DẠNG 1: TÌM MỘT CHỮ SỐ TẬN CÙNG

I. TÍNH CHẤT 1:

A. LÝ THUYẾT:

- ✓ *Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*
- ✓ *Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*
- ✓ *Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.*
- ✓ *Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.*

Việc chứng minh tính chất trên không cần thiết với lớp 6. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì $a^m = a^{4n+r} = a^{4n}.a^r$ với r = 0, 1, 2, 3 nên từ tính chất 1c => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG:

Bài toán 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số :
a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải :

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :
$9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + \ldots + 9 + 1)$ chia hết cho 4
=> $99 = 4k + 1$ (k thuộc N) => $7^{99} = 7^{4k+1} = 7^{4k}.7$
Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) => 7^{99} có chữ số tận cùng là 7.
b) Dễ thấy $14^{14} = 4k$ (k thuộc N) => theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.
c) Ta có $5^{67} - 1$ chia hết cho 4 => $5^{67} = 4k + 1$ (k thuộc N)
=> $4^{567} = 4^{4k+1} = 4^{4k}.4$, theo tính chất 1d, 4^{4k} có chữ số tận cùng là 6 nên 4^{567} có chữ số tận cùng là 4.
Tính chất sau được => từ tính chất 1.

II. TÍNH CHẤT 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài toán 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2004^{8009}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).
Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :
$(2 + 3 + \ldots + 9) + 199.(1 + 2 + \ldots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \ldots + 9) + 9 = 9009$.
Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.
Từ tính chất 1 tiếp tục => tính chất 3.

III. TÍNH CHẤT 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.
b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.
c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài toán 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2004^{8011}$.
Lời giải :
Nhận xét : Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).
Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; …

Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng : (8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019.
Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.
* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

DẠNG 2: TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Nếu $x \in N$ và $x = 100k + y$, trong đó k ; $y \in N$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.
Hiển nhiên là $y \le x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).
Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.
Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :
Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 25$.
Viết $m = p^n + q$ (p ; $q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 4$ ta có :
$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.
Vì $a^{n-1} \vdots 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 25$. Mặt khác, do (4, 25) = 1 nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 100$.
Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của aq.
Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 100$.
Viết $m = u^n + v$ (u ; $v \in N$, $0 \le v < n$) ta có :
$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.
Vì $a^n - 1 \vdots 100 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 100$.
Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v.
Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v.
Bài toán 7 :
Tìm hai chữ số tận cùng của các số :
a) a^{2003} b) 7^{99}
Lời giải : a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.
Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$. Mặt khác :
$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8$ ($k \in N$).
Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.

b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $7^4 = 2401$ => 74 - 1 $\vdots$ 100.

Mặt khác : $9^9 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1$ ($k \in N$)

Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7$ ($q \in N$) tận cùng bởi hai chữ số 07.

Bài toán 8 :

Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.

Lời giải : Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517}. Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.

Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.

Mặt khác : $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$

$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) +$ 243, có hai chữ số tận cùng là 43.

Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.

Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp. Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.

Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu a = 2 hoặc a = 3 thì n = 20 ; nếu a = 7 thì n = 4. Một câu hỏi đặt ra là : Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 4 : Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{20} - 1 \vdots 25$.

Bài toán 9 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :

a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + ... + 2004^{2002}$

b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2004^{2003}$

Lời giải :

a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.

Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ ta có a100 - 1 $\vdots$ 25.

Vậy với mọi $a \in N$ ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.

Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + ... + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.

Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$. áp dụng công thức :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + ... + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, $S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + ... + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$.

áp dụng công thức :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + ... + 2004^3 = (2005 \times 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.

Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.

Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.

Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).

Tính chất 5 : Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu :

+ A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;

+ A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;
+ A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;
+ A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;
+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Bài toán 10 : Cho $n \in N$ và $n - 1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải : Do $n - 1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r$ ($r \in \{0, 2, 3\}$). Ta có $7^4 - 1 = 2400 \vdots 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.
Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$ ($r = 0, 2, 3$) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

DẠNG 3: TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG

Nhận xét : Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.
Nếu $x = 1000k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \leq x$).
Do $1000 = 8 \times 125$ mà $(8, 125) = 1$ nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :
Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1 \vdots 125$.
Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 8$ ta có :
$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.
Vì $a^n - 1 \vdots 125 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 125$. Mặt khác, do $(8, 125) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 1000$.
Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q.
Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1 \vdots 1000$.
Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N, 0 \leq v < n$) ta có :
$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.
Vì $a^n - 1 \vdots 1000 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 1000$.
Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v.
Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6 :
Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1 \vdots 125$.

Chứng minh : Do a^{20} - 1 chia hết cho 25 nên a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80} khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

=> $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1 ⋮ 5$. Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1) ⋮ 125$.

Bài toán 11 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}.

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do (123, 5) = 1 => 123^{100} - 1 chia hết cho 125 (1).

Mặt khác :

$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1)$ => 123^{100} - 1 chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra : 123^{100} - 1 chi hết cho 1000

=> $123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ ($k \cap N$).

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài toán 12 :

Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$.

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do (9, 5) = 1 => 9^{100} - 1 chi hết cho 125 (1).

Tương tự bài 11, ta có 9^{100} - 1 chia hết cho 8 (2).

Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra : $9^{100} - 1 ⋮ 1000$

=> $3^{399...98} = 9^{199...9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ (p, q Є N).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99}.

Lại vì $9^{100} - 1 ⋮ 1000$ => ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$ => ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{??9} \times 9 = \overline{...001}$ để xác định $\overline{??9} = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ là 889.

Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước : Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.