前面提到了向量子空间的概念，那么知道对于 R^2，它的维数是二维的，而三维空间 R^3 则是三维的，那么这也接着产生了一个问题，对于 R^2 的子空间到底是几维呢？有人可能会说是二维的，因为这是二维平面的子空间，那如果是三维空间的子空间，也就一定是三维的吗？这里根据前面的内容可以知道，三维空间的子空间有过原点的直线、平面和原点，还有三维空间自身，那么这里如果是过原点的直线，那么这里就如 $x+y+z=0$ 这种，对于这个是三维的吗？如果是三维的，但却又是一条直线，所以直观感觉应该是二维的，如果是点则是一维的。所以这里也就提出了一个关于子空间维数的问题了，到底该如何定义向量子空间的维数呢？

若 W 是 R^n 的一个子空间，那么 W 的维数等于 W 的一个基中向量的个数

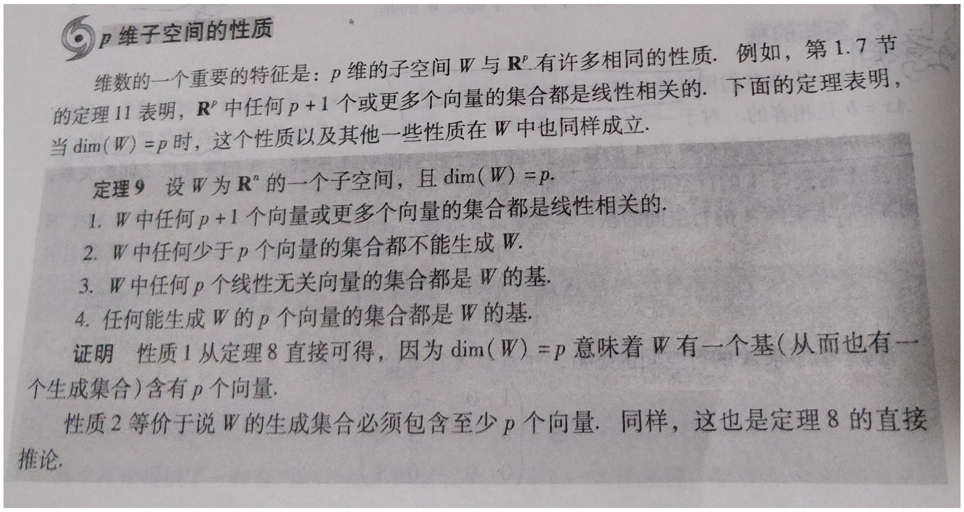
对于上述定义，可以先简单地直观地检验一下是否正确，对于三维中的直线，如 $x+y+z=0$，这里可以写成 $x=-y-z$，也就是任意一个变量可以用另外两个变量来代替，那么这里可以知道如果是只有两个变量起作用的，那么根据前面的内容也可以知道，这里在线性方程中，矩阵的秩是 2，那么这里基中的向量的个数也为 2。

这样简单地检测之后发现这个定义是合理的，但是还是要想想为什么会这样定义呢？其实仔细思考之后发现，基这个概念的出现是为了能够找到表示 W 中任意向量的极小生成集合。那么也就是说基中的向量是一个都不能再缺少的，同时如果添加多一个或多个，又会多余了。那样的话基中向量的个数其实恰好就最能表示 W 的所需的最少向量的个数，而这样定义的维数也是合理的。(可能这里说的不是很清晰，道理大致如此吧)

那么这里用正式的表示方式，对于 W 的维数用 dim(W)来表示。**设 W 是 R^n 的子空间，如果 W 有一个包含 P 个向量的基 $B=\{w_1,w_2....w_p\}$，那么就说 W 是一个维数为 P 的子空间记为 dim(W)=P**

那么这里可能会产生一个疑问，就是关于基中的向量的个数，会是一样的吗？就是对于 W 来说，它的基中的向量都是相同的吗？这里是肯定的，因为根据基的概念，就是一个极小生成集合，那么自然这里向量的个数也是相同的，而书本为了严谨性会有一个证明，具体的可以参考一下书本相关内容的。

那么有了维数这个概念之后，这里会有一些相关的性质，见下图所示



p 维子空间的性质

维数的一个重要的特征是：p 维的子空间 W 与 $\mathbf{R}^p$ 有许多相同的性质．例如，第 1.7 节的定理 11 表明，$\mathbf{R}^p$ 中任何 $p+1$ 个或更多个向量的集合都是线性相关的．下面的定理表明，当 $\dim(W)=p$ 时，这个性质以及其他一些性质在 W 中也同样成立．

