

**Teoria dos Grafos e Análise Combinatória**  
**PROF. EDSON PRESTES**

**Trabalho de Grafos 2022/2**  
Henrique Lorentz Trein 00341853  
Pedro Koinaski de Paiva 00302515

**1. INTRODUÇÃO:**

Hollow Knight é um jogo indie de gênero metroidvania. No jogo, um cavaleiro sem nome explora um reino em ruínas habitado por insetos, desbloqueando habilidades novas que ajudam a explorar e livrar o reino de Hallownest de uma infecção causada por um deus esquecido. Hallownest consiste em várias áreas grandes e interconectadas, com temas únicos. Com sua jogabilidade não linear, Hollow Knight não força o jogador a seguir caminhos específicos, nem exige a exploração do mundo por completo. Uma das razões que motivaram a escolha desse jogo foi a complexidade e riqueza de detalhes do mapa, que representa passagens escondidas, abismos e outros relevos dinâmicos que só podem ser enfrentados (ou são enfrentados mais facilmente) se o jogador possuir certas habilidades aprendidas ao longo da história. Ao longo do desenvolvimento do projeto, percebemos que alguns conceitos da disciplina não seria bem cobertos apenas com o mapa do jogo. Por isso, decidimos criar também um grafo que representa um sistema do jogo totalmente diferente: o sistema de “Charms” (amuletos). Esses amuletos são itens que podem ser equipados simultaneamente pelo jogador em diversas combinações possíveis. Algumas dessas combinações produzem efeitos especiais que chamamos de combos.

**2. DESENVOLVIMENTO:**

**2.1.1 Conversão do mapa do jogo em um grafo**

O primeiro passo foi reconfigurar o mapa do jogo (imagem 1) de maneira que fosse mantida a lógica estrutural do jogo e evidenciando os relacionamentos entre zonas de “Hollow Knight” por meio de arestas. Posteriormente, o uso de cores tanto para as arestas quanto para os vértices foi essencial para o aperfeiçoamento do processo anterior, destacando peculiaridades da jogabilidade que serão abordadas em seguida. A transformação do mapa para um grafo foi feita a partir da relação direta entre áreas nomeadas no jogo para um vértice, já os caminhos, que não são nomeados, partiu do conhecimento dos integrantes sobre o videogame e também de arquivos e fóruns da comunidade de jogadores de “Hollow Knight”.

**2.1.2 Conversão do sistema de combos de “Charms” (amuletos) em um grafo**

Todos os amuletos foram representados por vértices e os amuletos que formam um combo entre si foram unidos por uma aresta. Alguns amuletos, não combinam com nenhum outro, e estão isolados.

**2.2 Representação gráfica**

Vide grafo 1 (G1), tabela 1.1, tabela 1.2, grafo 2 (G2) e imagem 2.

**2.3 Descrição da estrutura do grafo 1**

Os vértices da estrutura ilustram zonas do jogo, as quais são diferenciadas entre si de acordo com nomes dados pela história do jogo. Seguindo essa lógica, as arestas do grafo representam os múltiplos caminhos levam de uma área do jogo às demais. Além disso, existem alguns vértices diferenciados, os quais recebem o rótulo “Dreamer” que representam um objetivo importante em “Hollow Knight”. Para completar o jogo, é obrigatório que o jogador enfrente e derrote os 3 “Dreamers”, portanto, a passagem por

esses vértices é obrigatória para vencer o jogo. Quanto às colorações, arestas e vértices coloridos informam a necessidade de determinado poder para atravessar o caminho e as zonas onde o jogador os desbloqueia, respectivamente. Para uma melhor análise em relação à coloração verifique a tabela 1.2.

