzle foi representado por um inteiro de 64 bits. Cada grupo de 4 bits representa o valor de um tile em uma posição específica do tabuleiro, começando pelos bits menos significativos. Por exemplo, os primeiros 4 bits indicam qual tile está na posição zero, os próximos 4, na posição um, e assim por diante. O estado objetivo do 15-puzzle, por exemplo, pode ser representado pelo número 0xFEDCBA9876543210. Operações bitwise são empregadas para realizar trocas de posições entre os tiles.

Fila de Prioridades. A fila de prioridades foi implementada como uma *bucket queue*, com valor máximo de prioridade igual a 256. Cada bucket é, por sua vez, também uma *bucket queue*, utilizada para desempatar nós com o mesmo valor de f de acordo com o valor de h . O valor máximo de prioridade nos sub-buckets foi definido como 90, que corresponde ao maior valor possível da heurística no 15-puzzle (15 tiles com distância de Manhattan máxima igual a 6, ou seja, $15 \times 6 = 90$). Para realizar um terceiro nível de desempate utilizando LIFO, os nós são sempre inseridos e removidos do final de cada bucket, que é implementado como um `vector`.

Heurística. No caso do 15-puzzle, existem $15 \times 16 = 240$ combinações possíveis entre tiles e posições. Os valores da heurística foram pré-computados e armazenados em uma tabela de consulta

Alocação de Memória. A função responsável por gerar os sucessores de um estado recebe como parâmetro uma referência para um array fixo de 4 posições, alocado uma única vez no início da execução. Essa abordagem é válida apenas para o algoritmo A*, uma vez que o IDA* requer realocação do buffer a cada chamada recursiva de `recursive_search`. De forma geral, buscou-se minimizar as alocações dinâmicas na *heap*, que ocorrem apenas quando inevitáveis, geralmente associadas ao uso da STL.

3 Resultados

Os experimentos foram realizados em um processador AMD Ryzen 7 5800G, operando a 3.8 GHz, com 16 GB de memória DDR4. O código-fonte foi compilado utilizando a flag de otimização `-O3`. Cada instância foi executada individualmente, sem paralelismo, utilizando `ulimit` para limitar a memória e o tempo.

Para cada instância foram coletadas as seguintes estatísticas:

- n : número de nós expandidos
- c : custo da solução encontrada
- t : tempo de execução (em segundos)
- \bar{h} : valor médio da função heurística ao longo da busca
- h_0 : valor da função heurística no estado inicial

A Tabela 1 apresenta a média dessas estatísticas, calculada sobre todas as instâncias resolvidas por cada algoritmo. No caso do algoritmo A^* aplicado ao 15-puzzle, apenas 92 instâncias foram solucionadas dentro dos limites de tempo e memória definidos pela especificação. Assim, os valores apresentados para esse caso correspondem à média computada apenas sobre essas 92 execuções bem-sucedidas.

Table 1: Média por Algoritmo

Algoritmo	n	c	t	\bar{h}	h_0
GBFS	392.42	140.52	0.0002945	6.8930464	13.88
A^* (8-puzzle)	895.00	22.16	0.0001318	10.0277522	13.88
IDA*	2373.03	22.16	0.0001137	10.4328463	13.88
BFS	81459.54	22.16	0.0599657	0.0000000	13.88
IDFS	2578290.56	22.16	0.5274080	0.0000000	13.88
A^* (15-puzzle)	6431258.84	52.33	2.9922291	25.6868022	36.85

Os resultados completos encontram-se nas páginas seguintes.

4 Conclusão

Baseando-se nos resultados médios obtidos sobre as instâncias de teste, observa-se comportamentos típicos de cada algoritmo. GBFS demonstrou-se subótimo, tendo comprimento de solução médio cerca de 6 vezes maior que os demais para o problema do 8-puzzle. IDFS apresentou um elevado número de nodos expandidos médio devido, principalmente, ao fato de que em cada iteração existe uma re-expansão dos nodos, pois o algoritmo reinicia a busca desde a raiz a cada incremento do limite de profundidade, resultando em redundância no processo de exploração. IDA* obteve um maior número de nodos expandidos do que A^* pelo mesmo motivo de IDFS. Além disso, percebe-se que os algoritmos que não utilizam a heurística na busca, apresentaram um número maior de nodos expandidos e tempo de execução médios.

