

1.14 Поляризация диэлектриков.

Поляризованность

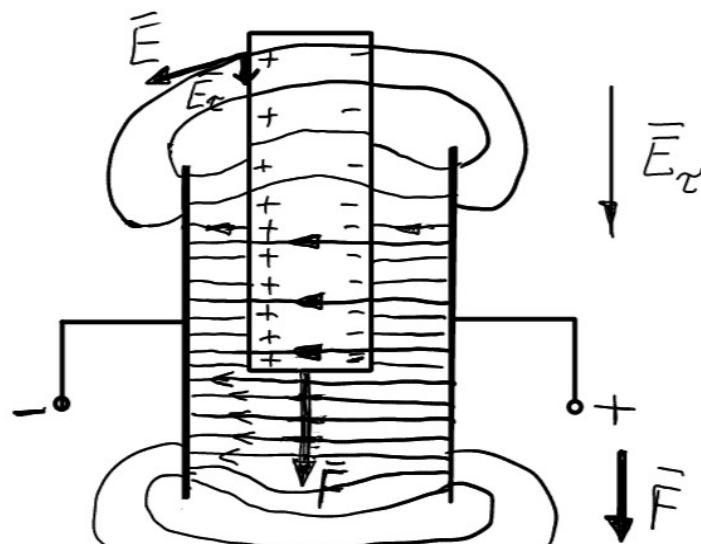
1) Диэлектрики - это вещества "не способные" проводить электрический ток.

Реально диэлектрики проводят электрический ток в

$$10^{15} \div 10^{20}$$

раз хуже, чем проводники.

2) При внесении диэлектрика в электрическое поле электрическое поле изменяется. На поверхностях диэлектрика появляются разноименные заряды. Это ведет к возникновению сил, действующих на диэлектрик.



На первоначально не заряженном диэлектрике появляются заряды - разноименные полюсы - отсюда название поляризации диэлектрика, а сами заряды называются поляризационными.

3) Различие между явлением поляризации в диэлектриках и явлением индукции в проводниках - поляризационные заряды не являются свободными в отличие от электронов в проводниках.

4) Атомы и молекулы диэлектриков состоят из элементарных частиц различных знаков. В электрическом поле происходит смещение этих частиц и появляется электрический момент, аналогичный диполю.

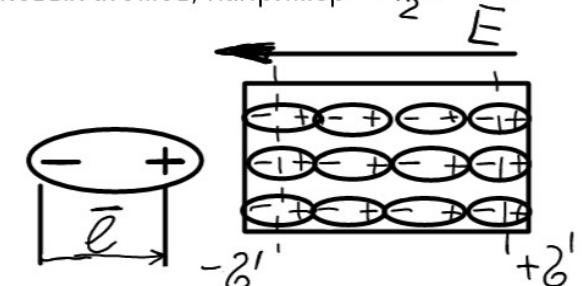
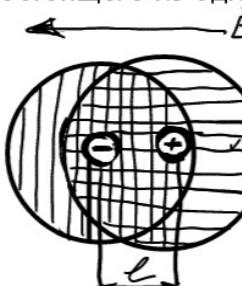


$$\bar{P} = q \bar{l} \quad (1)$$

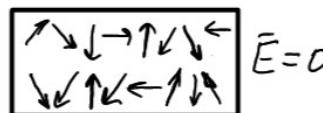
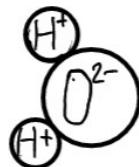
классический диполь

В диэлектриках существует три вида поляризации:

1. Электронная поляризация - в молекулах вещества, состоящего из одинаковых атомов, например H_2 .

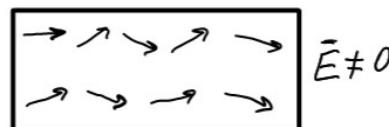


2. Дипольная поляризация - возникает в веществах с полярными молекулами, например H_2O



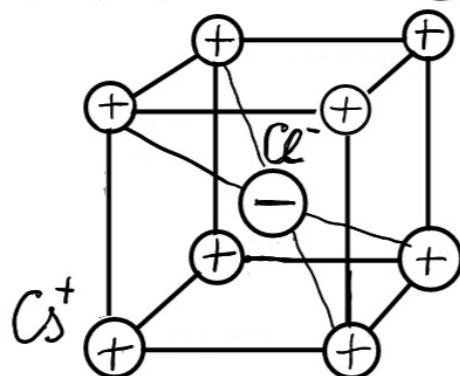
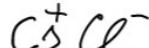
В отсутствии поля дипольные моменты ориентированы хаотически и $\sum \bar{P}_i = 0$.

При наложении поля дипольные моменты упорядочиваются и $\sum P_i \neq 0$



3. Ионная поляризация - в твердых диэлектриках.

Например в кристаллах



5) Для количественной характеристики поляризации диэлектрика служит специальная физическая величина - поляризованность.

Поляризованность или вектор поляризованности - это сумма электрических моментов всех молекул, заключенных в единице объема диэлектрика.

$$\bar{P} = \frac{1}{V} \sum \bar{P}_i \quad (1)$$

Если диэлектрик изотропный и поле не слишком велико, то $\bar{P} \sim \bar{E}$:

$$\bar{P} = \chi \epsilon_0 \bar{E} \quad (2),$$

χ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, безразмерная величина, всегда больше "0".

В (1) объём V д.б. физически бесконечно малой величиной. Физически бесконечно малые величины отличаются от математически бесконечно малых величин. Например, физически бесконечно малый объём V д.б. велик микроскопически, т.е. в нём должно

содержаться большое число молекул, однако он д.б. достаточно мал макроскопически, т.е. на протяжении его размеров макроскопическое значение поля д. оставаться практически неизменным.

Зная поляризованность, м. найти поляризационные (связанные) заряды и наоборот. Поверхностная плотность связанных зарядов с учётом (2) равна:

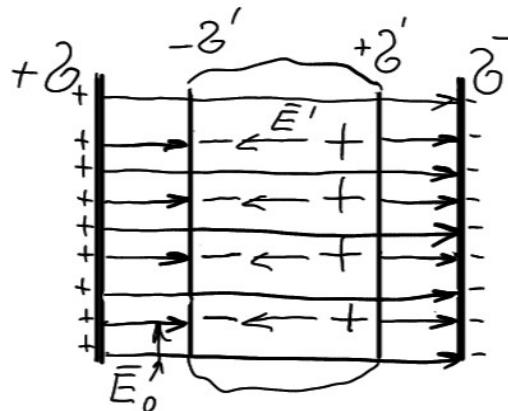
$$\sigma' = P_n = \epsilon \epsilon_0 E_n \quad (3)$$

, где P_n и E_n - нормальные составляющие вектора поляризованности и напряжённости поля в диэлектрике. Если вектор \mathbf{P} различен в разных точках диэлектрика, то в диэлектрике возникают ещё объёмные заряды.

Поверхностную плотность связанных зарядов можно выразить через поверхностьную плотность свободных зарядов:

$$\boxed{\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma}$$

Поле в диэлектрике



σ' - поверхсм.
плотность
связанных
зарядов.

σ - поверхсм.
плотность свободных
зарядов

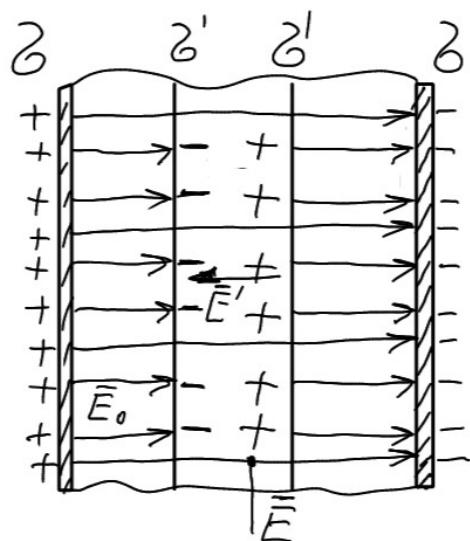
Если в однородное поле конденсатора E_0 внести диэлектрик, то под действием поля в диэлектрике произойдёт смещение зарядов: положительных по полю, а отрицательных против поля. В результате на противоположных гранях диэлектрика возникнут поверхностьные заряды с плотностями "+ сигма штрих" и "- сигма штрих". Эти нескомпенсированные заряды, возникшие в результате поляризации диэлектрика, называются "связанными". Поверхностная плотность связанных зарядов в диэлектрике меньше, чем

Лекция_1

свободных.

Поле в диэлектрике:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}'$$



$$E_0 = \frac{\mathcal{D}}{\epsilon_0}$$

$$E' = \frac{\mathcal{D}'}{\epsilon}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$$

$$E = E_0 - E' = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathcal{D} - \mathcal{D}')$$

$$\mathcal{D}' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$$

1.1 Характеристики электрического тока

1) Упорядоченное движение электрических зарядов называется током.

Для протекания тока в данном теле необходимо наличие в этом теле носителей тока. Ими м.б. электроны, ионы, наконец макроскопические частицы, несущие на себе электрический заряд.

2) Качественной характеристикой электрического тока является сила тока.

Сила тока - это величина заряда, переносимого через единичную поверхность в единицу времени.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} I dt \quad (1)$$

$$[I] = [A] = \left[\frac{C}{s} \right]$$

Сила тока - величина скалярная. За положительное направление тока принято направление движения положительных носителей.

3) Плотность тока - более детальная характеристика тока.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} I dt$$

$$[I] = \left[\frac{K_1}{c} \right] = [A]$$

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_L} \cdot \bar{n} \quad (2)$$

Для металлов:

$$dQ = en <v> S dt$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = en <v> S$$

$$\bar{j} = \frac{I}{S} = en <v> \quad (3)$$

Плотность тока это вектор \bar{j} численно равный силе тока dI через площадку dS_L перпендикулярную к направлению носителей в данной точке, отнесённую к величине этой площадки.

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_L} \bar{n} \quad (2)$$

Поле вектора \bar{j} можно изобразить с помощью линий тока, которые строятся также, как и линии \bar{E} .

Если: $<\bar{v}>$ — средняя скорость упорядоченного движения носителей;

n ; $[m^{-3}]$ — концентрация носителей с зарядом e , то за время dt через поперечное сечение S проводника переносится заряд

$$dQ = ne <v> S dt$$

$$\frac{dQ}{dt} = ne <v> S$$

$$\frac{I}{S} = ne <v>$$

$$\bar{j} = ne <\bar{v}> \quad (3)$$

Это формула плотности тока в металлическом пр-ке.

Зная вектор плотности тока в каждой точке
пространства, можно найти силу тока через любую
поверхность :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Т.о. сила тока есть поток вектора плотности тока
через поверхность S .

$$[j] = [A/m^2]$$

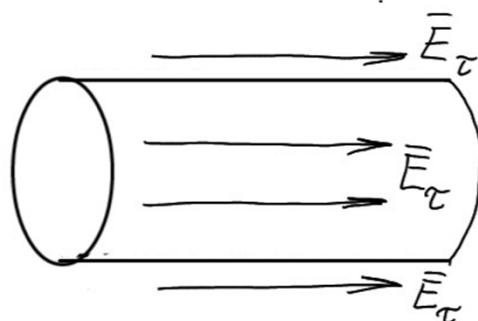
1.20 Закон Ома. Сопротивление проводников

1) Роль ЭДС при протекании постоянного тока.

Чтобы в проводнике поддерживать постоянный ток, в цепь включают источник сторонних сил - ЭДС, который разделяет положительные и отрицательные заряды внутри себя. ЭДС не создаёт поле внутри проводника, а обеспечивает такое распределение поверхностных зарядов на проводнике, которое создаёт нужное электрическое поле в проводнике.

В соответствии с граничными условиями:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$



Поскольку в проводнике при наличии постоянного тока

$\bar{E} \neq 0$, то потенциал вдоль проводника изменяется

и $\varphi \neq \text{const}$ во всех точках внутри проводника в

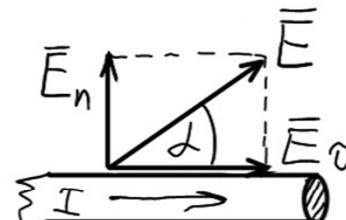
отличие от электростатики. Т.к. поверхность

проводника уже не эквипотенциальна, то поле \bar{E} не

перпендикулярно поверхности проводника. Линии

поля вне проводника наклонены в направлении тока

под углом α , причем



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_n}{E_r}$$

Такое электрическое поле обеспечивает существование тока в проводнике.

2) Закон Ома в интегральной форме - эмпирический закон.

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

$[R] = [O_m]$ сопротивление проводника равно

1 Ом, если при напряжении на этом проводнике в 1 В

текут ток 1 А.



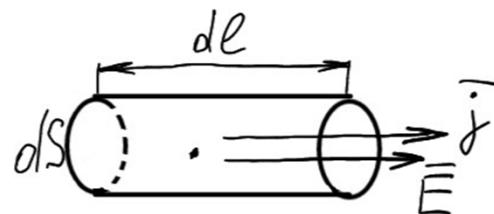
Сопротивление зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан.