#### 2.4 Associação e descrição de conceitos da Teoria dos Grafos

**Arestas de corte:** segundo o Tópico 3.4 [1], uma aresta  $\alpha$  é classificada como *aresta de corte* se a sua remoção gerar um aumento no número de *componentes conexos* do grafo. Da mesma forma,  $\alpha$  não deve estar contida em *ciclos* e deve haver um par de vértices no qual todo caminho entre eles passa por  $\alpha$ . Seguindo essa lógica, no grafo 1, temos algumas arestas de corte. Tais arestas têm importância semântica no jogo no que tange o acesso à todas as zonas de “Hollow Knight”, sendo a maioria de papel crucial para o desenvolvimento da história e, conseqüentemente, para a experiência completa do jogador. Além disso, alguns desses caminhos abrigam itens, aprimoramentos ou monstros indispensáveis para o acesso a outros caminhos ou zonas. Como as arestas do grafo 1 já estão rotuladas, utilizaremos os rótulos para identificar os conjuntos de corte de arestas ou conjuntos desconectores minimais:  $\{ \{k\}, \{s\}, \{y\}, \{aa\}, \{ac\}, \{ae\}, \{af\} \}$ . Dessa forma, podemos chamar nosso primeiro gráfico como *1-aresta conexo* já que o menor conjunto desconector tem tamanho 1. A conectividade de aresta desse grafo se configura como  $\lambda(G1) = 1$ , por definição, já que é *1-aresta conexo*. Algumas arestas de corte podem ser evitadas durante o “playthrough”, por exemplo, se a aresta  $\{ae\}$  fosse removida, não teríamos acesso à zona “The Abyss”. Acessando essa zona, o jogador tem a possibilidade de desbloquear um final alternativo para o jogo, o que é mais um incentivo à exploração do mapa, mas que não é obrigatória para terminá-lo. Outras arestas de corte não devem ser removidas caso o jogador queira terminar o jogo, isto é, são a única forma de acesso a áreas obrigatórias. Por exemplo, a aresta  $\{s\}$ , que dá acesso a um “Dreamer”.

**Vértices de corte:** por definição, vértice de corte é aquele vértice que quando removido de um grafo simples torna o grafo desconexo. G1 apresenta o seguinte conjunto de corte de vértices ou conjuntos separadores minimais:  $\{ \{O\}, \{L\}, \{Q\}, \{M\}, \{F\}, \{I\} \}$ . Dessa forma, como o tamanho do menor *conjunto separador* é 1, o grafo pode ser chamado de *1-vértice conexo*. Em um cenário onde tais vértices de corte fossem removidos, a lógica do jogo ficaria bagunçada, pois representam zonas essenciais que se deixassem de existir, conseqüentemente seus caminhos adjacentes deixariam de existir. Por exemplo, se removidos  $\{I\}$ ,  $\{F\}$  e  $\{O\}$ , não seria possível chegar em nenhum dos “Dreamers”. Além disso, caso fosse removido o vértice de corte Q, não seria possível ir de Deepnest (O) para Queen’s Gardens (K) diretamente, uma vez que o comprimento do caminho mínimo iria aumentar em 3 unidades, pois a habilidade Monarch Wings (cor AZUL) não teria sido desbloqueada em Ancient Basin (Q).

**Cobertura de vértices:** no contexto de “Hollow Knight”, a menor cobertura de vértices representa algo importante para aqueles jogadores que querem mais ação e enfrentar mais inimigos. Isso se deve ao fato de que a menor cobertura de vértices garante o número mínimo de zonas a serem desbloqueadas para permitir o acesso a todos os caminhos do mapa, os quais são conhecidos por concentrarem mais monstros e “chefões”. Note que podem existir diversos subconjuntos de zonas que configuram coberturas minimais de vértices (que se expandidas perdem sua característica), e os de menor tamanho configuram subconjuntos de vértices da menor cobertura. Este conhecimento pode ser útil para aqueles que buscam completar o jogo o mais rapidamente possível, evitando passar por zonas desnecessárias (aquelas que não participam da cobertura de vértices). Existe uma grande comunidade de “speedrunners” (jogadores que competem entre si

visando os menores tempos de término do jogo, como se fosse uma corrida) de “Hollow Knight” que refinaram rotas (sequência ordenada de vértices e arestas) para percorrermos apenas o mínimo necessário para terminar o jogo. O recorde mundial atual, por exemplo, passa por apenas 14 áreas (de um total de 23) e completa o jogo em apenas 31min. O cálculo da cobertura de vértices utilizando o método de Maghout cresce excessivamente ao se tratar de um grafo denso (23 vértices e 32 arestas) e, por essa razão, priorizamos o sentido e os efeitos da propriedade ao invés do subconjunto em si.

**Conjunto dominante:** em relação a essa propriedade, temos praticamente o dual daqueles jogadores mencionados anteriormente. Sabendo que o *conjunto dominante* define o menor conjunto de vértices que cobre todos os outros vértices (consequentemente contido na cobertura de vértices), interpreta-se que existe um número de áreas mínimo para qual se torna possível a visitação de todas as áreas de “Hollow Knight” diretamente (caminhos de comprimento igual a 1). Na prática, pessoas que jogarem exclusivamente dentro desse subconjunto irão evitar desafios e batalhas desnecessárias comumente encontradas nas estradas do mapa. Essas estradas seriam as arestas que ficariam a parte do conjunto dominante, ou seja, não seriam cobertas pelos vértices que participam do conjunto dominante. Também é muito difícil de calcular o conjunto dominante pelo mesmo motivo do cálculo da cobertura de vértices.