Table 2: A* 8-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	835	22	0.000160569	9.0824	12	51	221	20	0.000042992	9.7850	12
2	1024	23	0.000193723	10.0667	15	52	2849	27	0.000354501	11.0714	15
3	72	17	0.000029802	9.1508	13	53	179	19	0.000038828	8.8279	11
4	953	25	0.000166193	11.6783	17	54	1075	26	0.000146408	11.5799	16
5	91	16	0.000033205	6.7256	10	55	177	18	0.000048556	8.5812	12
6	652	22	0.000124562	9.3718	12	56	752	24	0.000111012	10.0917	16
7	350	22	0.000068750	10.4395	14	57	182	18	0.000038718	8.1865	8
8	612	21	0.000100624	9.8114	11	58	1355	24	0.000187818	10.0853	12
9	232	17	0.000043802	7.8625	7	59	205	23	0.000042171	11.0603	17
10	177	21	0.000041901	10.8271	13	60	712	24	0.000106488	10.5858	16
11	511	23	0.000079659	9.9765	15	61	1421	27	0.000183145	12.0228	19
12	1037	23	0.000141725	10.3864	11	62	2186	25	0.000275223	9.9161	13
13	197	19	0.000041831	8.3894	13	63	168	21	0.000052378	10.6818	15
14	697	22	0.000105238	9.2810	14	64	39	22	0.000019085	12.0147	18
15	239	19	0.000045544	7.9057	13	65	4038	28	0.000487449	11.1541	14
16	1622	22	0.000219251	9.7259	10	66	90	20	0.000025529	9.6169	16
17	315	20	0.000064287	8.8734	10	67	2905	27	0.000363198	10.8626	17
18	30	21	0.000017623	10.3269	19	68	2301	27	0.000278234	11.8772	15
19	373	22	0.000064707	10.5618	18	69	698	25	0.000105117	10.8711	19
20	550	22	0.000091738	10.5530	16	70	2190	24	0.000278105	9.4853	10
21	34	16	0.000022356	8.2295	14	71	936	24	0.000138201	11.8384	16
22	118	16	0.000030252	8.4755	10	72	238	22	0.000051097	9.9263	16
23	1449	25	0.000209484	10.8645	15	73	3038	27	0.000378458	10.9570	15
24	873	22	0.000124782	10.0839	14	74	1632	26	0.000281417	10.8184	18
25	808	23	0.000121380	9.7844	13	75	4306	25	0.000534214	10.3003	11
26	1167	25	0.000168184	10.5056	15	76	739	26	0.000113604	11.9036	20
27	308	21	0.000054481	9.4248	15	77	382	20	0.000066789	9.3643	14
28	41	13	0.000019744	6.0800	7	78	2084	26	0.000257399	10.7022	16
29	533	23	0.000103976	11.0371	13	79	99	16	0.000028811	7.5284	10
30	346	24	0.000075305	11.5000	16	80	2764	27	0.000344584	11.4317	17
31	929	24	0.000133599	10.2885	14	81	428	19	0.000074425	8.6607	11
32	117	16	0.000028140	8.6995	12	82	715	25	0.000097822	13.0852	21
33	26	18	0.000020936	9.0208	16	83	68	15	0.000029202	7.3525	11
34	666	23	0.000129155	10.1360	13	84	34	17	0.000018314	9.2742	13
35	1734	26	0.000219592	10.7851	14	85	121	15	0.000031323	7.3780	7
36	1824	27	0.000226307	12.1416	17	86	993	25	0.000169565	10.7449	17
37	231	22	0.000044402	11.4182	14	87	163	17	0.000046384	8.9255	11
38	1807	26	0.000227207	10.7077	14	88	2389	27	0.000398874	11.7120	17
39	655	22	0.000102495	9.4555	12	89	369	20	0.000072403	8.3381	8
40	2298	25	0.000283509	10.2244	13	90	356	20	0.000080209	8.5930	12
41	76	14	0.000023837	7.4519	8	91	1461	27	0.000190840	11.1426	21
42	786	25	0.000110031	11.2696	19	92	854	26	0.000119958	11.4814	18
43	609	21	0.000095881	9.2280	11	93	730	22	0.000111262	9.6002	12
44	2231	26	0.000301191	10.6504	16	94	257	22	0.000060565	11.3218	14
45	1757	24	0.000224676	9.8514	14	95	414	22	0.000069811	9.8525	12
46	299	24	0.000054540	11.5030	20	96	181	19	0.000036647	9.8964	17
47	41	18	0.000024208	9.9595	14	97	336	20	0.000079288	9.1090	8
48	543	23	0.000093969	10.6895	15	98	707	21	0.000123631	8.5776	9
49	438	21	0.000073885	10.0621	11	99	1467	24	0.000243479	11.0388	14
50	2864	28	0.000343272	12.2559	16	100	1319	25	0.000216870	10.7828	13