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$[\rho] = [O_m \cdot m]$$

3) Закон Ома в дифференциальной форме.

Найдем связь между векторами \vec{j} и \vec{E} в одной и той же точке проводника. Выделим в окрестности некоторой точки элементарный цилиндр.



$j dS$ - сила тока через поперечное сечение цилиндра;

$E dl$ - напряжение, приложенное к цилинду;

$\rho \frac{dl}{dS}$ - сопротивление элементарного цилиндра, то, подставив все выражения в (1), получим:

$$j dS = \rho \frac{dl}{dS} E dl \Rightarrow j = \frac{1}{\rho} E \quad (3)$$

Воспользуемся тем, что векторы \vec{j} и \vec{E} имеют одинаковые направления и запишем (3):

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \beta \vec{E}} \quad (4)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \quad \text{- удельная электророводность } [O_m^{-1} \cdot M^{-1}]$$

Это закон Ома в дифференциальной форме (4).

4) Температурная зависимость удельного сопротивления.

ρ и β определяются химической природой вещества и температурой, при которой оно находится. Для большинства металлов при температурах, близких к комнатным:

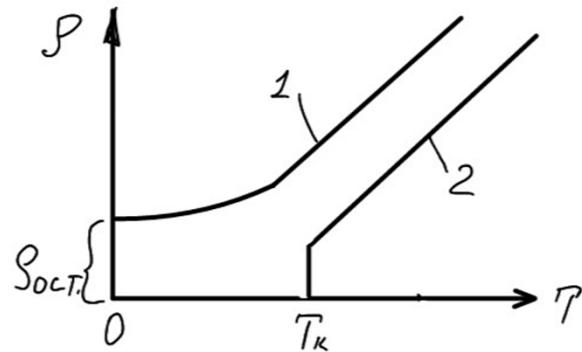
$$\boxed{\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)} \quad (5)$$

ρ_0 - удельное сопротивление металла при $0^\circ C$;

t - температура в $^\circ C$;

α - температурный коэффициент сопротивления. $[1/град]$

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} \quad (6)$$



1 - Зависимость $\rho(T)$ для большинства металлов;
2 - Для большой группы металлов и сплавов при температуре в несколько К сопротивление обрывается в "0". Это явление сверхпроводимости обнаружено в 1911 г. Каммерлингом и Онесом для ртути (Hg).

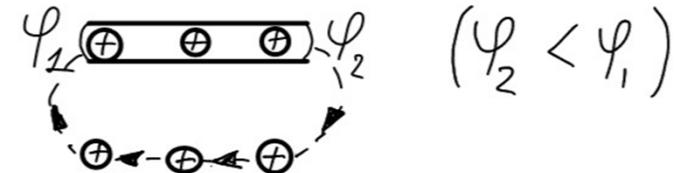
1.21 Электродвижущая сила

1) ЭДС или стороные силы могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей тока в неоднородной среде или через границу двух разнородных веществ и т.д.

Величина, равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется электродвижущей силой E , действующей на участке цепи или в замкнутой цепи.

$$E = \frac{A}{q} \quad | \quad (1)$$

Размерности ЭДС и потенциала одинаковы.



2) Стороннюю силу \bar{F}_{cm} , действующую на заряд можно представить в виде:

$$\bar{F}_{cm} = \underbrace{\bar{E}^*}_{\text{напряженность поля сторонних сил.}} \cdot q \quad (2)$$

\bar{E}^* - напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил над зарядом на участке 1-2 равна

$$A_{1-2} = \int_1^2 \bar{F}_{cm} d\bar{l} = q \int_1^2 \bar{E}^* d\bar{l} \quad (3) | : q$$

$$E_{12} = \int_1^2 \bar{E}^* d\bar{l} \quad (4)$$

В замкнутом контуре циркуляция вектора напряженности сторонних сил равна ЭДС:

$$\oint \bar{E}^* d\bar{l} \quad (5)$$

2) Если в цепи, кроме сторонних сил, на заряд действуют силы электростатического поля $\bar{F}_e = q \bar{E}$,

то результирующая сила, действующая на заряд q в

$$\bar{F} = \bar{F}_e + \bar{F}_{cm} = q(\bar{E} + \bar{E}^*). \quad (6)$$

Тогда работа этой силы, совершаемая на участке цепи

(1-2):

$$A_{12} = q \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} + q \int_1^2 \bar{E}^* d\bar{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}_{12} \quad (7)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением \mathcal{U} на данном участке цепи.

$$\boxed{\mathcal{U}_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}_{12}} \quad (8)$$

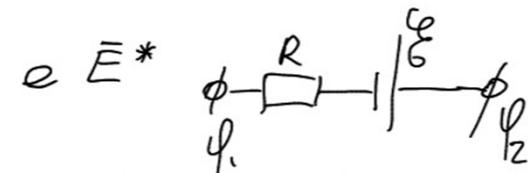
Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Для однородного участка цепи

$$\mathcal{U}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

1.22 Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи на носители тока действуют кроме электростатических сил ($e\bar{E}$) действуют сторонние силы:



Поэтому в з-не Ома в дифференциальной форме появляется напряжённость поля сторонних сил:

$$\bar{j} = \mathcal{Z}(\bar{E} + \bar{E}^*) \quad (1)$$

Разделим обе части (1) на "сигму" и проинтегрируем по длине от 1 до 2:

$$\int_1^2 \frac{\bar{j}}{\mathcal{Z}} d\bar{l} = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} + \int_1^2 \bar{E}^* d\bar{l}$$

$$\int_1^2 \frac{j}{\mathcal{Z}} d\bar{l} = I \int_S \frac{d\bar{l}}{\mathcal{Z}} = I R_{12}$$

$$\int_1^2 E_e d\ell + \int_1^2 E_e^* d\ell = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

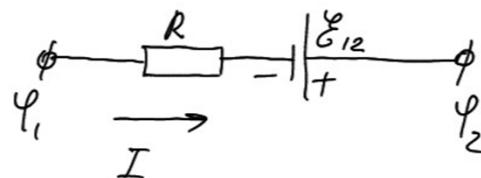
1.23 Закон Джоуля-Ленца

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}}$$

(2)

Это закон Ома для неоднородного участка цепи.



ЭДС > 0 , если она способствует перемещению положительных носителей тока по контуру и ЭДС < 0 , если она препятствует перемещению носителей по контуру.

В случае, если проводник неподвижен и химических превращений в нём нет, то работа тока, протекающего в нём, расходуется на увеличение энергии проводника, в результате чего он нагревается.

При протекании тока в проводнике в нём выделяется тепло:

$$Q = UIt = \frac{U^2}{R} t = I^2 R t \quad (1)$$

$$Q = I^2 R t \quad (2)$$

Соотношение (2) было установлено экспериментально Джоулем и независимо от него Ленцем. (1) и (2) это з-н Джоуля - Ленца в интегральной форме.

Чтобы получить этот закон в дифференциальной форме, рассмотрим элементарный цилиндр:

$$dQ = R I^2 dt = \frac{\rho d\ell}{S} (j ds) dt = \rho j^2 dV dt$$

$$Q_{yg} = \rho j^2 \quad (3)$$

$$[Q_{yg}] = \left[-\frac{\vartheta_{ac}}{M^3 \cdot C} \right] = \left[\frac{\beta m}{M^3} \right]$$

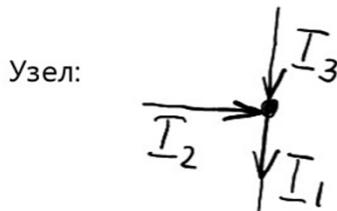
Это удельная тепловая мощность, т.е. количество тепла, выделяющееся в единице объёма в единицу времени.

1.24 Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвленных цепей сильно упрощается, если воспользоваться правилами Кирхгофа.

1) Первое правило Кирхгофа: **алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.**

$$\boxed{\sum I_k = 0} \quad (1)$$



$$I_2 + I_3 - I_1 = 0$$

Это правило отражает закон сохранения заряда.

Входящие токи со знаком "+" ($I > 0$).

Выходящие токи со знаком "-" ($I < 0$).

Если узлов N , то независимых уравнений можно составить $(N-1)$.

2) Второе правило Кирхгофа: **в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в контур.**

Рассмотрим замкнутый контур и применим к каждому неразветвленному участку закон Ома.

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0$$

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_2 - \varphi_1 + E_1 \\ -I_3 R_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - E_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{+} \\ \text{-} \end{array} \right\}$$

При сложении ур-й потенциалы сокращаются.

$$\boxed{\sum I_k R_k = \sum E_k} \quad (2)$$

При составлении уравнений по 2 правилу Кирхгофа токам и ЭДС нужно присваивать знаки в соответствии с направлениями обхода контура. Знаки ЭДС: если при обходе контура внутри источника переход от "-" к "+", то $\varphi > 0$, если наоборот, то $\varphi < 0$.
По 2 правилу также можно составить $(N-1)$ независимое уравнение.

Пример 1 Разветвленная цепь

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$-I_1 R_3 - I_1 R_1 - I_1 R_2 + I_2 R_4 = E_1 - E_2 - E_5$$

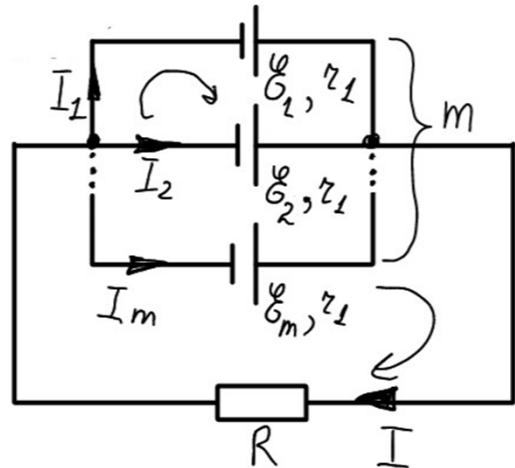
$$-I_2 R_4 + I_3 R_5 = E_3 + E_4 + E_5$$

Пример 2. Последовательное соединение источников тока

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = \dots = \varphi_n \\ z_1 &= z_2 = \dots = z_n \\ I(nz_1 + R) &= nE_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi = n\varphi_1 ; z = nz_1}$$

Пример 3. параллельное соединение источников



$$\begin{aligned} 1) & E_1 = E_2 = \dots = E_m \\ & Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m \\ 2) & E_1 > E_2 > \dots > E_m \\ & Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m \\ & E = E_1 \\ & Z = Z_1 \end{aligned}$$

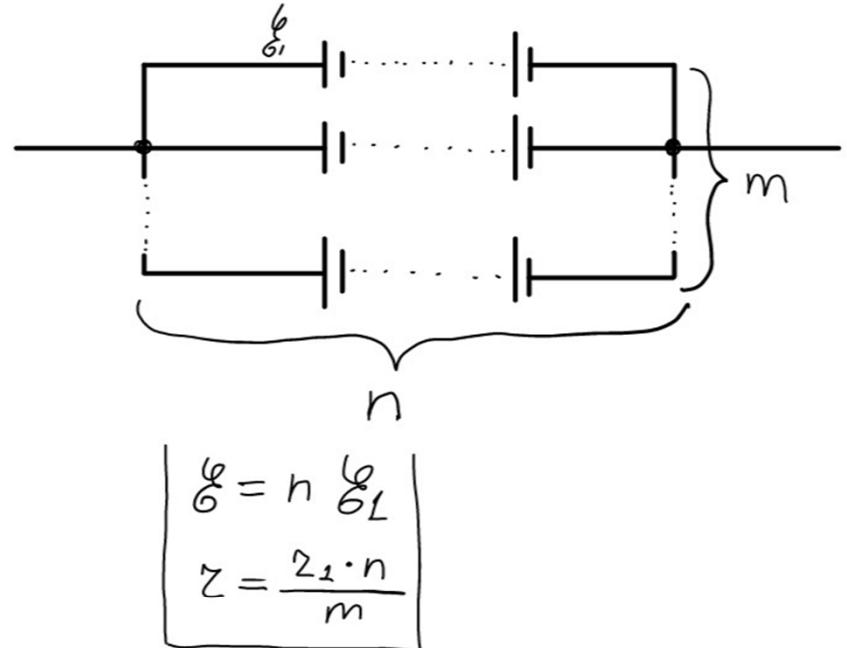
$$\left. \begin{aligned} 1) & I = I_1 + I_2 + \dots + I_m \\ & Z_1 I_1 - I_2 Z_1 = E_1 - E_2 = 0 \\ & I_2 Z_1 - I_3 Z_1 = 0 \\ & \dots \\ & I_{m-1} Z_1 - I_m Z_1 = 0 \\ & I R + I_m Z_1 = E_1 \end{aligned} \right\}$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I/m$$

$$I(R + \frac{Z_1}{m}) = E_1$$

$$\boxed{E = E_L; \quad Z = \frac{Z_1}{m}}$$

Пример 3. Смешанное соединение источников



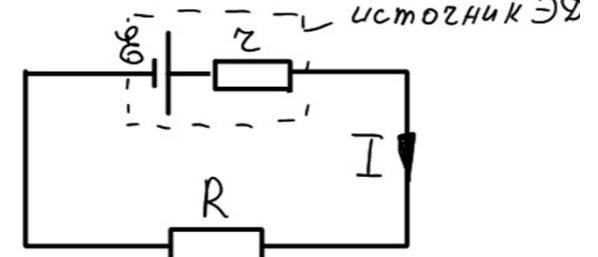
$$\boxed{\begin{aligned} E &= n E_L \\ Z &= \frac{Z_1 \cdot n}{m} \end{aligned}}$$

1.25 Мощность во внешней цепи и КПД

источника тока

Замкнутая цепь:

$$(1) \boxed{I = \frac{E}{R+Z}}$$

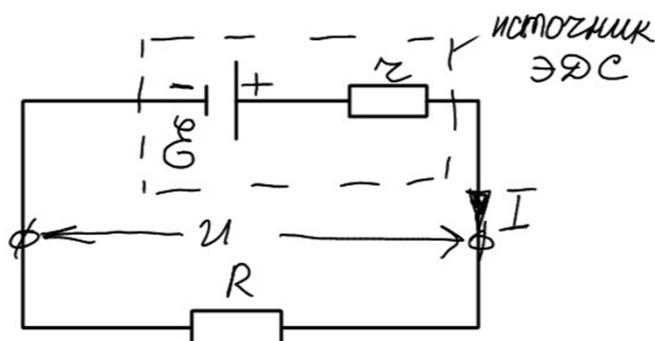


R - внешнее сопротивление, сопротивление

нагрузки, полезное сопротивление.

