LCMS

Nguồn: AtCoder Grand Contest 038 - Problem C

https://atcoder.jp/contests/agc038/tasks/agc038_c

Đặt $V = 1000000$ là giới hạn tối đa của các số A_i trong đề bài. Ta sẽ tìm một dãy số hữu tỉ $w_1, w_2, \ldots, w_V$ thỏa mãn điều kiện: với mọi $1 \leq i \leq V$, ta có $\sum_{d|i} w_d = \frac{1}{i}$.

Từ điều kiện trên, ta có:

- $w_1 = 1$
- $w_i = \frac{1}{i} - \sum_{d|i, d<i} w_d$ với $2 \leq i \leq V$

Ta có thể tính dãy w với độ phức tạp bằng tổng số ước của các số nguyên từ 1 đến V, tương đương $O(V \log V)$.

Với hai số nguyên x, y bất kì, ta có:

$$lcm(x,y) = \frac{xy}{gcd(x,y)} = xy\left(\sum_{d|gcd(x,y)} w_d\right) = xy\left(\sum_{d|x, d|y} w_d\right)$$

Do đó, đáp án cần tìm sẽ là:

$$S = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} lcm(A_i, A_j) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} A_i A_j \left(\sum_{d|A_i, d|A_j} w_d\right)$$

Ta sẽ viết lại công thức trên bằng việc rút d ra ngoài:

$$S = \sum_{1\leq d\leq V} w_d \left(\sum_{d|A_i, d|A_j, i<j} A_i A_J\right)$$

Đặt $f_d = \sum_{d|A_i, d|A_j, i<j} A_i A_j$ Nhận thấy rằng, f_d chính là tổng của tích tất cả các cặp bội của d trong dãy A. Gọi cnt_x là số lượng phần tử có giá trị x trong dãy A. Khi đó:

$$f_d = \sum_{1 \le a \le V, d|a} \left(\sum_{a < b \le V, d|b} cnt_a cnt_b \times ab \right)$$
$$= \left(\sum_{a|d} cnt_a \times a \right)^2 - \sum_{a|d} cnt_a^2 \times a^2$$

Ta có thể tính giá trị này trong O(số lượng bội số không vượt quá V của d). Với mọi giá trị d từ 1 đến V, tổng độ phức tạp để tính f_d là $O(V \log V)$.

Cuối cùng, để tính w_i, ta cần tìm nghịch đảo modulo của i cho 998244353. Tức là, ta cần tìm số nguyên x sao cho $xi \equiv 1 \pmod{10^9 + 7}$. Các bạn có thể tham khảo cách tìm nghịch đảo modulo tại: `http://vnoi.info/wiki/algo/math/modular-inverse`

Độ phức tạp: $O(V \log V + n)$ với n là số phần tử của dãy A, V là giới hạn của các phần tử dãy A.

Tag: Combinatorics, Math, Number Theory