Table 3: BFS 8-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	70436	22	0.0534758	0	12	51	41346	20	0.0265770	0	12
2	98412	23	0.0722521	0	15	52	163708	27	0.1371250	0	15
3	11718	17	0.0073330	0	13	53	25948	19	0.0159703	0	11
4	134664	25	0.0980855	0	17	54	146431	26	0.1061440	0	16
5	5209	16	0.0034136	0	10	55	16644	18	0.0106437	0	12
6	59830	22	0.0372831	0	12	56	113398	24	0.0826483	0	16
7	71614	22	0.0517591	0	14	57	12763	18	0.0076859	0	8
8	42704	21	0.0265050	0	11	58	102477	24	0.0742962	0	12
9	10486	17	0.0063824	0	7	59	91593	23	0.0667825	0	17
10	55230	21	0.0374425	0	13	60	116022	24	0.0856068	0	16
11	86288	23	0.0593771	0	15	61	170975	27	0.1446790	0	19
12	87902	23	0.0609496	0	11	62	132375	25	0.0959991	0	13
13	24271	19	0.0147506	0	13	63	43631	21	0.0261734	0	15
14	67445	22	0.0466530	0	14	64	61343	22	0.0381625	0	18
15	21294	19	0.0128565	0	13	65	173107	28	0.1435770	0	14
16	67976	22	0.0463218	0	10	66	37323	20	0.0245271	0	16
17	30932	20	0.0207187	0	10	67	166627	27	0.1380080	0	17
18	51926	21	0.0330445	0	19	68	165544	27	0.1371850	0	15
19	74010	22	0.0525139	0	18	69	136365	25	0.1006010	0	19
20	57200	22	0.0360003	0	16	70	101428	24	0.0727068	0	10
21	6175	16	0.0037260	0	14	71	99337	24	0.0725580	0	16
22	4890	16	0.0029442	0	10	72	69657	22	0.0503989	0	16
23	128087	25	0.0913006	0	15	73	169153	27	0.1412390	0	15
24	59140	22	0.0374789	0	14	74	146614	26	0.1082120	0	18
25	86044	23	0.0611201	0	13	75	136769	25	0.1007660	0	11
26	124428	25	0.0908994	0	15	76	144168	26	0.1065750	0	20
27	55828	21	0.0355874	0	15	77	32178	20	0.0207517	0	14
28	1904	13	0.0011372	0	7	78	149505	26	0.1097410	0	16
29	89286	23	0.0624740	0	13	79	6810	16	0.0045881	0	10
30	96167	24	0.0662606	0	16	80	165286	27	0.1388660	0	17
31	108997	24	0.0812229	0	14	81	20088	19	0.0119571	0	11
32	6800	16	0.0047234	0	12	82	134133	25	0.0995257	0	21
33	12237	18	0.0073752	0	16	83	3471	15	0.0020873	0	11
34	91221	23	0.0637168	0	13	84	9452	17	0.0057232	0	13
35	146642	26	0.1105850	0	14	85	4001	15	0.0023974	0	7
36	166169	27	0.1388970	0	17	86	134421	25	0.0978876	0	17
37	61999	22	0.0389935	0	14	87	10951	17	0.0070417	0	11
38	149038	26	0.1115080	0	14	88	165164	27	0.1369770	0	17
39	66394	22	0.0472268	0	12	89	32194	20	0.0203367	0	8
40	134964	25	0.0997731	0	13	90	37083	20	0.0226295	0	12
41	3528	14	0.0023199	0	8	91	163614	27	0.1360580	0	21
42	141058	25	0.1047900	0	19	92	145000	26	0.1059720	0	18
43	51334	21	0.0322661	0	11	93	68791	22	0.0489374	0	12
44	147235	26	0.1098470	0	16	94	69185	22	0.0496696	0	14
45	96629	24	0.0672013	0	14	95	66051	22	0.0473850	0	12
46	117820	24	0.0857508	0	20	96	25603	19	0.0160558	0	17
47	12721	18	0.0076291	0	14	97	30499	20	0.0195606	0	8
48	82402	23	0.0573992	0	15	98	45472	21	0.0278116	0	9
49	55950	21	0.0366284	0	11	99	106698	24	0.0750258	0	14
50	170358	28	0.1409110	0	16	100	130566	25	0.0959259	0	13