1.25 Мощность во внешней цепи и КПД источника тока

Замкнутая цепь или полная цепь:



Закон Ома для замкнутой цепи:

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}} \quad (1)$$

r - внутреннее сопротивление источника; R - внешнее сопротивление, сопротивление нагрузки, полезное сопротивление.

Полная мощность, выделяющаяся во всей цепи:

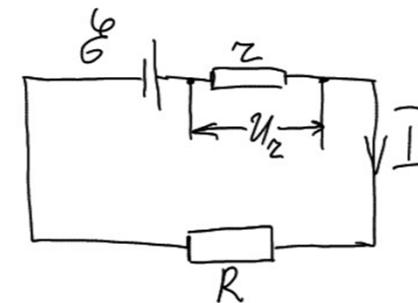
$$P = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} = I^2(R+r) \quad (2)$$

Мощность, выделяющаяся в нагрузке, или полезная мощность:

$$P_e = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \quad (3)$$

Мощность, выделяющаяся на внутреннем сопротивлении источника или мощность потерь:

$$P_i = U_z I = \frac{U_z^2}{r} = I^2 r \quad (3)$$



1) Предположим, что вовнешней цепи мы хотим получить максимальную мощность, возможную при данном источнике.

$$P_e = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+z)^2} R$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_e}{dR} &= \mathcal{E}^2 \frac{(R^2 + 2Rz + z^2) - R(2R + 2z)}{(R+z)^4} = \\ &= \mathcal{E}^2 \frac{(R^2 + 2Rz + z^2 - 2R^2 - 2Rz)}{(R+z)^4} = \\ &= \mathcal{E}^2 \frac{(z^2 - R^2)}{(R+z)^4} = 0\end{aligned}$$

$$(z^2 - R^2) = 0 \Rightarrow R = z$$

$$\boxed{P_e = P_{e\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4z}}$$

при $R = z$

2) Однако, важно не только получить максимальную мощность во внешней цепи, но и КПД. Мощность, теряемая внутри источника:

$$P_i = I^2 z$$

Тогда полная мощность источника:

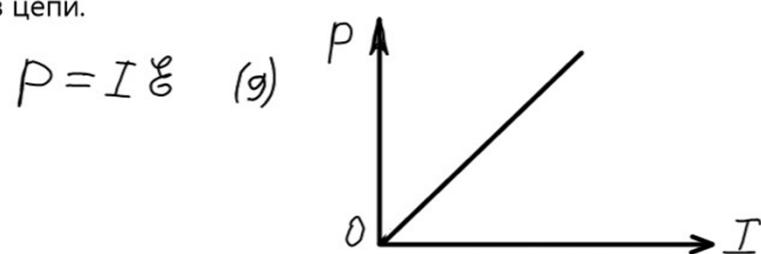
$$P = P_e + P_i = I^2 R + I^2 z = \mathcal{E} I \quad (7)$$

Тогда КПД источника:

$$\eta = \frac{P_e}{P} = \frac{U}{\mathcal{E}} \quad (8)$$

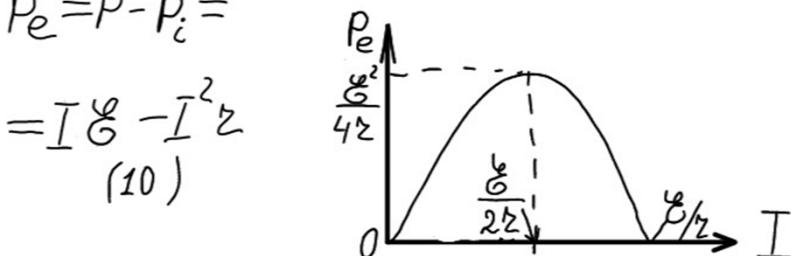
т.к. $U < \mathcal{E}$, то и $\eta < 1$.

3) Рассмотрим, как зависят полная мощность (P), полезная мощность (P_e) и КПД (η) от силы тока (I) в цепи.



$$P = I \mathcal{E} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}P_e &= P - P_i = \\ &= I \mathcal{E} - I^2 z\end{aligned} \quad (10)$$



$$I(\mathcal{E} - IZ) = 0$$

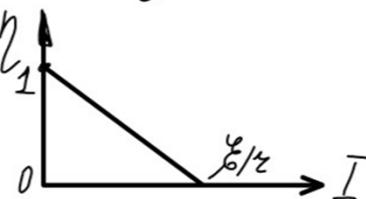
$I_2 = 0$ - разомкнутая цепь ($R \gg Z$)

$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{Z}$ - короткое замыкание ($R \ll Z$).

$$\eta = \frac{P_e}{P} = \frac{I\mathcal{E} - I^2Z}{I\mathcal{E}} = 1 - \frac{Z}{\mathcal{E}}I \quad (11)$$

$\eta_{max} = 1$ разомкнутая цепь

$\eta = 0$ - к. з.



Объединим все три графика.

Условие получения

$P_{e_{max}}$ и условие η_{max} не совместны.

Когда $P_e = P_{e_{max}}$, $Z = \frac{1}{2} = 50\%$.

Когда $\eta = 1$,

полезная мощность P_e мала по сравнению с $P_{e_{max}}$

В силовых установках важнейшим требованием

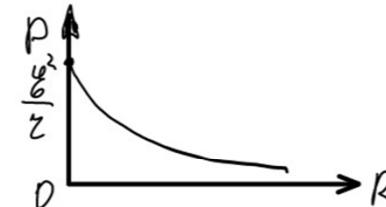
является η_{max} , а для этого:

$$\frac{ZI}{\mathcal{E}} = \frac{IZ}{I(R+Z)} = \frac{Z}{(R+Z)} \ll 1 \Rightarrow \underline{\underline{Z \ll R}} !$$

Когда выполняется условие малости внутреннего сопротивления по сравнению с внешним, P_e мало по сравнению с P_e . В случае к. з. вся мощность выделяется на внутреннем сопротивлении источника, что может привести к перегреву и выходу источника из строя.

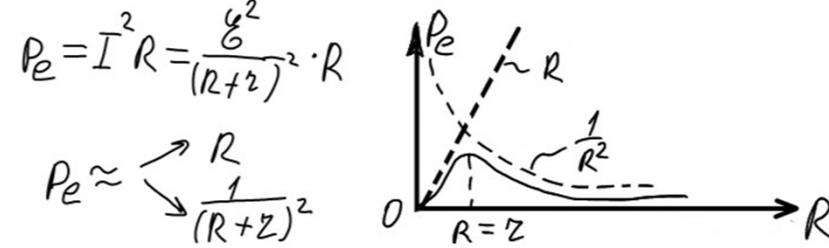
4) Зависимости полной мощности P , полезной мощности P_e и КПД η от сопротивления нагрузки R .

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R+Z}$$

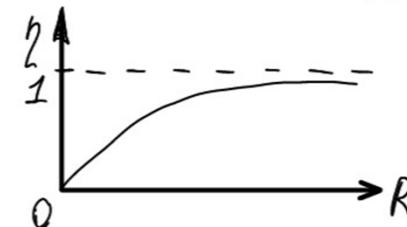


$$P_e = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+Z)^2} \cdot R$$

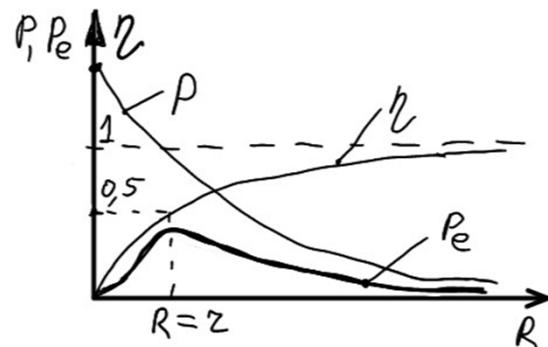
$$P_e \approx \frac{R}{(R+Z)^2}$$



$$\eta = \frac{P_e}{P} = \frac{I^2 R}{I^2 (R+Z)} = \frac{R}{R+Z} = \frac{1}{1 + \frac{Z}{R}}$$



Объединим все три графика.



1.26 Измерение сопротивлений с помощью моста

Уитстона

Самый простой способ измерить сопротивление - это взять амперметр и вольтметр: $R = \mathcal{U}/I$.

Если током вольтметра пренебречь нельзя, то

$$I = I_A - I_V.$$

Ток вольтметра можно определить, зная

сопротивление вольтметра.

Точность такого метода определяется точностью амперметра и вольтметра и обычно не велика $\sim 1\%$.

Поэтому для точных измерений следует использовать метод, не требующий измерений I и \mathcal{U} .

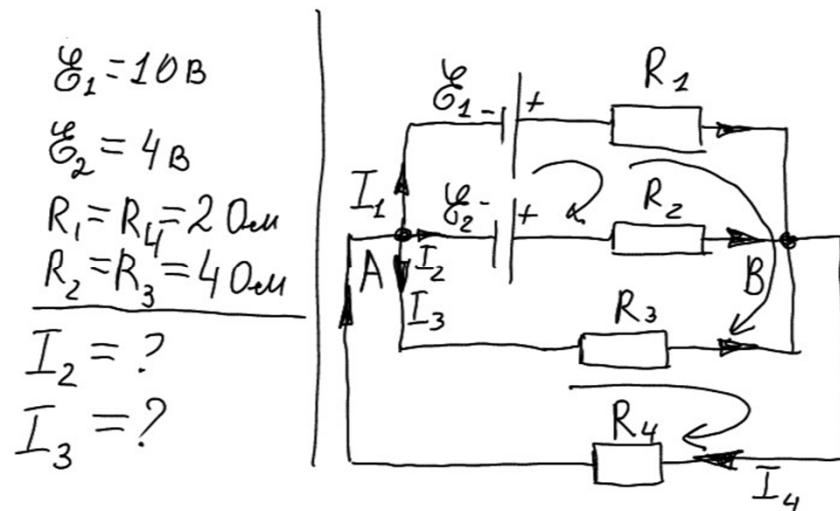
Задача 1

Заряженный воздушный конденсатор достаточно быстро погружается в среду с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти время разряда конденсатора.

$$\frac{\epsilon}{\tau = ?} \left| \begin{array}{l} j = \frac{\bar{E}}{\rho}; \quad j = \frac{dI}{dS} \cdot h \\ I = \int j dS = \frac{1}{\rho} \int \bar{E} dS = \\ = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0 \rho} \quad \int \bar{E} dS = \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0} \\ I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{CR} \quad C = \frac{Q}{U} \\ \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0 \rho} = \frac{Q}{CR}; \quad CR = \epsilon \epsilon_0 \rho \\ \tau = CR = \epsilon \epsilon_0 \rho \end{array} \right.$$

Задача 2

Источники тока с ЭДС1 и ЭДС2 включены в цепь, как показано на рис. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях R_2 и R_3 , если ЭДС1 = 10В и ЭДС2 = 4В, а $R_1 = R_2 = 2$ Ом $R_2 = R_3 = 4$ Ом. Сопротивлениями источников тока пренебречь.