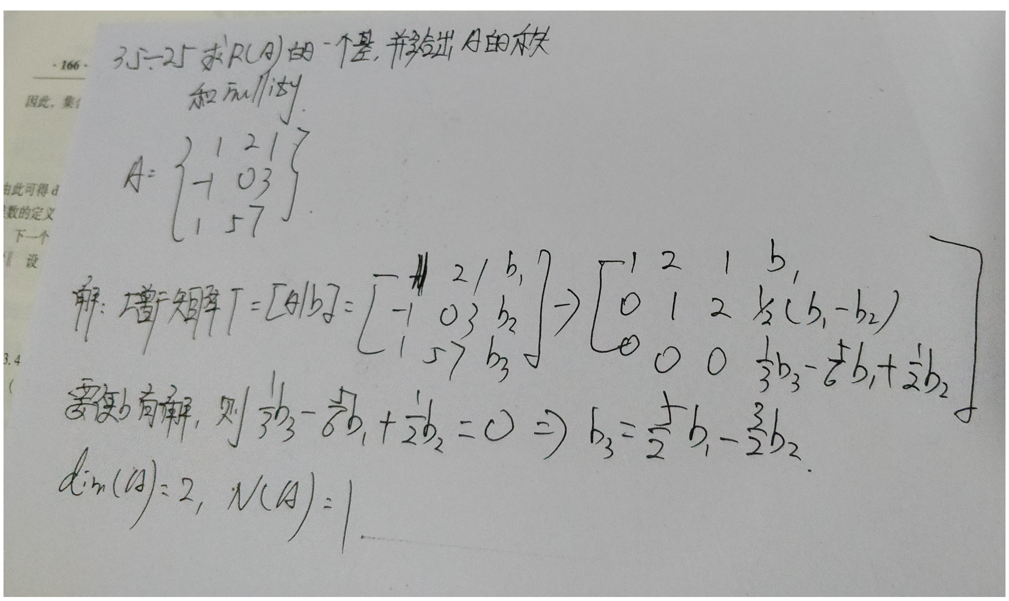
定理 9 设 W 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，且 $\dim(W)=p$.

1. W 中任何 $p+1$ 个向量或更多个向量的集合都是线性相关的.
2. W 中任何少于 p 个向量的集合都不能生成 W.
3. W 中任何 p 个线性无关向量的集合都是 W 的基.
4. 任何能生成 W 的 p 个向量的集合都是 W 的基.

证明 性质 1 从定理 8 直接可得，因为 $\dim(W)=p$ 意味着 W 有一个基（从而也有一个生成集合）含有 p 个向量.

性质 2 等价于说 W 的生成集合必须包含至少 p 个向量．同样，这也是定理 8 的直接推论.

那么有了维数这个概念之后，对于前面提到的非奇异矩阵这些都可以用维数来描述了。这里先说一个之前一直在用，但是没有具体说明的概念-秩，关于矩阵的秩的概念，前面一直都是通过化简矩阵，然后得到最简形矩阵之后的非零行的数量就是矩阵的秩。这样其实只是一个比较简单直接的应用方式，但不是真正的描述和定。**矩阵的秩是指矩阵 A 的值域的维数**。为什么会这样说呢？因为看前面提到求秩的过程，其实不就是一个求值域的过程，而这里只是没有用增广矩阵去求解而已。但是本质上是一样的，也就是都是看主列的数量，也就是非自由变量的个数。而关于零空间的维数，这里有个称呼叫做 nullity,书上的翻译是零化度这个叫法。但不管叫什么，这里零空间的维数就是看自由变量的个数，刚好和求秩是互补的。



3.5-25 求R(A)的一个基，并给出A的秩和nullity.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&3\\1&5&7\end{bmatrix}$$

解：增广矩阵 $T=[A|b]=\begin{bmatrix}1&2&1&b_1\\-1&0&3&b_2\\1&5&7&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&b_1\\0&1&2&\frac{1}{2}(b_1-b_2)\\0&0&0&\frac{1}{3}b_3-\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{2}b_2\end{bmatrix}$

要使方程有解，则 $\frac{1}{3}b_3-\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{2}b_2=0 \Rightarrow b_3=\frac{1}{2}b_1-\frac{3}{2}b_2$.