**Clique:** contrariamente ao que aparenta, “Hollow Knight” é um jogo difícil e nada simples, e um dos recursos que auxilia o jogador a enfrentar o jogo mais facilmente são os “Charm Combos”, ou seja, combinações de amuletos que produzem habilidades especiais. Vide grafo 2 e imagem 2. Ao total existem 45 amuletos, mas o jogador só pode guardar em seu inventário 40 de cada vez. Ao juntar alguns desses “Charms” é possível criar combinações diferenciadas, e esse relacionamento é representado pelas arestas do grafo 2 e os vértices, pelos próprios amuletos do jogo. Seguindo essa lógica, nossos “Combos” serão os cliques desse grafo, ou seja, subgrafos completos (em que todo par de vértice é adjacente) maximais (mais nenhum vértice pode ser adicionado sem perder a propriedade). Baseado nos arquivos na comunidade de “Hollow Knight” temos as seguintes combinações de 2 amuletos (clique de tamanho 2): Dashmaster + Sharp Shadow; Dashmaster + Sprintmaster; Fury of the Fallen + Glowing Womb; Fury of the Fallen + Grubberfly’s Elegy; Mark of Pride + Grubberfly’s Elegy; Defender’s Crest + Flukeneat; Defenders’s Crest + Glowing Womb; Defender’s Crest + Spore Shroom; Quick Focus + Shape of Unn; Deep Focus + Spore Shroom; Joni’s Blessing + Hiveblood; Grubsong + Grubberfly’s Elegy; Grubsong + Weaversong; Dream Wielder + Dreamshield; Weaversong + Sprintmaster. Resultando em 15 cliques de tamanho 2. Além dessas, foram descobertos “Charm Combos” de 3 e 4 amuletos pelos próprios integrantes, resultando em mais 3 cliques de tamanho 3 e um de tamanho 4: Grubberfly’s Elegy + Mark of Pride + Fury of the Fallen; Unbreakable Heart + Hiveblood + Joni’s Blessing; Glowing Womb + Fury of the Fallen + Defender’s Crest; Baldur Shell + Quick Focus + Shape of Unn + Spore Shroom.

## 2.5 Grafo Hamiltoniano

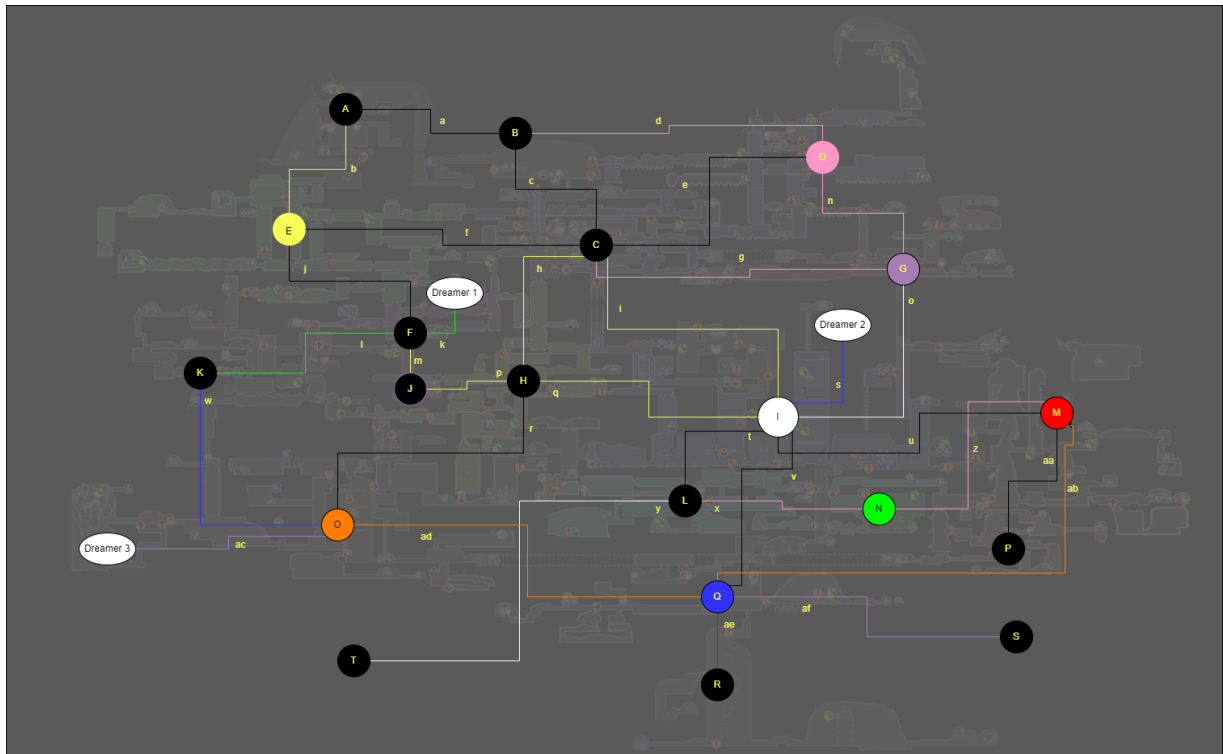
O grafo 1, não é definido como *hamiltoniano*, já que não possui um *ciclo hamiltoniano*, pré-requisito para ser um grafo desse tipo. Esse ciclo deve ter um caminho mínimo que passa por todos os vértices uma única vez e depois retorna ao vértice de início. O grafo 2 também não é hamiltoniano, pois é desconexo.