Для узла B:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 &= 0 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 &= G_1 - G_2 \\ I_2 R_2 - I_3 R_3 &= G_1 \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \\ 2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 = 6 \\ 2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 = 10 \\ 0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$I_1 = 3 \text{ A} ; \quad I_4 = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = 0 , \quad I_3 = -1 \text{ A}$$

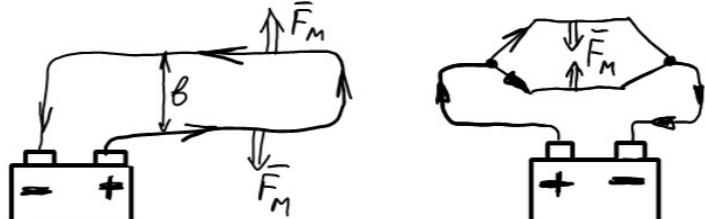
Лекция _3

1.29 Магнитная сила

Магнитные силы проявляются на практике там, где есть постоянные магниты, электромагнитные катушки, отклоняющие системы кинескопов. Все проявления магнитной силы можно свести к фундаментальным взаимодействиям между движущимися зарядами или между токами, (поскольку движущийся заряд представляет собой ток).

Еще в 1820 г. Ампером было установлено, что два проводника с током взаимодействуют друг с другом в соответствии с законом:

$$\boxed{F_{eq.} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{R}} \quad (1)$$



Если $I_1 = I_2$, то $F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I^2}{R}$ (2)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Формулы (1) и (2) эмпирические и записаны для токов.

однако одиночный движущийся заряд это тоже элементарный ток, поэтому вначале рассмотрим силы, действующие на элементарный заряд.

а) Если заряд не движется, то на него действует только Кулоновская сила:

$$V = 0; \quad \bar{F} = q \bar{E}$$

б) Если заряд движется, то на него начинает действовать дополнительная сила \bar{F}_M , которая, как показывает опыт $\sim qV$.

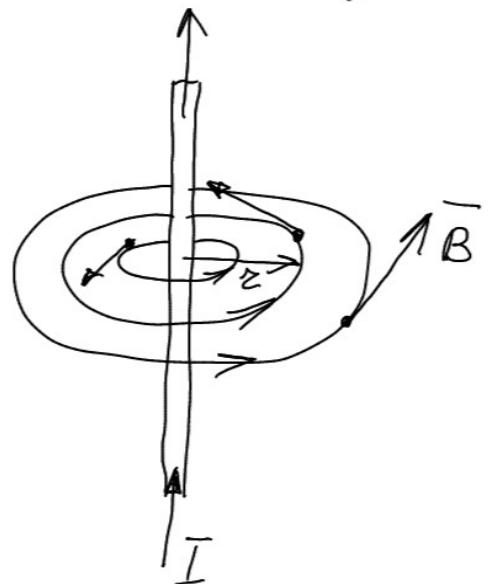
$$\bar{V} \neq 0; \quad \bar{F} = q \bar{E} + \bar{F}_M \quad (3)$$

Магнитная сила \bar{F}_M - не является новой фундаментальной силой природы, а представляет собой просто релятивистское следствие закона Кулона.

$$\boxed{F_M = qE \frac{V^2}{C^2}} \quad (4)$$

$$C = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

Беск. длинны, прямолинейный проводник с током.



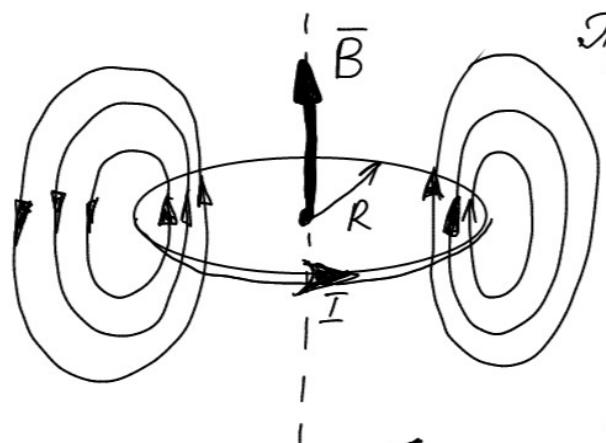
$$B = \frac{\mu_0 M_0 I}{2\pi r}$$

$$[B] = [T_A]$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0 M_0}$$

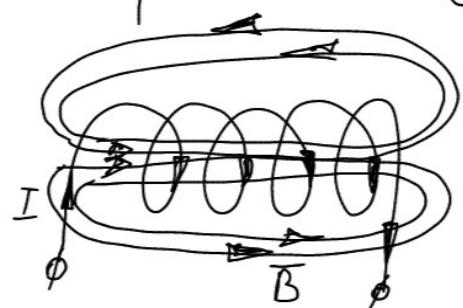
$$[H] = \left[\frac{A}{m} \right]$$

Проводник в виде кольца с током



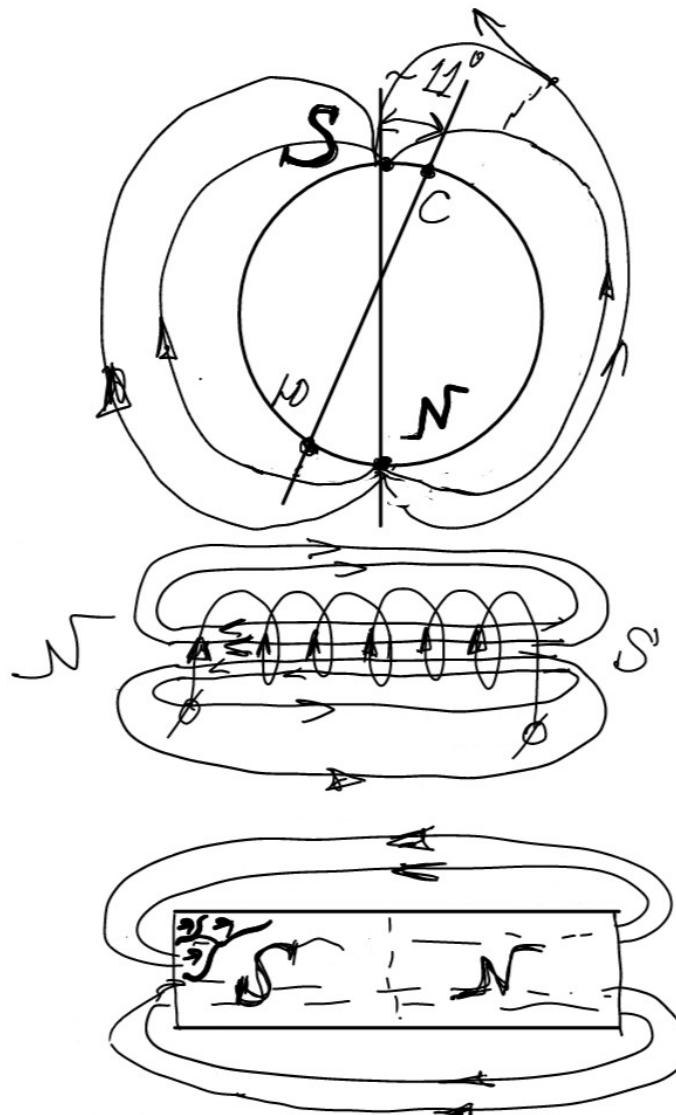
$$B = \frac{\mu_0 M_0 I}{2R}$$

Сolenoid



$$B = \mu_0 M_0 I n$$

Магн. поле Земли, солнечного, постоянного магнита



Лекция 2с_4

Продолжение магнетизма

1.30 Магнитное поле движущегося

точечного заряда

Аналогично тому, как мы определили электрическое поле как отношение электростатической силы к величине заряда, можно определить магнитное поле \bar{B} , как отношение магнитной силы к величине $q\bar{v}$, т.е. к величине элементарного тока:

$$\left| \bar{B} = \frac{\bar{F}_M}{q\bar{v}} \right| \quad (1)$$

$$[\bar{B}] = [\text{T}_A]$$

$$\bar{E} \equiv \bar{B}$$

$$\bar{\vartheta} \equiv \bar{H}$$

\bar{B} - это магнитная индукция, которая является силовой характеристикой поля, величина векторная.

Название же "напряженности магнитного поля" оказалось присвоенным вспомогательной величине \bar{H} , аналогичной вспомогательной характеристике $\bar{\vartheta}$ электростатического поля.

$$\bar{\vartheta} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu_0 M \bar{H}$$

$$[H] = \left[\frac{A}{M} \right]$$

Определим значение индукции магнитного поля движущегося точечного заряда.

$$F_M = q E \frac{\bar{v}^2}{c^2} ; \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{z^2}$$

$$\bar{F}_M = q \bar{v} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{v} \cdot Q}{c^2 z^2}$$

F_M связана с движением и равна "0" при $\bar{v} = 0$.

Кроме того, в СИ

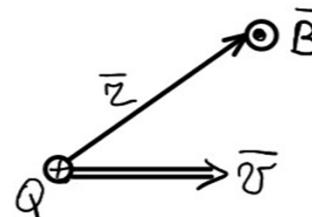
$$M_0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\epsilon_0 M_0} = C^2} \quad (2)$$

где C - электродинамическая постоянная, имеющая размерность (м/с) и численно равная скорости света в вакууме.

$$B = \frac{F_M}{q\bar{v}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 C^2} \cdot \frac{Q\bar{v}}{z^2}$$

$$\boxed{|\bar{B}| = \frac{M_0}{4\pi} \cdot \frac{Q\bar{v}}{z^2}} \quad (3)$$

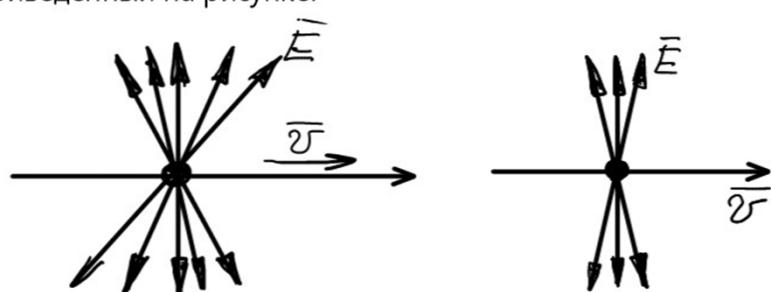
В векторном виде:



$$\boxed{\bar{B} = \frac{M_0}{4\pi} \cdot \frac{Q[\bar{v} \times \bar{z}]}{z^3}} \quad (4)$$

Из (4) вытекает, что в каждой точке пространства магнитная индукция \bar{B} направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через $\bar{\sigma}$ и данную точку пространства и направлена по правилу векторного перемножения векторов. (Если смотреть в "хвост" вектора \bar{B} , то поворот вектора $\bar{\sigma}$ к \bar{z} осуществляется по кратчайшему расстоянию по часовой стрелке).

При движении заряда электрическое поле теряет сферическую симметрию и становится осесимметричным. Рассчёт с учётом релятивистских эффектов показывает, что линии поля имеют вид, приведенный на рисунке.



$$\text{при } \frac{v}{c} = \frac{4}{5}$$

$$\text{при } v \approx c$$

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: поле \bar{B} , порождаемое несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей \bar{B}_i порождаемых каждым зарядом в отдельности.

$$\boxed{\bar{B} = \sum \bar{B}_i} \quad (5)$$

1.31 Закон Био-Савара-Лапласа

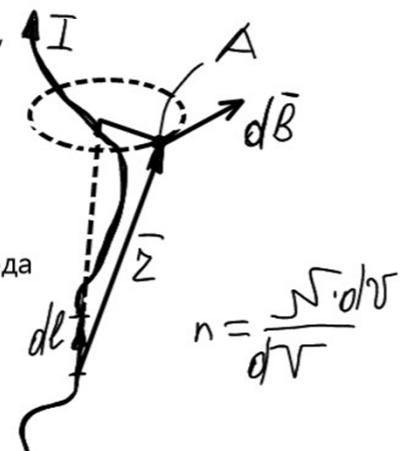
Это один из основных законов магнитостатики.

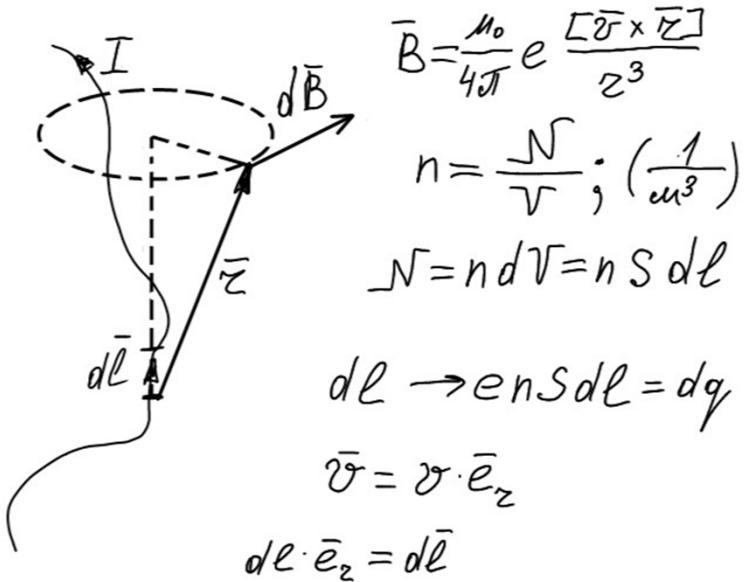
Закон определяет магнитное поле, создаваемое произвольным тонким проводом, по которому течет ток.