Table 4: IDA* 8-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	2631	22	0.000137969	9.7780	12	51	730	20	0.000050120	9.9720	12
2	3276	23	0.000163920	10.5983	15	52	9355	27	0.000471251	10.6355	15
3	145	17	0.000009777	9.9878	13	53	661	19	0.000038050	8.7866	11
4	2720	25	0.000141161	11.7814	17	54	2195	26	0.000119524	12.0918	16
5	165	16	0.000014091	7.1378	10	55	257	18	0.000016503	9.3063	12
6	1734	22	0.000090921	9.2455	12	56	2440	24	0.000101350	10.6690	16
7	1741	22	0.000087910	10.4373	14	57	339	18	0.000021266	8.4845	8
8	439	21	0.000024219	10.7500	11	58	2316	24	0.000124308	10.8761	12
9	464	17	0.000030554	7.5800	7	59	272	23	0.000012360	13.2102	17
10	611	21	0.000029514	11.5015	13	60	3401	24	0.000178320	10.8299	16
11	724	23	0.000042854	11.7241	15	61	9544	27	0.000377917	11.5019	19
12	1659	23	0.000069575	10.9094	11	62	8845	25	0.000386895	9.6696	13
13	372	19	0.000022758	9.0751	13	63	360	21	0.000022518	10.3719	15
14	1420	22	0.000060698	9.6594	14	64	103	22	0.000008736	13.3988	18
15	465	19	0.000026541	8.2123	13	65	11359	28	0.000553186	11.5511	14
16	2130	22	0.000090371	9.6350	10	66	406	20	0.000025510	9.6868	16
17	794	20	0.000046217	9.2292	10	67	8302	27	0.000407991	11.2258	17
18	71	21	0.000005765	12.9730	19	68	6762	27	0.000342530	11.8587	15
19	456	22	0.000022678	11.5486	18	69	2421	25	0.000120255	11.3610	19
20	368	22	0.000024209	10.9112	16	70	3944	24	0.000206233	9.6237	10
21	27	16	0.000002862	9.6364	14	71	899	24	0.000038591	11.5169	16
22	76	16	0.000012240	8.5635	10	72	868	22	0.000056295	10.5045	16
23	2805	25	0.000115391	11.1287	15	73	14476	27	0.000573832	10.9029	15
24	805	22	0.000045616	10.2120	14	74	3141	26	0.000141142	11.7239	18
25	1666	23	0.000087609	10.2856	13	75	8979	25	0.000406220	9.9150	11
