这门课是 MIT 线性代数课程
教授是 Gilbert Strang,网址是 http://web.mit.edu/18.06
教授写的一本书叫做《Introduction to Linear Algebra》
目前可以在网易公开课上找到内容和习题
以下内容都是个人笔记
仅供参考, 如有错误之处, 敬请指出

第一讲: Elimination/Back substritution
消元和回代
这里有这样的一个方程组:

$$x + 2y + z = 2$$
$$3x + 8y + z = 12$$
$$4y + z = 2$$

对于这样的方程组, 可以用下面的形式表示
这种就是矩阵了, 这里可以考虑对矩阵进行消元

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

这里首先用第二行减去三倍的第一行, 得到了第二个矩阵
同理第三行减去两倍的第二行可以得到第三个矩阵
那么这里就得到了一个方程组了

$$x + 2y + z = 2$$
$$2y - 2z = 6$$
$$5z = -10$$
$$\Rightarrow x = 2, y = 1, z = -2$$

那么对于上面的化简过程，还可以用以下方式表示:

$$Step1:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

这里可以在矩阵前面乘以另外一个矩阵 E_{21}，也可以得到消元后的矩阵
那么同理，第二步为:

$$Step2:$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

那么这里第二步左乘 E_{32} 同理得到矩阵
注意这里左乘矩阵的下标是根据消元的行来标注的
例如 12 指代第二行减去第一行
那么这里总的可以用下面的公式来表示
$E_{32} * E_{21} * A = U$
这里的方法就叫做 LU 矩阵分解了
对于 LU 分解，这里就是得到一个上三角矩阵
其实消元的思想也是一种矩阵分解思想
另外这里可以看到左乘矩阵对角线都是 1
而且左乘矩阵 E 是下三角矩阵
那么左乘矩阵到底怎么来的，如何计算出来呢？

LU 分解:

Find the LU-decomposition of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

When it exists for which real numbers a and b does it exist?

那么首先这里进行 LU 矩阵分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

那么这里左乘矩阵 E_{21} 表示为

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ ? & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里因为只是对第二行进行处理, 因此只有?处需要求解
其他的地方是已经确定的。那么这里有一个计算的公式
A_{11} x+A_{21}=0 => x+a=0 => x=-a

这里可以这样理解：
因为 LU 分解其实和消元思想一样
那么这里是用第二行减去第一行的若干倍
因此矩阵 A 中的第一行第一个数字的若干倍+A 中的第二行的第一个数字
结果应该为消元后的数值, 也就是 0

那么这里矩阵 E_{21} 就可以得到结果了

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -a & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么接着进行分解，就是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ b & b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & a \\ 0 & b & a-b \end{bmatrix}$$

那么这里同理因为只是对第三行进行处理

所以 E_{31} 矩阵为

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ ? & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么这里同理公式为:

A_{11} x+A_{31}=0 => x+b=0 => x=-b

所以通过这个例题就可以知道 LU 矩阵分解的步骤和具体过程了