Рассмотрим малый элемент провода длиной $d\ell$. $n S d\ell$ - число носителей тока, содержащихся в элементе $d\ell$.

В точке, положение которой относительно элемента определяется радиус-вектором \bar{z} , отдельный носитель тока e создаёт поле с индукцией

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{[\bar{\sigma} \times \bar{z}]}{r^3} \quad (1)$$





$$\begin{aligned}
 d\bar{B} &= B n \cdot S d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} e n S d\ell \frac{[\bar{\sigma} \times \bar{z}]}{z^3} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} e n S d\ell \frac{[\sigma \bar{e}_z \times \bar{z}]}{z^3} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma e n S \frac{[d\ell \times \bar{z}]}{z^3} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} j s \frac{[d\ell \times \bar{z}]}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\ell \times \bar{z}]}{z^3}
 \end{aligned}$$

Полный заряд в элементе тока $d\ell$ равен $e n S d\ell$. Учтём, что $\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_z$ и $d\ell \bar{e}_z = d\ell$, то индукция $d\bar{B}$, создаваемая элементом $d\ell$:

$$d\bar{B} = \bar{B} n S d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma n S e \frac{[d\ell \times \bar{z}]}{z^3} \quad (2)$$

$$e n \sigma = j \quad ; \quad j S = I$$

$$\boxed{d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\ell \times \bar{z}]}{z^3}} \quad (3)$$

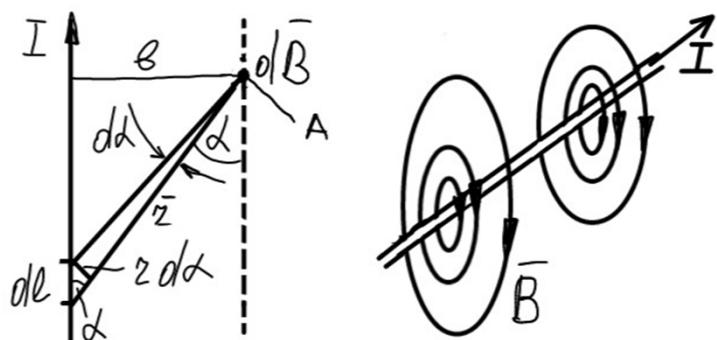
Это и есть закон Био-Савара-Лапласа, который первоначально был получен эмпирически Био и Саваром, а затем Лаплас проанализировал экспериментальные данные и получил формулу (3). Из (3) видно, что вектор $d\bar{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $d\ell$ и точку, в которой вычисляется поле. Модуль определяется выражением:

$$\boxed{d|B| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin \theta}{z^2}} \quad (4)$$

1.32 Применение закона Био-Савара-

Лапласа

Пример 1. Поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}$$

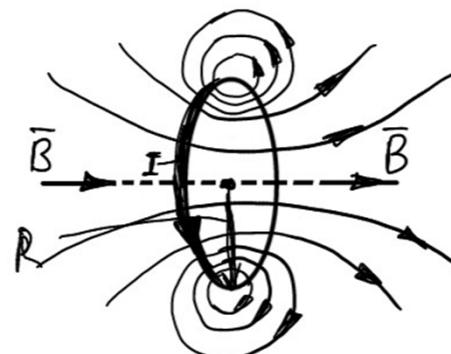
$$r = \frac{b}{\sin \theta}; \quad dl = \frac{z d\theta}{\sin \theta} = \frac{b d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot b \sin \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta \cdot b^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta dl}{b} \quad (1)$$

$$B = \int dl B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

Пример 2. Поле кругового тока (витка с током радиусом R)

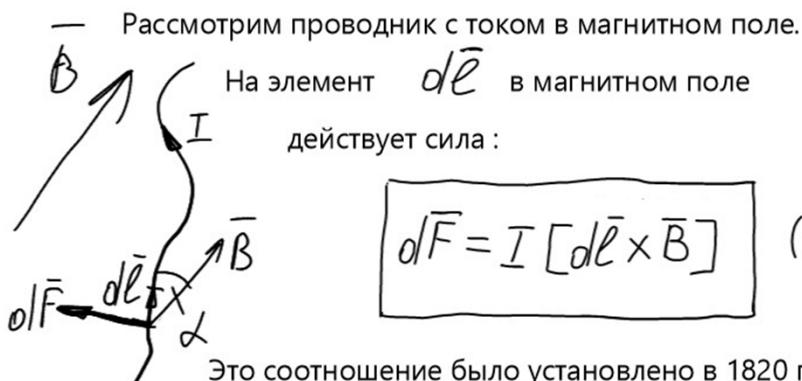


$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2} \end{aligned}$$

$$B = \int dl B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

1.32 Закон Ампера



Это соотношение было установлено в 1820 г.

экспериментально французским физиком Ампером.

модуль силы вычисляется по формуле:

$$\underline{dF = IB d\ell \sin \angle} \quad (2)$$

$$\angle = \angle d\ell; \vec{B}$$

Направлена сила Ампера перпендикулярно плоскости, в которой лежат $d\ell$ и \vec{B} . Однако, можно воспользоваться и правилом левой руки. Используя



$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r}$$

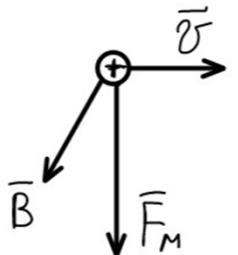
$$F_{21 eq.} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{r}$$

1.33 Сила Лоренца

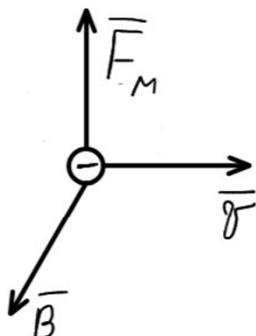
На заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила, которую мы называем магнитной.

Из определения

$$\bar{B} = \frac{\bar{F}_M}{q v} \Rightarrow \boxed{\bar{F}_M = q [\bar{v} \times \bar{B}]}$$



$$F_M = q v B \sin \angle$$



$$A = \bar{F}_M / \bar{S}$$

$$\boxed{\bar{F}_L = q \bar{E} + q [\bar{v} \times \bar{B}]}$$

Это сила Лоренца. Т.к. \bar{F}_M перпендикулярна \bar{v} , то она не совершает работу. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, нельзя изменить ее энергию.

Найдем связь между силой Лоренца и силой Ампера.

$$F_A = I \ell B \sin(\bar{v}; \bar{B})$$

$$I \ell = N q v e$$

$$I = j S = e n v S$$

$$I \ell = e n v S \ell = e \frac{N}{S \ell} v S \ell$$

$F_A = N q v B \sin(\bar{v}; \bar{B})$ - это сила, действующая на N зарядов в проводнике (на весь проводник). На 1 заряд действует магнитная сила:

$$F_M = \frac{F_A}{N} = q v B \sin \angle$$

Лекция 2с_5

Продолжение магнетизма

1.33 Закон полного тока

1. Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии вектора \mathbf{B} не имеют ни начала ни конца (моноядра Дирака не найдены). Раз зарядов нет, то поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через замкнутую поверхность д.б. равен нулю. Т.о. для любого магнитного поля и для любой замкнутой поверхности:

$$\oint_B \bar{B} d\bar{l} = \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad (1)$$

Теорема Гаусса для замкнутой поверхности.

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Теорема Гаусса в общем виде :

$$\oint_S \bar{B} d\bar{l} = \int_V \nabla \bar{B} dV.$$

Тогда: $\oint_S \bar{B} d\bar{l} = \int_V \nabla \bar{B} dV = 0$

$$\boxed{\nabla \bar{B} = 0} \quad (2)$$

$$(\nabla \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

Теперь обратимся к циркуляции вектора \mathbf{B} .

$\oint \bar{B} d\bar{l}$ — проще всего вычислить для поля прямого тока. Ток I перпендикулярен плоскости и направлен за чертёж. Пунктирная окружность — индукция магнитного поля на расстоянии b ; $d\bar{l}$ — элемент произвольного контура интегрирования.



$$\bar{B} d\bar{l} = B d\bar{l} \cos 90^\circ = B d\bar{l}_B$$

$$d\bar{l}_B = B d\bar{l}$$

$$\bar{B} d\bar{l} = B d\bar{l}_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{b} B d\bar{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\bar{l}$$

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\bar{l}; \quad \oint d\bar{l} = 2\pi$$

$$\boxed{\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 I} \quad (3)$$

3. Допустим, что некоторый контур охватывает несколько проводов с токами, тогда по принципу

$$\oint_{\Gamma} \bar{B} d\bar{\ell} = \oint (\sum_k B_k) d\bar{\ell} = \sum_k \oint B_k d\bar{\ell}$$

Каждый интеграл этой суммы равен $\oint B_k d\bar{\ell} = M_0 I_k$.

$$\oint \bar{B} d\bar{\ell} = M_0 \sum I_k \quad (4)$$

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на M_0 .

$$\oint \bar{B} d\bar{\ell} = M_0 \sum I_k \quad (5)$$

Это закон полного тока - аналог теоремы Гаусса в электрическом поле.

4. Перейдем к дифференциальной форме закона.

Если токи текут во всем пространстве, где расположен контур, то алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром, можно представить в виде:

$$\sum I_k = \int_S j d\bar{S} \Rightarrow (5) \Rightarrow \oint \bar{B} d\bar{\ell} = M_0 \int_S j d\bar{S} \quad (6)$$

По теореме Стокса: $\oint \bar{B} d\bar{\ell} = \int_S [\nabla \bar{B}] d\bar{S}$

$$\int_S [\nabla \bar{B}] d\bar{S} = M_0 \int_S j d\bar{S}$$

$$[\nabla \bar{B}] = M_0 j \quad (7)$$

Распишем ротор \mathbf{B} :

$$[\nabla \bar{B}] = \text{rot } \bar{B} = \bar{e}_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \\ + \bar{e}_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \bar{e}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Теорема Стокса: $\oint \bar{a} d\bar{\ell} = \int_S [\nabla \bar{a}] d\bar{S}$

циркуляция вектора \mathbf{a} по замкнутому контуру равна потоку вектора ротора \mathbf{a} через произвольную поверхность S , ограниченную данным контуром.

5. Сравним полученные формулы с аналогичными для электростатического поля в вакууме. *

Физический смысл уравнений:

Ур.1 - электрическое поле потенциально, работа по замкнутому контуру равна нулю.

Ур.2 - магнитное поле является вихревым.

Ур.3 - Источниками электрического поля являются заряды.

Ур.4 - магнитных зарядов нет.

(*) Итак, мы нашли дивергенцию и ротор магнитного поля

в вакууме. Сравним полученные формулы с
аналогичными для электростатического поля.