26	2470	25	0.000107455	10.3454	15	76	1631	26	0.000093414	11.6023	20
27	1294	21	0.000055093	9.6841	15	77	413	20	0.000026541	9.5066	14
28	100	13	0.000008087	6.9282	7	78	8936	26	0.000353179	10.4430	16
29	1609	23	0.000086368	11.2620	13	79	166	16	0.000011569	8.8103	10
30	225	24	0.000015342	14.0028	16	80	7986	27	0.000393960	11.3541	17
31	1820	24	0.000076100	11.5230	14	81	490	19	0.000025300	8.2914	11
32	129	16	0.000009147	9.4817	12	82	324	25	0.000020296	14.1706	21
33	37	18	0.000002792	10.2459	16	83	56	15	0.000003763	8.0109	11
34	1500	23	0.000085838	10.9300	13	84	83	17	0.000006215	9.7536	13
35	4075	26	0.000205863	11.3660	14	85	186	15	0.000012800	7.2579	7
36	5873	27	0.000296814	12.1135	17	86	2713	25	0.000137538	11.4755	17
37	487	22	0.000037880	11.7152	14	87	206	17	0.000010749	9.2606	11
38	5296	26	0.000263368	11.0962	14	88	5691	27	0.000227219	11.7959	17
39	2349	22	0.000118003	9.7709	12	89	1408	20	0.000062790	8.1185	8
40	5296	25	0.000219883	10.8577	13	90	573	20	0.000033857	9.4330	12
41	125	14	0.000007486	7.9217	8	91	2764	27	0.000141962	11.3301	21
42	3436	25	0.000173667	11.4462	19	92	2791	26	0.000142903	10.9761	18
43	1193	21	0.000068714	9.6713	11	93	2006	22	0.000085297	9.7159	12
44	9239	26	0.000459342	10.2447	16	94	1238	22	0.000069064	10.9632	14
45	2256	24	0.000131114	10.4347	14	95	1016	22	0.000045996	10.9764	12
46	626	24	0.000034818	13.1572	20	96	244	19	0.000013631	9.9358	17
47	92	18	0.000007236	10.1184	14	97	722	20	0.000033997	9.3964	8
48	1145	23	0.000054553	11.0429	15	98	2213	21	0.000123087	8.0913	9
49	1201	21	0.000053312	10.7251	11	99	2265	24	0.000119735	11.2776	14
50	5557	28	0.000241941	12.4014	16	100	3613	25	0.000144063	10.6761	13