$\dim(A)=2,\ N(A)=1$

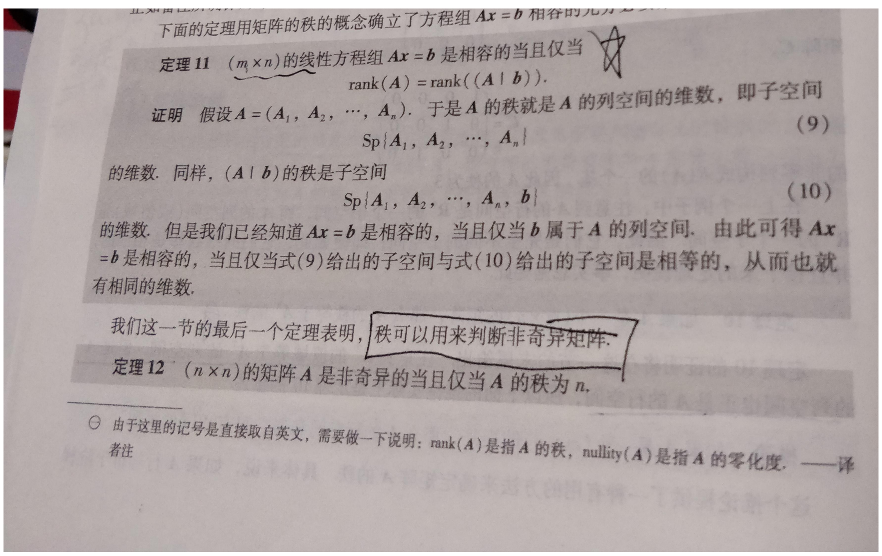
上图是书本一道关于求秩的题目，内容比较简单。

那么这里关于秩有一个很重要的定理，**矩阵 A 的秩等于 A^T 的秩**，关于这个定理的证明不太容易理解。但是通过思考前面的内容，可以知道 A 的行空间是 A^T 的列空间，A^T 的值域等于 A^T 的列空间(这里其实就是秩所代表的列，本质上值域其实也是列空间)，那么这里也可以知道对于 m*n 的矩阵，这里秩肯定是不超过 min{m,n}，也就是小于等于两者之间的最小值。那么这样才具备了 A 的秩和 A^T 的秩相等的可能。那么这里其实换个角度思考，A 和 A^T 的问题其实就是问 A 的行空间和列空间的秩是否相等。那么这里根据前面的内容我们可以知道，其实两者进行化简后，非零行的数量都是一样的，所以两者是相等的。

那么这里推广之后就有了一个推论，**A 的行空间和列空间具有相同的维数。**

另外这里提前给出一个公式:
对于矩阵 A(m*n),n=rank(A)+nullity(A)

这里简单理解一下，其实就是说矩阵 A 的列的数量，就是主列的数量加上自由变量的数量，其实就是自由变量加上非自由变量的数量。


下面的定理用矩阵的秩的概念确立了方程组 $Ax=b$ 相容的充分必要条件.

定理 11 $(m\times n)$的线性方程组 $Ax=b$ 是相容的当且仅当

$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}((A\mid b)).$$

证明 假设 $A=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$. 于是 A 的秩就是 A 的列空间的维数，即子空间

$$\mathrm{Sp}\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \tag{9}$$

的维数. 同样，$(A\mid b)$的秩是子空间

$$\mathrm{Sp}\{A_1, A_2, \cdots, A_n, b\} \tag{10}$$

的维数. 但是我们已经知道 $Ax=b$ 是相容的，当且仅当 b 属于 A 的列空间. 由此可得 $Ax=b$ 是相容的，当且仅当式(9)给出的子空间与式(10)给出的子空间是相等的，从而也就有相同的维数.

我们这一节的最后一个定理表明，秩可以用来判断非奇异矩阵.

定理 12 $(n\times n)$的矩阵 A 是非奇异的当且仅当 A 的秩为 n.

⊖ 由于这里的记号是直接取自英文，需要做一下说明：rank(A)是指 A 的秩，nullity(A)是指 A 的零化度. ——译者注

上图是根据维数去判断非奇异矩阵，当秩为 n 的时候，其实就是没有了自由变量，那么自然就是线性无关集合，所以是非奇异矩阵。