## 2.6 Grafo Euleriano

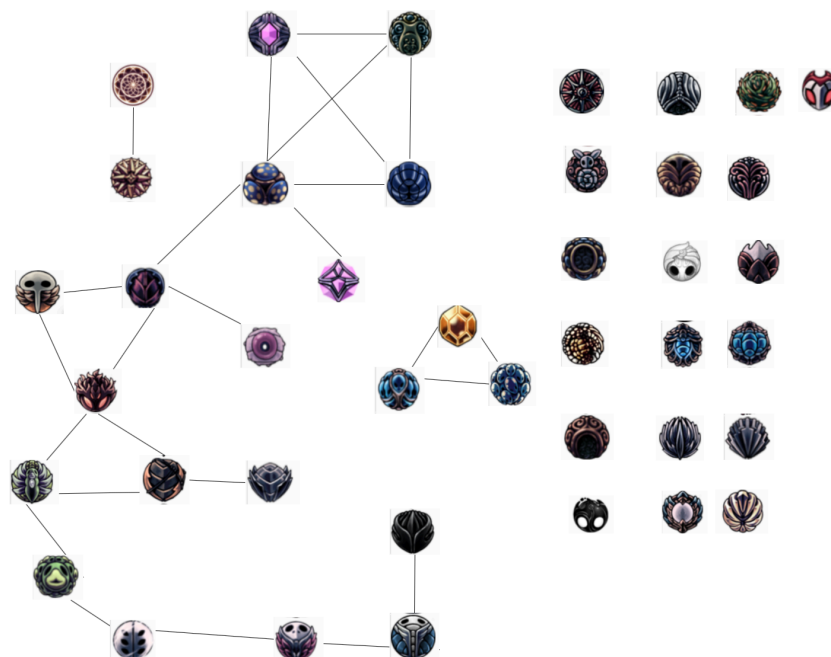
O grafo 1, que representa o mapeamento das zonas e caminhos do jogo, não se caracteriza como um *grafo euleriano*, uma vez que, contradizendo o teorema 1.5 [1], não possui todos os vértices com grau par. Além disso, também não se adequa a definição de *semi-euleriano*, já que possui mais de 2 vértices com grau ímpar. G2 também não é euleriano porque possui vértices de grau ímpar.

## 3. REFERÊNCIAS

### Grafo 1 (G1)



### Grafo 2 (G2)



**Tabela 1.1**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Howling Cliffs	Dirtmouth	Forgotten Crossroads	Crystal Peak	Greepath	Fog Canyon	Resting Grounds	Fungal Wastes	City of Tears	Queen's Station

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
Queen's Gardens	Royal Waterways	Kingdom's Edge	Isma's Grove	Deepnest	The Hive	Ancient Basin	The Abyss	White Palace	Godhome

Dreamer 1	Dreamer 2	Dreamer 3
Monomon	Lurien	Herrah

**Tabela 1.2**

PODERES	CORES
Mothwing Cloak	Amarelo
Crystal Heart	Rosa
Monarch Wings	Azul
Isma's Tear	Verde
Tram Pass	Laranja
Dream Nail	Roxo
King's Brand	Vermelho
Desolate Dive	Branco