Table 5: IDFS 8-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	809224	22	0.1759780	0	12	51	323493	20	0.0642610	0	12
2	1659716	23	0.3453150	0	15	52	9617303	27	1.9236000	0	15
3	56332	17	0.0108762	0	13	53	160297	19	0.0319715	0	11
4	3832745	25	0.7675630	0	17	54	5150682	26	1.0894100	0	16
5	20305	16	0.0039328	0	10	55	86884	18	0.0170972	0	12
6	572929	22	0.1144420	0	12	56	2296791	24	0.4643260	0	16
7	840836	22	0.1794030	0	14	57	60654	18	0.0115966	0	8
8	336804	21	0.0665971	0	11	58	1715624	24	0.3447140	0	12
9	48030	17	0.0092256	0	7	59	1336827	23	0.2681290	0	17
10	523656	21	0.1020080	0	13	60	2536222	24	0.5371380	0	16
11	1183127	23	0.2366830	0	15	61	15171649	27	3.2183000	0	19
12	1229083	23	0.2568600	0	11	62	3587527	25	0.7613760	0	13
13	144153	19	0.0281069	0	13	63	344582	21	0.0676747	0	15
14	726908	22	0.1447730	0	14	64	599226	22	0.1195250	0	18
15	119854	19	0.0244292	0	13	65	15073854	28	3.0337400	0	14
16	746437	22	0.1516960	0	10	66	277227	20	0.0564656	0	16
17	201422	20	0.0392099	0	10	67	10843669	27	2.2120900	0	17
18	463439	21	0.0901963	0	19	68	10295974	27	2.1277300	0	15
19	880730	22	0.1762630	0	18	69	4095213	25	0.8163080	0	19
20	529433	22	0.1038630	0	16	70	1665813	24	0.3358550	0	10
21	25389	16	0.0048761	0	14	71	1583030	24	0.3692060	0	16
22	18803	16	0.0035992	0	10	72	792904	22	0.1655860	0	16
23	3233556	25	0.6437760	0	15	73	12496979	27	2.5630600	0	15
24	559966	22	0.1156850	0	14	74	5225955	26	1.0454400	0	18
25	1161412	23	0.2399890	0	13	75	4088312	25	0.8137040	0	11
26	3012022	25	0.5945350	0	15	76	4873453	26	0.9771730	0	20
27	533665	21	0.1076550	0	15	77	214527	20	0.0402950	0	14
28	6472	13	0.0012557	0	7	78	5735592	26	1.1507600	0	16
29	1258485	23	0.2502900	0	13	79	28881	16	0.0057842	0	10
30	1506581	24	0.3047780	0	16	80	10128430	27	2.0283500	0	17
31	2082556	24	0.4225710	0	14	81	110829	19	0.0209620	0	11
32	28816	16	0.0058451	0	12	82	3745531	25	0.7787800	0	21
33	57963	18	0.0111644	0	16	83	12608	15	0.0024114	0	11
34	1339032	23	0.2679830	0	13	84	42323	17	0.0080990	0	13
35	5227219	26	1.1047300	0	14	85	15054	15	0.0028626	0	7
36	10582097	27	2.1212200	0	17	86	3814064	25	0.7758780	0	17
37	618550	22	0.1289920	0	14	87	51080	17	0.0099571	0	11
38	5647709	26	1.1795200	0	14	88	10083429	27	2.0537500	0	17
39	707091	22	0.1504940	0	12	89	216000	20	0.0423491	0	8
40	3906491	25	0.7911600	0	13	90	269408	20	0.0524975	0	12
41	13166	14	0.0025898	0	8	91	9608157	27	1.9612200	0	21
42	4826279	25	0.9954430	0	19	92	4963354	26	1.0615900	0	18
43	445186	21	0.0929464	0	11	93	761900	22	0.1586650	0	12
44	5301125	26	1.0735800	0	16	94	779904	22	0.1582530	0	14
45	1521264	24	0.3157610	0	14	95	713444	22	0.1489650	0	12
46	2550556	24	0.5080930	0	20	96	156601	19	0.0296262	0	17
47	60744	18	0.0120066	0	14	97	197513	20	0.0404689	0	8
48	1071876	23	0.2093740	0	15	98	365116	21	0.0750973	0	9
49	542261	21	0.1132670	0	11	99	1905883	24	0.3996370	0	14
50	13426501	28	2.7881200	0	16	100	3411288	25	0.7103400	0	13

