

前面提到了向量子空间的概念，那么知道对于 R^2 ，它的维数是二维的，而三维空间 R^3 则是三维的，那么这也接着产生了一个问题，对于 R^2 的子空间到底是几维呢？有人可能会说是二维的，因为这是二维平面的子空间，那如果是三维空间的子空间，也就一定是三维的吗？这里根据前面的内容可以知道，三维空间的子空间有过原点的直线、平面和原点，还有三维空间自身，那么这里如果是过原点的直线，那么这里就如 $x+y+z=0$ 这种，对于这个是三维的吗？如果是三维的，但却又是一条直线，所以直观感觉应该是二维的，如果是点则是一维的。所以这里也就提出了一个关于子空间维数的问题了，到底该如何定义向量子空间的维数呢？

若 W 是 R^n 的一个子空间，那么 W 的维数等于 W 的一个基中向量的个数

对于上述定义，可以先简单地直观地检验一下是否正确，对于三维中的直线，如 $x+y+z=0$ ，这里可以写成 $x=-y-z$ ，也就是任意一个变量可以用另外两个变量来代替，那么这里可以知道如果是只有两个变量起作用的，那么根据前面的内容也可以知道，这里在线性方程中，矩阵的秩是 2，那么这里基中的向量的个数也为 2。

这样简单地检测之后发现这个定义是合理的，但是还是要想想为什么会这样定义呢？其实仔细思考之后发现，基这个概念的出现是为了能够找到表示 W 中任意向量的极小生成集合。那么也就是说基中的向量是一个都不能再缺少的，同时如果添加多一个或多个，又会多余了。那样的话基中向量的个数其实恰好就最能表示 W 的所需的最少向量的个数，而这样定义的维数也是合理的。(可能这里说的不是很清晰，道理大致如此吧)

那么这里用正式的表达方式，对于 W 的维数用 $\dim(W)$ 来表示。设 W 是 R^n 的子空间，如果 W 有一个包含 P 个向量的基 $B=\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ ，那么就说 W 是一个维数为 P 的子空间记为 $\dim(W)=P$

那么这里可能会产生一个疑问，就是关于基中的向量的个数，会是一样的吗？就是对于 W 来说，它的基中的向量都是相同的吗？这里是肯定的，因为根据基的概念，就是一个极小生成集合，那么自然这里向量的个数也是相同的，而书本为了严谨性会有一个证明，具体的可以参考一下书本相关内容的。

那么有了维数这个概念之后，这里会有一些相关的性质，见下图所示

p 维子空间的性质

维数的一个重要的特征是： p 维的子空间 W 与 \mathbf{R}^p 有许多相同的性质。例如，第 1.7 节的定理 11 表明， \mathbf{R}^p 中任何 $p+1$ 个或更多个向量的集合都是线性相关的。下面的定理表明，当 $\dim(W) = p$ 时，这个性质以及其他一些性质在 W 中也同样成立。

定理 9 设 W 为 \mathbf{R}^n 的一个子空间，且 $\dim(W) = p$ 。

1. W 中任何 $p+1$ 个向量或更多个向量的集合都是线性相关的。
2. W 中任何少于 p 个向量的集合都不能生成 W 。
3. W 中任何 p 个线性无关向量的集合都是 W 的基。
4. 任何能生成 W 的 p 个向量的集合都是 W 的基。

证明 性质 1 从定理 8 直接可得，因为 $\dim(W) = p$ 意味着 W 有一个基（从而也有一个生成集合）含有 p 个向量。

性质 2 等价于说 W 的生成集合必须包含至少 p 个向量。同样，这也是定理 8 的直接推论。

那么有了维数这个概念之后，对于前面提到的非奇异矩阵这些都可以用维数来描述了。这里先说一个之前一直在用，但是没有具体说明的概念-秩，关于矩阵的秩的概念，前面一直都是通过化简矩阵，然后得到最简形矩阵之后的非零行的数量就是矩阵的秩。这样其实只是一个比较简单直接的应用方式，但不是真正的描述和定。**矩阵的秩是指矩阵 A 的值域的维数。**为什么会这样说呢？因为看前面提到求秩的过程，其实不就是一个求值域的过程，而这里只是没有用增广矩阵去求解而已。但是本质上是一样的，也就是都是看主列的数量，也就是非自由变量的个数。而关于零空间的维数，这里有个称呼叫做 nullity，书上的翻译是零化度这个叫法。但不管叫什么，这里零空间的维数就是看自由变量的个数，刚好和求秩是互补的。

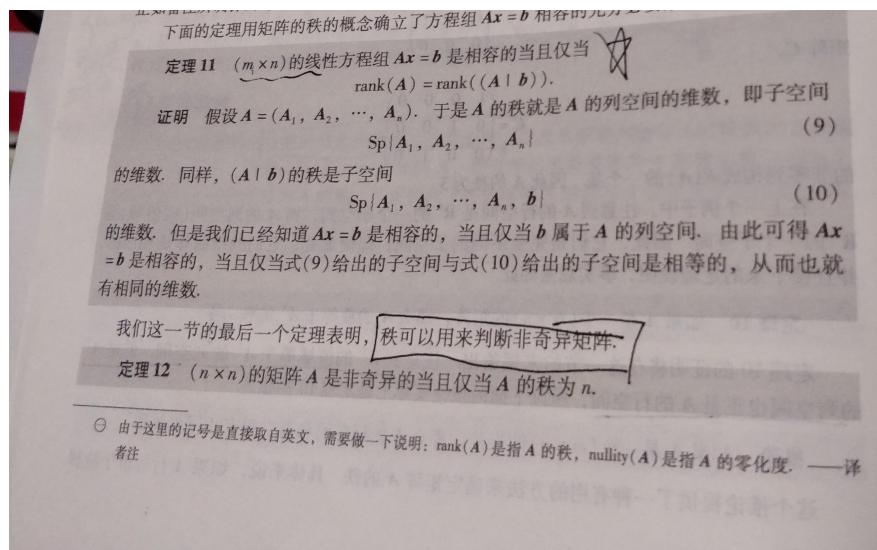
那么这里关于秩有一个很重要的定理，**矩阵 A 的秩等于 A^T 的秩**，关于这个定理的证明不太容易理解。但是通过思考前面的内容，可以知道 A 的行空间是 A^T 的列空间， A^T 的值域等于 A^T 的列空间（这里其实就是秩所代表的列，本质上值域其实也是列空间），那么这里也可以知道对于 $m \times n$ 的矩阵，这里秩肯定是不超过 $\min\{m, n\}$ ，也就是小于等于两者之间的最小值。那么这样才具备了 A 的秩和 A^T 的秩相等的可能。那么这里其实换个角度思考， A 和 A^T 的问题其实就是问 A 的行空间和列空间的秩是否相等。那么这里根据前面的内容我们可以知道，其实两者进行化简后，非零行的数量都是一样的，所以两者是相等的。

那么这里推广之后就有了一个推论， **A 的行空间和列空间具有相同的维数。**

另外这里提前给出一个公式：

对于矩阵 $A(m \times n)$, $n = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A)$

这里简单理解一下，其实就是说矩阵 A 的列的数量，就是主列的数量加上自由变量的数量，其实就是自由变量加上非自由变量的数量。



上图是根据维数去判断非奇异矩阵，当秩为 n 的时候，其实就是没有了自由变量，那么自然就是线性无关集合，所以是非奇异矩阵。