Imagem 1

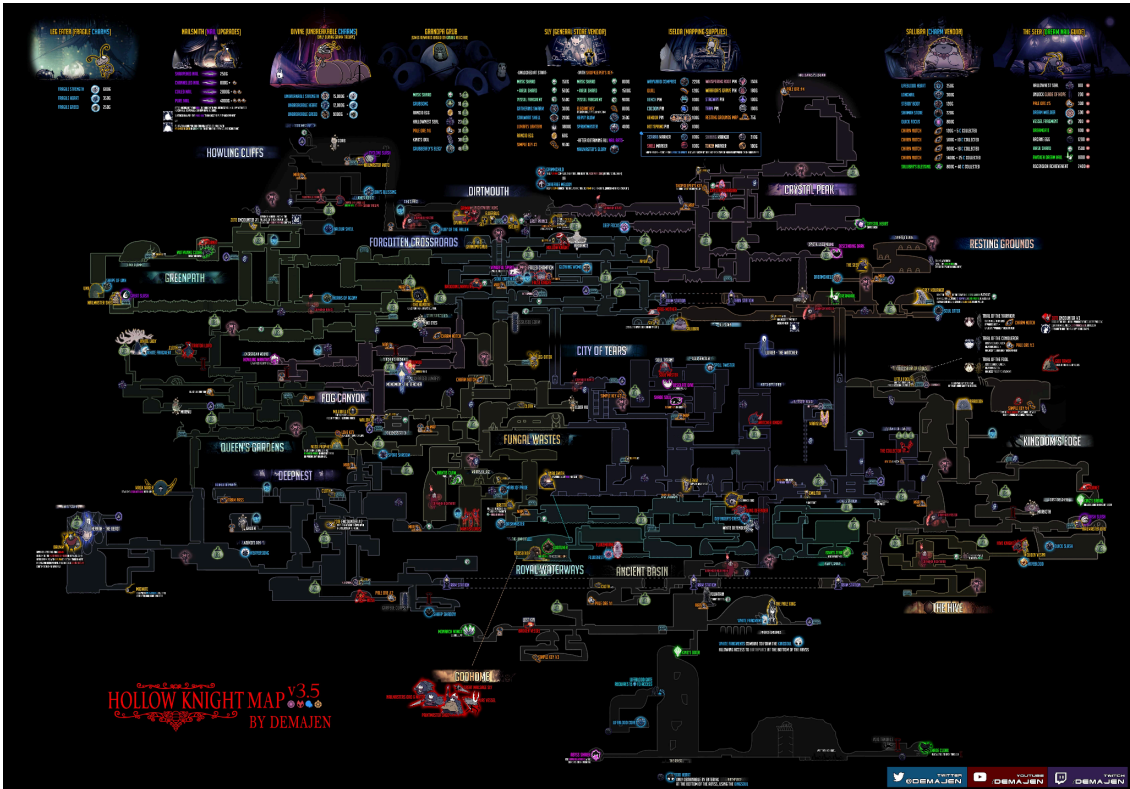












































Imagem 2

	Nailmaster's Glory ●		Soul Catcher ● ●		Hiveblood ● ● ● ●		Crubberfly's Elegy ● ● ●		Fury of the Fallen ● ●
	Quick Slash ● ● ● ●		Spell Twister ● ●		Shape of Unn ● ●		Baldur Shell ● ●		Spore Shroom ●
	Mark of Pride ● ● ● ●		Sharp Shadow ● ●		Longnail ● ● ●		Dashmaster ● ●		Sprintmaster ●
	Unbreakable Strength ● ● ● ●		Quick Focus ● ● ● ●		Lifeblood Core ● ● ● ●		Lifeblood Heart ● ● ● ●		Deep Focus ● ● ● ● ●
	Shaman Stone ● ● ● ●		Grubsong ● ● ● ●		Unbreakable Heart ● ● ● ●		Joni's Blessing ● ● ● ● ●		Defender's Crest ● ● ● ● ●
	Soul Eater ● ● ● ● ●		Thorns of Agony ● ● ● ● ●		Grimmchild ● ● ● ● ●		Weaversong ● ● ● ● ●		Glowing Womb ● ● ● ● ●
	Wayward Compass ● ● ● ● ●		Dream Wielder ● ● ● ● ●		Dreamshield ● ● ● ● ●		Steady Body ● ● ● ● ●		Stalwart Shell ● ● ● ● ●
	Void Heart —		Gathering Storm ● ● ● ● ●		Unbreakable Greed ● ● ● ● ●		Kingsoul ● ● ● ● ● ● ● ●		Carefree Melody ● ● ● ● ● ● ● ●
			Flukenest ● ● ● ● ●						Heavy Blow ● ● ● ● ●

[1] E. Prestes. Introdução à Teoria dos Grafos. 2020. (LIVRO)