Table 6: GBFS 8-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	579	156	0.000487421	7.0088	12	51	496	174	0.000402711	7.0791	12
2	437	187	0.000381005	6.8695	15	52	88	49	0.000062425	7.5390	15
3	430	189	0.000358880	6.6108	13	53	601	101	0.000398859	6.7899	11
4	466	207	0.000381195	6.9455	17	54	452	206	0.000325231	7.2790	16
5	16	16	0.000016864	5.5000	10	55	560	132	0.000468436	6.8639	12
6	407	152	0.000426016	6.5908	12	56	43	36	0.000041121	7.3333	16
7	422	168	0.000311187	6.6126	14	57	480	180	0.000323550	6.9467	8
8	96	27	0.000066847	8.0542	11	58	459	216	0.000308827	7.0283	12
9	576	87	0.000419494	6.7300	7	59	80	55	0.000070597	7.7589	17
10	634	119	0.000500524	7.0525	13	60	68	46	0.000060295	6.6281	16
11	90	57	0.000084571	6.8098	15	61	525	219	0.000420995	6.7965	19
12	560	141	0.000480270	6.9324	11	62	401	153	0.000272137	6.5975	13
13	83	47	0.000070938	5.8912	13	63	632	195	0.000427847	7.2229	15
14	502	146	0.000330852	6.7343	14	64	416	188	0.000314818	6.9552	18
15	66	39	0.000060145	6.1345	13	65	496	210	0.000369812	7.4789	14
16	501	146	0.000329882	6.6988	10	66	20	20	0.000020055	7.9167	16
17	81	44	0.000059495	6.5106	10	67	659	129	0.000532932	7.1188	17
18	46	37	0.000034429	7.8690	19	68	474	197	0.000321650	6.9558	15
19	386	160	0.000320570	6.8064	18	69	62	41	0.000053263	7.6339	19
20	429	190	0.000363881	6.8082	16	70	423	170	0.000281590	6.5622	10
21	540	132	0.000474508	6.7744	14	71	514	158	0.000341225	6.8330	16
22	453	166	0.000302965	6.6437	10	72	394	166	0.000345135	6.6250	16
23	464	181	0.000308647	6.8761	15	73	420	181	0.000362200	6.9126	15
24	651	198	0.000539484	7.2219	14	74	410	178	0.000274948	6.7062	18
25	406	189	0.000308267	6.6284	13	75	386	175	0.000262535	6.5146	11
26	423	187	0.000306906	6.8374	15	76	448	176	0.000349187	6.8775	20
27	453	203	0.000367061	6.8172	15	77	389	164	0.000261715	6.5355	14
28	17	15	0.000019925	5.3823	7	78	466	194	0.000314959	6.9041	16
29	405	165	0.000300344	6.6978	13	79	453	194	0.000311997	6.6162	10
30	542	140	0.000454603	6.9533	16	80	442	193	0.000331913	6.8365	17
31	135	38	0.000106086	8.6913	14	81	590	129	0.000388967	6.8288	11
32	67	34	0.000047002	7.9145	12	82	454	197	0.000307066	7.0087	21
33	452	194	0.000385095	6.7591	16	83	57	39	0.000052433	5.5755	11
34	432	195	0.000289492	6.8092	13	84	18	17	0.000016104	7.2571	13
35	521	162	0.000346257	6.9145	14	85	387	149	0.000299005	6.4359	7
36	111	79	0.000098515	7.8274	17	86	572	175	0.000466215	7.0804	17
37	590	98	0.000394038	6.8335	14	87	417	179	0.000295113	6.6449	11
38	549	148	0.000461485	6.8988	14	88	596	175	0.000403110	7.1029	17
39	447	184	0.000392187	6.7282	12	89	382	168	0.000264946	6.3888	8
40	460	211	0.000328561	6.9568	13	90	522	150	0.000354918	6.7427	12
41	394	140	0.000336834	6.4721	8	91	580	151	0.000396268	7.1136	21
42	65	45	0.000048693	7.7983	19	92	458	208	0.000309097	6.9100	18
43	510	155	0.000386236	6.7290	11	93	485	176	0.000379245	6.9894	12
44	525	222	0.000435268	6.7706	16	94	580	152	0.000432437	6.9893	14
45	533	130	0.000354138	6.8888	14	95	409	152	0.000368411	6.7172	12
46	416	184	0.000279029	6.9635	20	96	403	161	0.000274278	6.6490	17
47	19	18	0.000020045	7.4722	14	97	636	186	0.000422505	7.1338	8
48	428	181	0.000282010	6.7876	15	98	48	29	0.000044752	5.7159	9
49	552	149	0.000466326	6.8523	11	99	613	104	0.000409982	6.9605	14
50	461	198	0.000308317	7.3004	16	100	450	203	0.000302076	6.8438	13