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$1. [\nabla \vec{E}] = 0$ $(\text{rot } \vec{E} = 0)$	$\oint \vec{E} d\vec{\ell} = 0$
$2. [\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}$ $(\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j})$	$\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_k$
$3. \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $(\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$	$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}$
$4. \nabla \vec{B} = 0$ $(\text{div } \vec{B} = 0)$	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$

1.34 Применение закона полного тока к расчету магнитных полей

1) Прямой длинный провод

$$z > 0$$

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi z B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}$$

$$z \leq 0$$

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 I$$

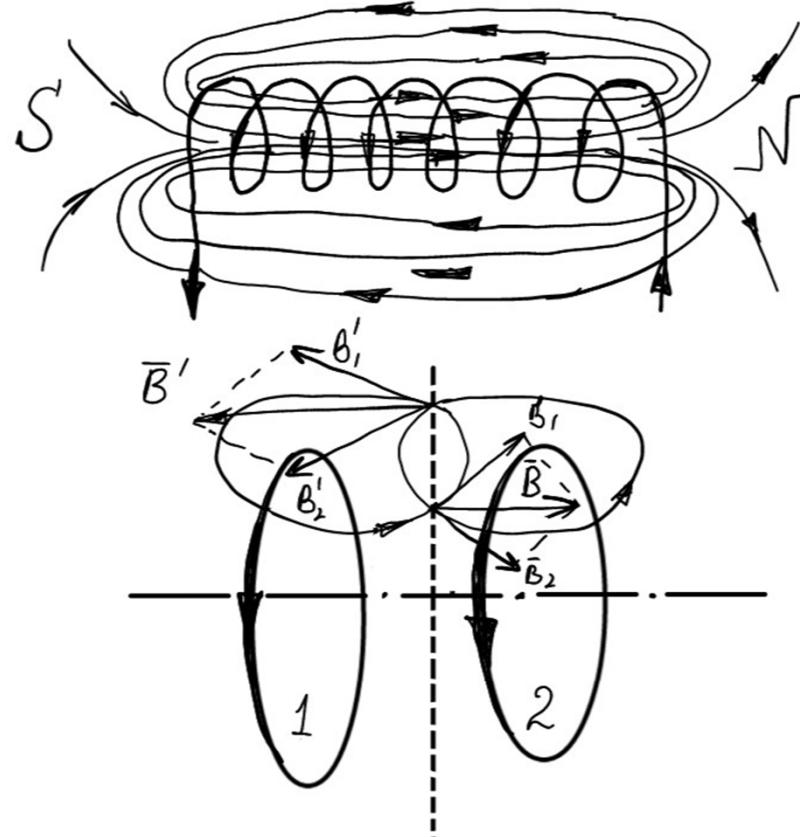
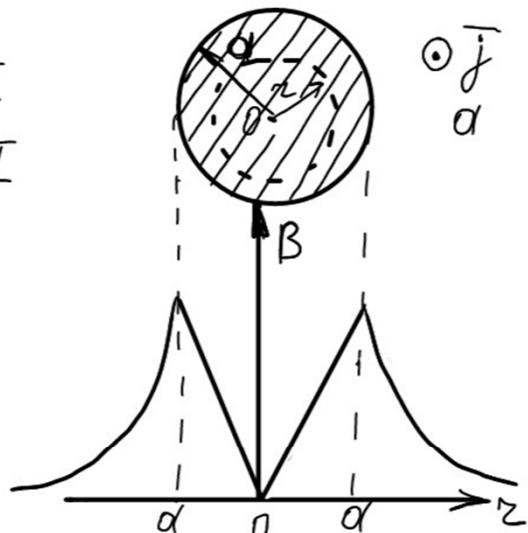
$$2\pi z B = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

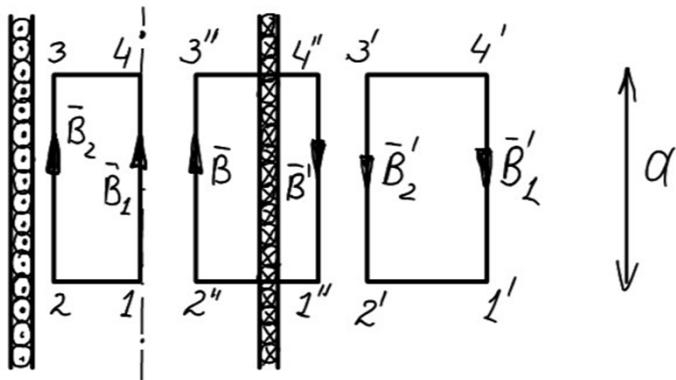
2) Бесконечно длинный соленоид, у которого отсутствует осевая составляющая тока и линейная плотность тока $j_{\text{лин}}$ постоянна по всей длине

$$j_{\text{лин}} = n I.$$

n - число витков на единицу длины .



Каждая пара витков соленоида, расположенных симметрично относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси соленоида, создаёт в любой точке этой плоскости, магнитную индукцию, параллельную оси. Внутри и вне соленоида поле параллельно оси. Поле бесконечного соленоида однородно и ограничено объёмом соленоида.



Контур 1-2-3-4: $\oint \bar{B} d\bar{l} = \alpha(B_2 - B_1) = 0$

т.к. $\sum I_k = 0 \quad B_2 = B_1$

Контур 1'-2'-3'-4': $\oint \bar{B} d\bar{l} = \alpha(B'_1 - B'_2) = 0$

$$B'_1 = B'_2$$

Контур 1''-2''-3''-4'': $\oint \bar{B} d\bar{l} = \alpha(B' + B)$

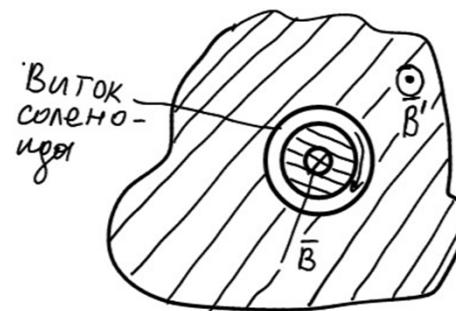
$$\mu_0 \sum I_k = \mu_0 j_{\text{лин}} \cdot a = \mu_0 I n a$$

$$j_{\text{лин}} = n I$$

$$\alpha(B' + B) = \mu_0 I n oI$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

Докажем, что $B' = 0$.



$$BS = B' S'$$

$$S' = \infty \quad B' \rightarrow 0$$

1.35 Магнитный момент тока

Во многих случаях приходится иметь дело с элементарными токами, т.е. с замкнутыми токами, размеры которых весьма малы по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения. Пример подобных токов мы имеем во всех атомах, т.к. в них есть электроны, обращающиеся по замкнутым орбитам.

Пусть есть элементарный круговой ток радиусом R и силой I . Вычислим магнитное поле в некоторой точке на оси на расстоянии Z от его центра.

Оператор набла – к лекции

2с_5

Продолжение магнетизма

Оператор набла

Написание формул векторного анализа сильно упрощается и облегчается, если ввести векторный дифференциальный оператор набла или оператор Гамильтона.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{e}_z \quad (1)$$

Если умножить вектор набла на скаляр, например на потенциал, то получится градиент потенциала:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{e}_z = \text{grad } \varphi \quad (2)$$

Вектор набла, умноженный скалярно на вектор \mathbf{E} , даёт дивергенцию вектора \mathbf{E} :

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div } \bar{E} \quad (3)$$

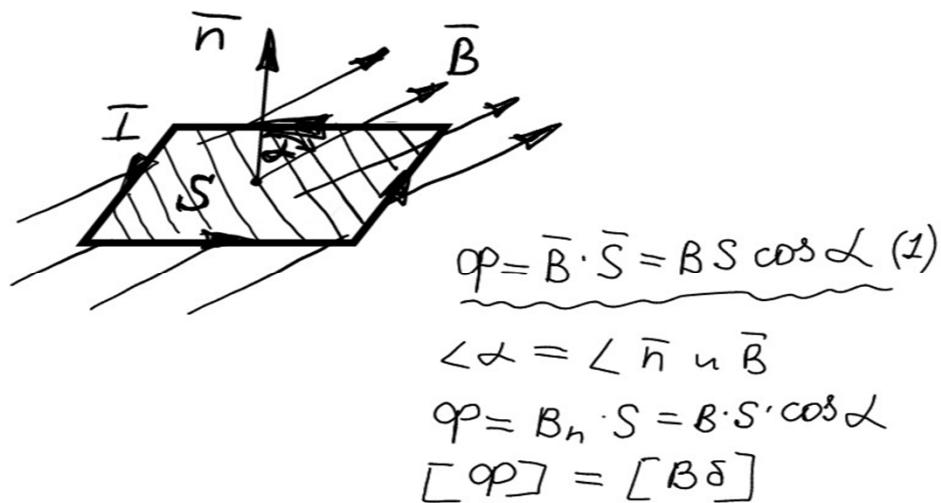
Если умножить вектор набла на вектор \mathbf{E} векторно, то получится ротор \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} [\nabla \times \bar{E}] &= \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \bar{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \\ &+ \bar{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \bar{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= \text{rot } \bar{E} \end{aligned} \quad (4)$$

Лекция_5

1.37 Магнитный поток. Механическая работа в магнитном поле.

Магнитным потоком называется физическая величина, равная скалярному произведению вектора магнитной индукции на площадь контура:



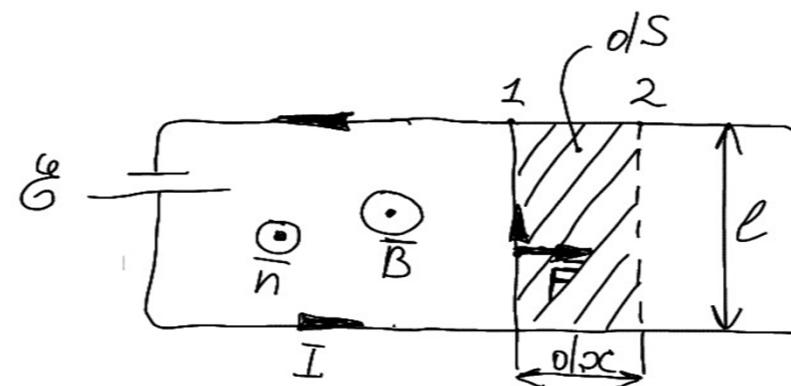
Магнитный поток Φ – это полное число силовых линий B , проходящих через данную поверхность S . Во всех электромагнитных явлениях приходится рассматривать поток в связи с током I , обтекающим контур. Поэтому положительную нормаль связывают с направлением этого тока правилом правого винта. Если поле не однородно, а рассматриваемая поверхность не плоская, то её разбивают на элементы dS , в пределах которых поле можно считать однородным.

$$d\Phi = \bar{B} d\bar{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS \quad (2)$$

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

Найдём работу, совершающую при движении проводника с током в магнитном поле. Предположим, что проводник длиной l в приведённой цепи может перемещаться поступательно параллельно самому себе на отрезок dx и переходит из положения 1 в положение 2. На проводник будет действовать сила Ампера $F = ILB$ и поэтому механическая работа dA выразится формулой:

$$dA = I e B d\alpha = I B dS$$



Если индукция B направлена иначе (не по нормали к плоскости чертежа), то её всегда можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие. А т.к. сила F всегда перпендикулярна B , то тангенциальная составляющая вызовет силу, перпендикулярную к dx , и работа этой силы будет равна нулю. Поэтому в общем случае:

$$dA = \bar{I} B_n dS = \bar{I} d\varphi$$

$$dA = \bar{I} d\varphi \quad (3)$$

dA - работа, совершаемая силами поля; $d\varphi$ - увеличение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром с током. Если проводник совершает конечное перемещение, то :

$$A = \bar{I} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

φ_2 - магнитный поток сквозь контур в конце перемещения, φ_1 - магнитный поток в начале перемещения. Сила тока при этом постоянна.

Работа, совершаемая магнитными силами над контуром, равна произведению силы тока на приращение магнитного потока.

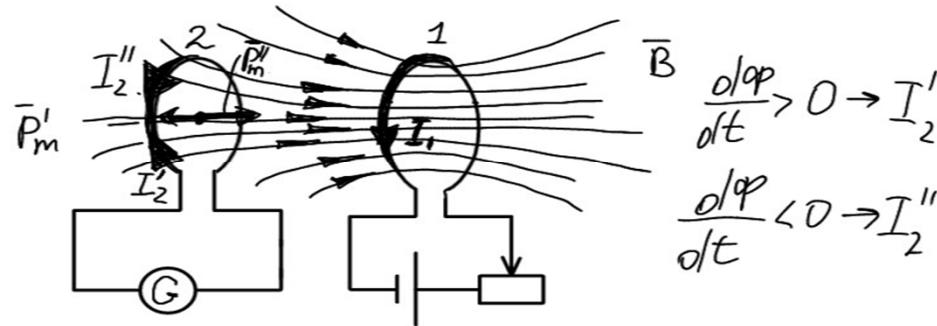
1. 38 Закон электромагнитной индукции Фарадея.

Правило Ленца. ЭДС индукции

В 1831 году Фарадей обнаружил, что **в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление назвали электромагнитной индукцией, а ток индукционным.**

Явление ЭМ индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока в контуре возникает **электродвижущая сила индукции** E_i . Её величина не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока φ , а определяется лишь скоростью изменения φ , т.е. $d\varphi/dt$. При изменении знака $d\varphi/dt$ направление E_i также меняется.

1) Рассмотрим на примерах, как можно изменять магнитный поток.



1 способ. В первом контуре силу тока I_1 можно изменять с помощью реостата. Этот ток создаёт МП, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток I_1 , то поток МИ Φ через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 тока I_2' , регистрируемого гальванометром.

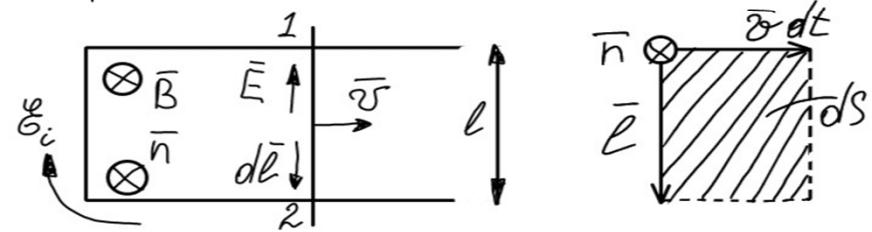
2 способ. Индукционный ток I_2 можно вызвать, приближая контур 2 к контуру 1 или удаляя контур 2 от контура 1. В обоих случаях направление индукционного тока будет противоположно.

3 способ. Контур 2 можно вращать в поле контура 1 так, чтобы изменялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Ленц установил правило, позволяющее найти

направление индукционного тока: **индукционный ток всегда направлен так, чтобы препятствовать причине его вызывающей.**

2) ЭДС индукции. Найдем связь между ЭДС индукции и скоростью изменения МП Φ .



