这门课是 MIT 线性代数课程
教授是 Gilbert Strang,网址是 http://web.mit.edu/18.06
教授写的一本书叫做《Introduction to Linear Algebra》
目前可以在网易公开课上找到内容和习题
以下内容都是个人笔记
仅供参考，如有错误之处，敬请指出

Pemutation(置换)
对于矩阵来说，置换就是改变行列位置，对于矩阵 A=[a b;c d]
这里行变换和列变换如下所示:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

https://jingyan.baidu.com/article/3052f5a10bf04297f21f8649.html
https://blog.csdn.net/xw_classmate/article/details/60426718
置换和置换矩阵的参考资料

这里还有一个概念就是置换矩阵，设 P 是一个 m×n 的 (0,1) 矩阵，如果 m≤n 且 PP′=E，则称 P 为一个 m×n 的置换矩阵，E 是 m 阶单位方针,因此这里对于置换矩阵，$P^TP=E$.关于更多的概念可以看参考资料

Inverses Matrix(可逆矩阵)
逆矩阵这里很好理解，就是对于矩阵 A 可以找到一个矩阵 A^{-1}，$A^{-1}A=E$，这样前者就被称为 A 的逆矩阵了，这里逆矩阵的作用会是后面讲零空间的时候经常会提及的，对于一个可逆的矩阵，那么 Ax=0 就只有零向量解了。

那么有了可逆矩阵，肯定会有不可逆矩阵的，那么怎么证明矩阵不可逆
一般有两种方法，第一种就是矩阵的行列式为 0，第二种就是可以找到一个 vector 使得 Ax=0,也就是 Ax=0 中有非零解。下面证明一下第二种方法：

反证如下:

假设 Ax=0 有非零解 x 且 A 是可逆矩阵，则 $A^{-1}A=E$.又因为 Ax=0,
那么 $A^{-1}Ax=A^{-1}(Ax)=0$,这里就矛盾了，因此假设不成立

所以当 Ax=0 只有零解时，那么 A 是可逆矩阵

Transpose(转置)

所谓的矩阵转置其实就是把矩阵中的元素下标对换，也就是$(A^T)_{ij}=A_{ji}$,另外这里还有一个相关的概念，就是对称矩阵，所谓对称矩阵，就是 $A_{ij}=A_{ji}$,例如下图的矩阵就是对称矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

这里关于对称矩阵和转置矩阵，有一个关系，**A^TA 是对称矩阵**,另外 $(AB)^T=B^TA^T$ 。

矩阵乘法

矩阵乘法是矩阵运算里面最常用到的，而一般来说，矩阵乘法有几种情况

1.内积(row*col)

对于矩阵 A=[1 2;3 4],B=[5 6;7 8]，这里内积如下所示:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1*5+2*7 & 1*6+2*8 \\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

这里其实就是矩阵 A 的第一行乘以 B 的第一列的和为第一个结果，第一行乘以第二列为第二个结果，以此类推，这种情况是书上常见的乘法类型，也就行乘列

$$
\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}
$$

这里其实分块乘积也是内积乘法的使用

2.外积(col*row)
对于外积还是用上面的矩阵来表示，如下所示：

$$
\begin{aligned}
& A \cdot B \\
& = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 28 & 32 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Gauss-Jordan Idea

这里的消元思想其实在前面的文档中提到过，但是还没有说完，因此这里再简单讲下消元思想。

$$
A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

上面有一个矩阵 A，现在如果存在一个逆矩阵使得两者相乘为单位矩阵
单位矩阵也就是主对角线都为 1，其余为 0，那么现在就来求逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

注意这里用的是增广矩阵的概念，也就是这里是[A I]->[I A^{-1}]
因此最后的结果逆矩阵自然就出来了。

下面给出关于线性空间的网上的一些理解：
网址：https://www.zhihu.com/question/24086219/answer/140270125

直观上可以理解为 **给元素装配了加法和数乘的非空集合**

完成定义我们拆分这句话就成：

1）非空集合

首先它是一个非空集合，我们记为 X

2）给元素装配加法（元素与元素加法）

其次我们给 X 中的元素装配上加法运算，满足4个基本属性

1, 加法结合律：$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

2, 加法交换律：$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

3, 有单位元：存在一个元素 **e**, 使得对任意**u** $\in X$，都有**u** + **e** = **u**, 这里**e** 其实是零元，一般用**0**表示

4, 有逆元：对任意**u** $\in X$，都对应存在一个**v**$\in X$, 使得**u** + **v**=**0**

3）给元素装配数乘（数值与元素乘法）

然后给 X 中的元素装配上数乘，满足数乘的4个基本属性(选择一个数域 F,记a,b为其中任意数值)

1. 数乘对元素加法满足分配律：$a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$.