Table 7: A* 15-puzzle

(a)						(b)					
	n	c	t	\bar{h}	h_0		n	c	t	\bar{h}	h_0
1	14028344	57	6.9085	27.1869	41	51	3031922	56	1.3036	28.0748	44
2	4415279	55	1.7961	23.3948	43	52	11641228	56	5.1820	26.8034	38
3	30003145	59	15.2723	27.7517	41	53	38607523	64	18.8301	30.4284	50
4	5253685	56	2.1155	26.6208	42	54	7221615	56	3.3583	27.8207	40
5	2021382	56	0.6978	28.1532	42	55	152123	41	0.0228	20.6961	29
6	969356	52	0.2767	27.4165	36	56	-	-	-	-	-
7	7170013	52	3.3431	23.3837	30	57	484048	50	0.0980	26.1174	36
8	2618503	50	0.9500	24.4245	32	58	506538	51	0.1074	25.5453	37
9	313211	46	0.0519	21.5037	32	59	-	-	-	-	-
10	17805045	59	8.4335	27.7350	43	60	-	-	-	-	-
11	3525006	57	1.4606	28.7505	43	61	508957	45	0.1048	21.7271	31
12	32334	45	0.0049	26.2362	35	62	1828847	57	0.6535	29.0846	43
13	831333	46	0.2402	19.5075	36	63	21862510	56	10.4821	25.5476	40
14	26088053	59	13.8412	28.4990	41	64	5622335	51	2.3482	23.6183	31
15	25792756	62	13.6192	31.4546	44	65	920623	47	0.2654	22.6228	31
16	909219	42	0.2641	18.6516	24	66	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	67	8430894	50	3.9053	23.9214	28
18	1267588	55	0.3988	27.2594	43	68	5471060	51	2.2815	25.1180	31
19	154092	46	0.0252	22.9871	36	69	4579005	53	1.9036	25.3428	37
20	1995813	52	0.7682	24.5730	36	70	8179227	52	3.7931	24.6644	30
21	5668025	54	2.3774	26.4034	34	71	557862	44	0.1197	20.6301	30
22	13338796	59	6.9696	28.2474	41	72	34437004	56	17.6643	25.3943	38
23	1398857	49	0.4555	24.2771	33	73	188717	49	0.0307	23.8731	37
24	4691710	54	1.9814	26.3122	34	74	1373939	56	0.4137	28.7716	46
25	6227205	52	3.0442	24.7003	32	75	3440513	48	1.4832	22.0602	30
26	20161235	58	9.4903	27.5853	40	76	7622602	57	3.5104	27.7297	41
27	11278428	53	5.0519	25.4592	33	77	2184110	54	0.7717	27.5980	34
28	909442	52	0.2548	27.8727	36	78	619299	53	0.1319	27.3807	41
29	3917549	54	1.6649	26.1191	38	79	68633	42	0.0102	21.7811	28
30	215990	47	0.0384	24.8402	35	80	3951356	57	1.6402	26.9136	43
31	192534	50	0.0352	28.1648	38	81	744209	53	0.2121	28.0517	39
32	17025056	59	8.1872	29.2737	43	82	-	-	-	-	-
33	18535767	60	8.7363	30.1101	42	83	1900358	49	0.6977	24.1278	31
34	2063117	52	0.7502	25.9825	36	84	10972804	55	4.8496	26.6590	37
35	4626661	55	1.8987	26.9748	39	85	158355	44	0.0230	20.8886	32
36	2309697	52	0.8397	25.7915	36	86	195222	45	0.0322	22.2905	35
37	20889986	58	9.7661	27.6360	40	87	4681483	52	1.9420	25.9620	34
38	827864	53	0.2236	28.7101	41	88	-	-	-	-	-
39	1118025	49	0.3282	24.2808	35	89	3559259	54	1.5579	26.4619	38
40	6540243	54	3.1365	26.3806	36	90	820923	50	0.2759	26.0792	36
41	5727374	54	2.3856	26.1219	36	91	18150875	57	8.6595	26.8734	41
42	48447	42	0.0077	23.3000	30	92	45112197	57	22.6756	25.8101	37
43	7332466	64	3.2912	33.0528	48	93	438960	46	0.0930	20.9652	34
44	2731989	50	1.0362	24.6075	32	94	276325	53	0.0447	27.7666	45
45	539196	51	0.1115	27.3161	39	95	751475	50	0.2137	25.0634	34
46	1430455	49	0.4388	22.9179	35	96	1263033	49	0.3799	22.9222	35
47	179689	47	0.0312	25.4753	35	97	191601	44	0.0320	21.2678	32
48	119535	49	0.0187	25.1685	39	98	9499694	54	4.2984	25.1273	34
49	-	-	-	-	-	99	5342754	57	2.1718	28.7625	39
50	4399444	53	1.8407	25.0994	39	100	4484857	54	1.8511	25.1702	38