Контур с подвижной перемычкой поместим в однородное МП и приведем перемычку в движение со скоростью \bar{v} . С той же скоростью относительно МП начнут перемещаться электроны в проводящей перемычке. На каждый электрон начнет действовать направленная вдоль перемычки магнитная сила:

$$\bar{F}_{\parallel} = -e [\bar{v} \times \bar{B}] \quad (1)$$

Действие этой силы эквивалентно действию на электроны ЭП напряженностью:

$$\bar{E} = [\bar{v} \times \bar{B}] \quad (2)$$

Это поле не электростатического происхождения. Его

циркуляция по контуру даёт величину индуцируемой ЭДС в этом контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint \bar{E} d\bar{\ell} = \oint [\bar{v} \times \bar{B}] d\bar{\ell} = \int_1^2 [\bar{v} \times \bar{B}] d\bar{\ell} \quad (3)$$

Подинтегральная функция отлична от "0" лишь на образуемом перемычкой участке (1-2).

Чтобы по знаку ЭДС м.б. судить о направлении, в котором действует ЭДС, будем считать её положительной, в том случае, когда её направление образует с направлением нормали к контуру правовинтовую систему. Тогда при вычислении циркуляции нужно обходить контур по часовой стрелке, тогда:

$$\mathcal{E}_i = [\bar{v} \times \bar{B}] \int_1^2 d\bar{\ell} = [\bar{v} \times \bar{B}] \bar{\ell} \quad (4)$$

Осуществим в (4) циклическую перестановку, после чего умножим и разделим на $d\bar{t}$:

$$\mathcal{E}_i = \bar{B} [\bar{\ell} \times \bar{v}] = \frac{\bar{B} [\bar{\ell} \times \bar{v} d\bar{t}]}{d\bar{t}} \quad (5)$$

Из рисунка: $[\bar{\ell} \times \bar{v} d\bar{t}] = -\bar{n} dS$, где dS - приращение площади контура за время $d\bar{t}$. Тогда поток через элементарную площадку dS :

$$d\varphi = \bar{B} [\bar{\ell} \times \bar{v} d\bar{t}] = -\bar{B} \bar{n} dS$$

С учётом этого (5) можно представить в виде:

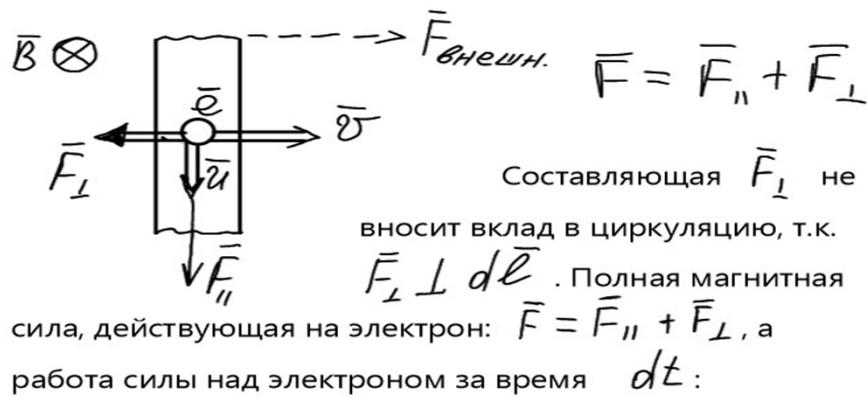
$\mathcal{E}_i = -\frac{d\varphi}{dt}$

(6)

Это з-н ЭМ индукции Фарадея.

В рассуждениях, которые привели нас к формуле (6), роль сторонних сил, поддерживающих ток в контуре, играют магнитные силы. Работа этих сил над единичным положительным зарядом, равная по определению ЭДС, отлична от "0". Это находится в кажущемся противоречии с тем утверждением, что магнитная сила и сила Лоренца не может совершать работу над зарядом. Противоречие устраняется, если учесть, что сила (1) это не полная магнитная сила, действующая на электрон, а лишь параллельная составляющая этой силы, обусловленная скоростью \bar{v} . Под действием этой составляющей электрон приходит в движение вдоль проводника со скоростью \bar{U} , в результате чего возникает перпендикулярная проводу составляющая магнитной силы

$$\bar{F}_\perp = -e [\bar{U} \times \bar{B}]$$



сила, действующая на электрон: $\bar{F} = \bar{F}_{\parallel} + \bar{F}_{\perp}$, а
работа силы над электроном за время dt :

$$dA = \bar{F}_{\parallel} \bar{U} dt + \bar{F}_{\perp} \bar{V} dt = \bar{F}_{\parallel} \bar{U} dt - \bar{F}_{\perp} \bar{V} dt$$

$$\bar{F}_{\parallel} = e \bar{V} \bar{B}; \quad \bar{F}_{\perp} = e \bar{U} \bar{B}$$

$$dA = \bar{F}_{\parallel} \bar{U} dt - \bar{F}_{\perp} \bar{V} dt = e \bar{V} \bar{B} \bar{U} dt - e \bar{U} \bar{B} \bar{V} dt = 0$$

Т.е. работа полной магнитной силы равна нулю.

Сила \bar{F}_{\perp} направлена против скорости \bar{V} . Поэтому, чтобы перемычка перемещалась с постоянной скоростью \bar{V} , к ней нужно приложить внешнюю силу $\bar{F}_{\text{внешн.}}$ уравновешивающую сумму сил \bar{F}_{\perp} , приложенную ко всем электронам в перемычке. За счёт работы этой силы и будет возникать энергия, выделяемая в контуре индуцированным током.

Рассмотренное объяснение возникновения ЭДС индукции относится к случаю, когда МП постоянно, а

меняется геометрия контура. Однако магнитный поток через контур может меняться за счёт изменения МИ \bar{B} . В этом случае объяснение возникновения ЭДС оказывается принципиально другим. Изменяющееся со временем магнитное поле, порождает вихревое электрическое поле \bar{E} , т.е. $\partial \bar{B} / \partial t$ порождает $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$. Пусть контур не меняется:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} \oint \bar{B} d\bar{s} = - \oint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{s}$$

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = \oint [\bar{\nabla} \bar{E}] d\bar{s}$$

$$\boxed{\oint \bar{E} d\bar{l} = - \oint \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{s}}$$

$$\boxed{[\bar{\nabla} \bar{E}] = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

1.39 Явление самоиндукции

Электрический ток, текущий в любом контуре, создаёт пронизывающий этот контур магнитный поток Φ .

Φ - это полный магнитный поток или потокосцепление.

$$\Phi = \sum \varphi$$

При уменьшении силы тока I уменьшается и Φ , вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС. Это явление называется самоиндукцией.

По з-ну Био-Савара-Лапласа $B \sim I$, а $d\varphi = B dS$. Отсюда следует, что ток в контуре I и создаваемый им магнитный поток Φ через контур пропорциональны друг другу.

$$\boxed{\Phi = L I} \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности между силой тока и магнитным потоком называется индуктивностью контура L .

При неизменной силе тока полный поток может изменяться за счёт изменения формы и размеров контура. Следовательно индуктивность L зависит от геометрии контура.

За единицу индуктивности в СИ принимается 1 Гн - индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем 1 А, возникает сцепленный с ним магнитный поток Φ , равный 1 Вб.

При изменениях силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_S , равная:

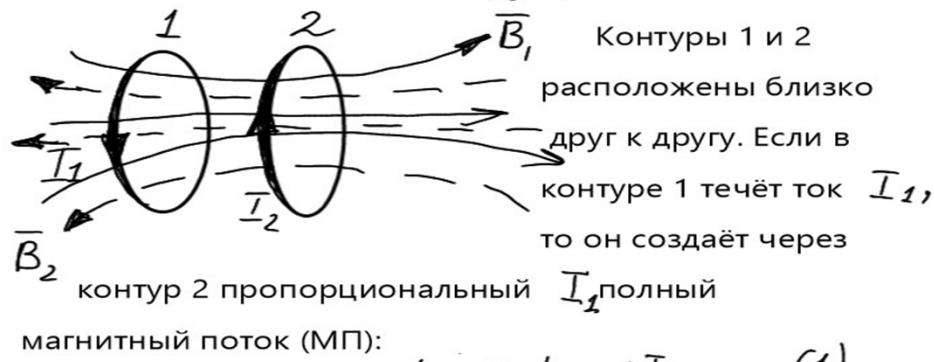
$$\mathcal{E}_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}) \quad (2)$$

Если при изменении силы тока индуктивность $L = \text{const}$, то это означает, что не изменяется геометрия контура и нет ферромагнетиков. Тогда второе слагаемое в (2) обращается в "0" и \mathcal{E}_S можно вычислять по формуле:

$$\boxed{\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}} \quad (3)$$

Лекция2с_6(1)

1.40 Взаимная индукция



$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \quad (1)$$

При изменении тока I_1 в контуре 2 индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2)$$

Аналогично при протекании в контуре 2 тока I_2 в контуре 1 возникает сцепленный с контуром 2 МП

$$\Phi_1 = L_{12} I_2 \quad (3)$$

и при изменении тока I_2 в контуре 1 индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (4)$$

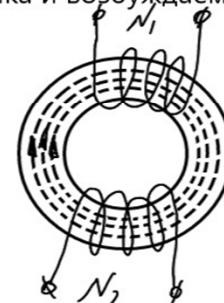
Контуры 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при

изменении силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью. В отсутствии ферромагнетиков

$$L_{12} = L_{21} \quad (5)$$

Найдём взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник. Линии МИ сосредотачиваются внутри сердечника и возбуждаемое любой из обмоток поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность. Согласно теореме о циркуляции для первой обмотки:



$$H\ell = N_1 I_1 \quad (6)$$

ℓ — длина сердечника.

МП через поперечное сечение сердечника S :

$$\Phi = BS = MM_0 HS = \mu M_0 \frac{N_1 I_1}{\ell} S$$

Тогда полный поток, сцепленный со второй обмоткой:

$$\Phi_2 = N_2 \Phi = \frac{S}{\ell} MM_0 N_1 N_2 I_1$$

Сопоставляя это выражение с формулой (1), получим:

$$\underline{L_{21} = \frac{S}{\ell} MM_o N_1 N_2} \quad (2)$$

Аналогично $L_{12} = \frac{S}{\ell} MM_o N_1 N_2$.

Однако в данном случае нельзя утверждать, что $L_{12} = L_{21}$.

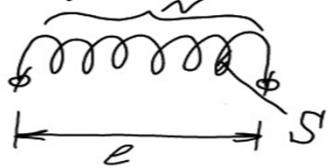
Множитель M , входящий в выражения для этих коэффициентов, зависит от напряженности поля H в сердечнике. Если $N_1 \neq N_2$, один и тот же ток, пропускаемый один раз по первой, а другой раз по второй обмотке, создадут в сердечнике поле различной напряженности H . Соответственно значения M в обоих случаях будут различными, так что при $I_1 = I_2$ числовые значения L_{12} и L_{21} не совпадают.

1.41 Индуктивность

Индуктивность - это коэффициент пропорциональности между силой тока и МП:

$$\Phi = L I \quad (1)$$

1) Индуктивность бесконечно длинного соленоида.



$$B = \mu_0 n I$$

$$\Phi = BS$$

$$\Psi = N\Phi = nI B S =$$

$$= \mu_0 n^2 l S I$$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V} \quad (2)$$

$$n = \frac{N}{l}$$

2) Индуктивность двухпроводной линии.



Вычислим магнитный поток через площадь, ограниченную осями проводов, расстоянием d и отрезком длины ℓ . Принимая справедливость принципа суперпозиции магнитных полей, рассмотрим вначале поле одного левого провода.

введем вспомогательные величины: радиус R , расстояние от оси провода до точки r , где определяется магнитный поток.

$$\text{a)} \quad 0 < r < R$$



$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \sum I_K$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \oint \bar{l} d\bar{l}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

МП через площадь $S = R \ell$

$$d\Phi_1 = B dS = \frac{\mu_0 j}{2} r \ell d\ell$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\mu_0 j \ell}{2} \int_0^R r d\ell = \\ &= \frac{\mu_0 j \ell R^2}{4} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \ell R^2 = \frac{\mu_0 I \ell}{4\pi} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad r > R$$

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \sum I_K$$

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \oint \bar{l} d\bar{l}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\pi R^2 r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$d\Phi_2 = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell d\ell$$

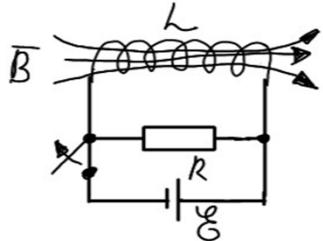
$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_R^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{d}{R}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{d}{R} \right)$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{d}{R} \right) I \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{d}{R} \right)}$$

1.42 Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображённую на рисунке. При



замкнутой цепи в соленоиде устанавливается ток, который обуславливает МП, сцепленное с витками соленоида.