2. 数乘对域加法（数值与数值加法）满足分配律：$(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

3. 数乘与域乘法（数值与数值乘法）相兼容：$a(b \cdot \mathbf{v}) = (ab) \cdot \mathbf{v}$

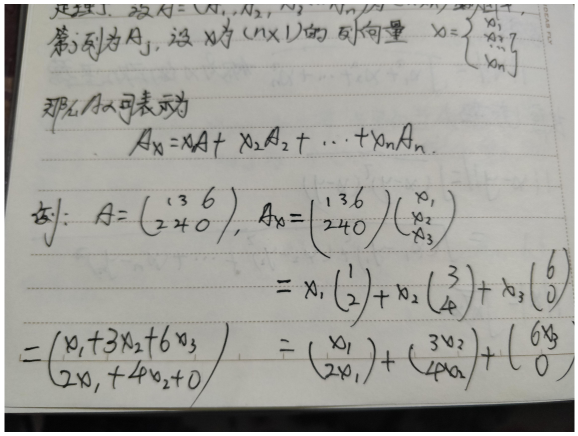
4. 数乘有单位元：存在一个数值 $e \in F$, 使得对于任意**v**$\in X$,都有 $e \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

到此，我们有了装配了加法和数乘的非空集合，要成为空间，在定义两个运算时要包含一个硬性要求即可，这个集合对这两个运算封闭

另外这里补充一些关于矩阵乘法的内容：

定理 5(这里下标对应书上相应的内容):设 A=(A_1,A_2....A_n)为(m*n)的矩阵，其中第 j 列为 A_j,设 x 为(n*1)的列向量 x={x_1; x_2;....x_n},那么这里 Ax 可表示为：
$Ax=x_1A_1+x_2A_2+...+x_nA_n$

例: A=(1,3,6;2,4,0) 那么



数量积：

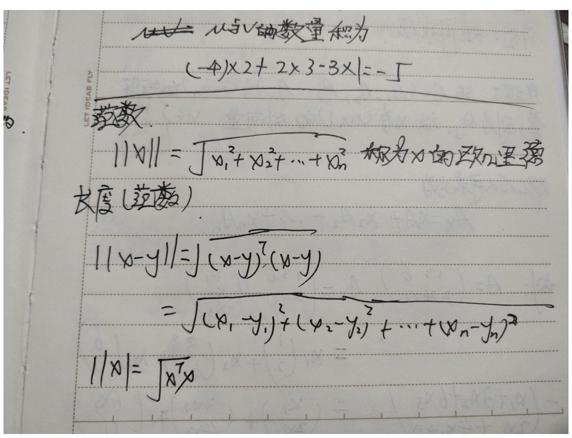
R^n中有两个向量，$V=(V_1,V_2...V_n)$和$U=(U_1,U_2...U_n)$的数量积为

$V_1U_1+V_2U_2+...+V_nU_n=\sum V_iU_i$

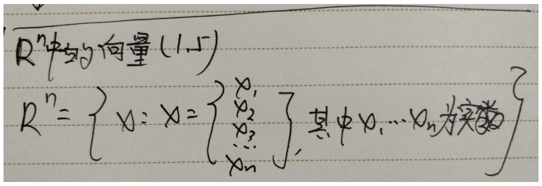
例：u=(2;3;-1)和 v=(-4;2;3),那么 u 和 v 的数量积为

(-4)*2+2*3-3*1=-5

范数:



R^n中的向量:


R^n中的向量 (1.5)

$$R^n = \left\{ x : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{其中 } x_1, \cdots x_n \text{ 为实数} \right\}$$

自由变量：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这里对于上述的矩阵，第 1,3 列是 pivot column
第二列是自由变量 free column

这里方程组为 $x_1+2x_2=5, x_3=0$
自由变量其实就是可以任意取值。