Если разомкнуть ключ, то

через сопротивление R некоторое время будет течь убывающий ток вследствие действия ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая этим током за время $\frac{dt}{dt}$

$$dA = I \cdot \mathcal{E}_S dt = - \frac{dI}{dt} I dt = - I \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$L = \text{const}; \quad \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$dA = - L I \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

Проинтегрировав это выражение, получаем работу, совершенную за всё время, в течение которого происходит исчезновение МП:

$$A = - \int_{I_0}^0 L I \frac{dI}{dt} = \frac{L I^2}{2} \quad (3)$$

$$\boxed{W = \frac{L I^2}{2}} \quad (4)$$

В случае бесконечно длинного соленоида:

$$L = \mu \mu_0 n^2 V; \quad H = n I$$

$$I = \frac{H}{n} \Rightarrow (4)$$

$$\boxed{W = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} V} \quad (5)$$

$$H = \frac{B}{\mu \mu_0}$$

Плотность энергии МП:

$$\boxed{W = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0}} \quad (6)$$

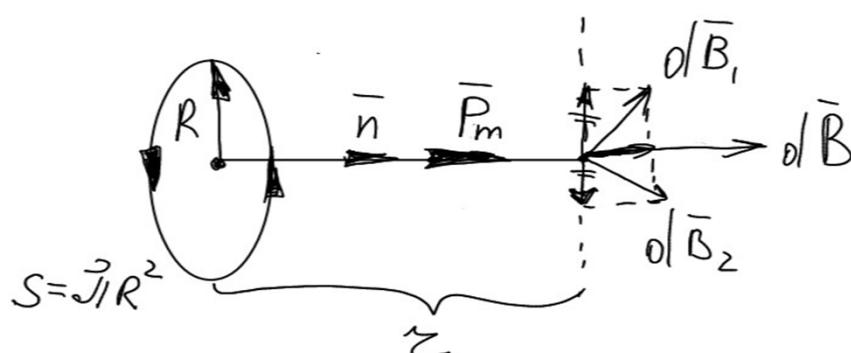
Эта энергия локализована в возбуждаемом током магнитном поле.

$$[W] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$$

1.35 Магнитный момент тока

Во многих случаях приходится иметь дело с элементарными токами, т.е. с замкнутыми токами, размеры которых весьма малы по сравнению с расстоянием от них до точки наблюдения. Пример подобных токов мы имеем во всех атомах, т.к. в них есть электроны, обращающиеся по замкнутым орбитам.

Пусть есть элементарный круговой ток радиусом R и силой I . Вычислим магнитное поле в некоторой точке на оси на расстоянии ζ от его центра.



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2P_m}{\zeta^3}; \quad P_m = \bar{I}S$$

$$\boxed{\bar{P}_m = \bar{I}S\bar{n}}$$

Формула магнитного поля кругового тока имеет тот же вид, что и формула электрического поля диполя на его оси:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2P}{\zeta^3} ; \quad P = q \cdot \ell$$

$$\bar{P} = q \cdot \bar{\ell}$$

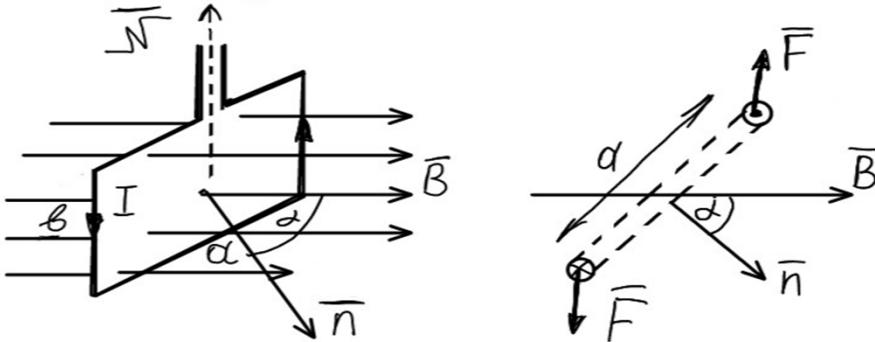
$$\bar{P}_m = \bar{I}S = \bar{I}S \cdot \bar{n}$$

$$\boxed{\bar{P}_m = \bar{I}S\bar{n}}$$

Магнитный момент тока, как и электрический момент, является вектором. За его направление принимают направление положительной нормали к плоскости витка.

Контур с током в магнитном поле

1) Найдем механические силы, действующие на замкнутый контур в магнитном поле.



Согласно з-ну Ампера на рёбра "а" действуют силы перендикулярные \vec{B} и "а" и стремятся растянуть виток. Силы же, действующие на ребра "в", кроме растягивающего действия, стремятся повернуть виток вокруг оси так, чтобы его плоскость стала перпендикулярной \vec{B} . Т.о. на рамку действует момент пары сил \bar{N} . Получим выражение для \bar{N} из формулы работы:

$$dA = I d\varphi$$

Предположим, что угол поворота бесконечно мал $d\varphi$
 $I = \text{const}$ Магнитный момент:

$$P_m = IS = \text{const} ;$$

$$dA = N d\varphi = I d\varphi ; \quad \varphi = BS \cos \varphi$$

$$d\varphi = BS \sin \varphi d\varphi$$

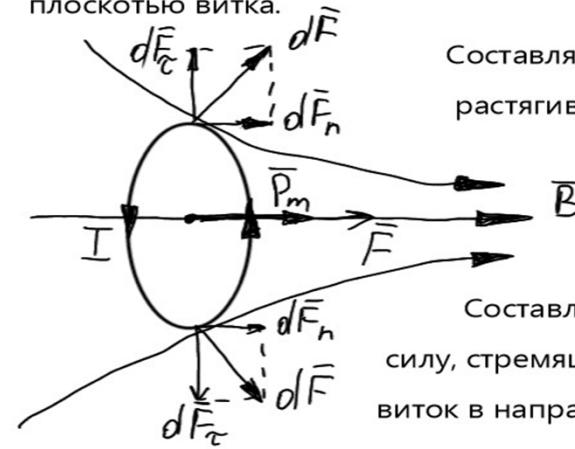
$$Nd\varphi = ISB \sin \varphi d\varphi$$

$$N = ISB \sin \varphi = P_m \cdot B \sin \varphi$$

$$\boxed{N = [P_m \times B]} \quad (1)$$

Эта формула аналог ф-лы в электростатике $\bar{N} = [\bar{P} \times \bar{E}]$.

2) Рассмотрим малый виток в неоднородном магнитном поле. Поскольку линии \vec{B} уже не параллельны, то силы $d\vec{F}$, действующие на каждый элемент витка, будут составлять некоторый угол с плоскостью витка.



Составляющие $d\vec{F}_t$ создают растягивающее усилие.

Составляющие $d\vec{F}_n$ дадут силу, стремящуюся переместить виток в направлении неоднородности поля.

Если магнитный момент \bar{P}_m параллелен \bar{B} ,
то виток будет втягиваться в МП, если антипараллелен,
то будет выталкиваться из МП.

3) Пусть виток смещается в направлении \bar{P}_m на малый
отрезок dx , тогда:

$$dA = F dx ; \quad d\varphi = S \left(\frac{\partial B_n}{\partial x} \right) dx$$

$$F dx = IS \frac{\partial B_n}{\partial x} dx \Rightarrow \boxed{F = P_m \frac{\partial B_n}{\partial x}} \quad (2)$$

Т.е. сила, действующая на виток в МП
пропорциональна быстроте изменения магнитной
индукции. В 3-х мерной системе координат:

$$\boxed{\bar{F} = (\bar{P}_m \text{ grad}) \bar{B}} \quad (3)$$

$$(\bar{P}_m \text{ grad}) = P_{mx} \frac{\partial}{\partial x} + P_{my} \frac{\partial}{\partial y} + P_{mz} \frac{\partial}{\partial z}$$

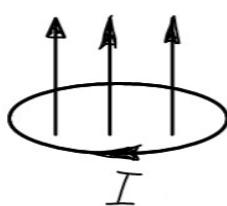
В общем случае в неоднородном МП на виток с током
будет действовать пара сил, стремящихся повернуть
виток перпендикулярно МП и сила, втягивающая
виток в область неоднородности МП.

Лекция_8

Уравнения Максвелла

1.43 Вихревое электрическое поле

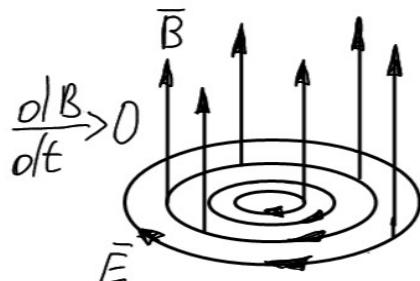
Вернёмся к явлению ЭМ индукции и рассмотрим неподвижный замкнутый проводник в магнитном поле. При всяком изменении магнитного поля в про-



$$\frac{d\vec{B}}{dt} > 0$$

воднике возникает ЭДС и появляется индукционный ток. С другой стороны ЭДС в любой цепи возникает тогда,

когда в ней действуют сторонние силы не электрического происхождения. В данном случае сторонние силы не связаны с изменением свойств проводника в магнитном поле, а обусловлены самим магнитным полем.



водник, в котором наводится ЭДС индукции играет второстепенную роль - он всего лишь индикатор

Анализируя явления ЭМ индукции Максвелл заключил, что причина появления ЭДС индукции заключается в возникновении электрического поля. Про-

этого поля. Поле возникает независимо от наличия проводника. Рассматриваемое электрическое поле не является электростатическим.

Линии электростатического поля всегда разомкнуты, они начинаются и заканчиваются на зарядах. По этой причине электростатическое поле не может поддерживать разделене зарядов и не может приводить к появлению ЭДС. Напротив, электрическое поле, которое возникает при ЭМ индукции, имеет непрерывные линии напряженности, т.е. оно является вихревым полем. Это поле вызывает движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС . Т.о. сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

Первое положение теории Максвелла:
всякое изменение магнитного поля вызывает появление вихревого электрического поля.
Полученный результат можно выразить в количественной форме:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

S – площадь, ограниченная рассматриваемым

контуром.

С другой стороны ЭДС равна циркуляции вектора напряжённости сторонних сил по замкнутому контуру:

$$\oint_{\ell} \vec{E}^* d\vec{\ell}$$

\vec{E}^* — напряжённость вихревого электрического поля, поэтому $\vec{E}^* = \vec{E}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell}$$

$$\varphi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Интегрирование ведётся по произвольной поверхности, опирающейся на контур ℓ . Поскольку контур и поверхность неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами

$$\boxed{\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}} \quad (1)$$

Т.к. \vec{B} зависит как от времени, так и от координаты, то мы можем взять частные производные по времени. Преобразовав левую часть по теореме Стокса, получим

$$\int_S [\nabla \vec{E}] d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$
$$\boxed{[\nabla \vec{E}] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (2)$$
$$(\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

Итак, изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

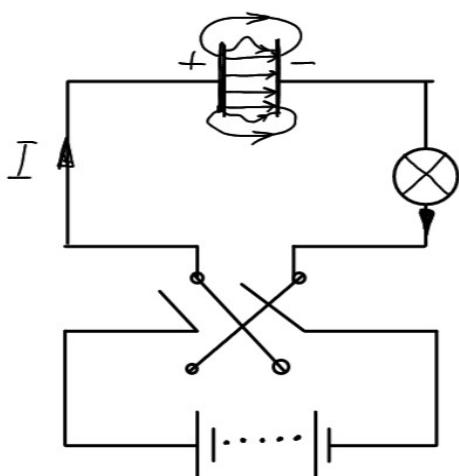
Уравнения (1) и (2) являются первым уравнением в системе уравнений Максвелла, а приведённая формулировка отражает его физический смысл.

1.44 Ток смещения

Продолжая анализ ЭМ процессов, Максвелл пришёл к заключению, что если переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле, то должно существовать и обратное явление:

всякое изменение электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля.

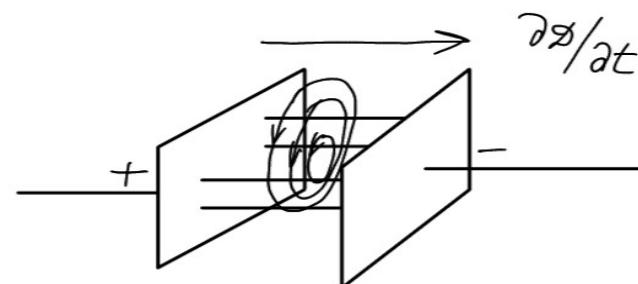
Т.к. магнитное поле есть основной и обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле **током смещения** в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц.



Переменные токи могут существовать в разомкнутых

контурах.

Всякий раз, когда в разомкнутом контуре имеется ток, на обкладках конденсатора имеется переменное электрическое поле или ток смещения. **T.о. токи проводимости в металлическом проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике.**



Магнитное поле контура оказывается таким же, как если бы контур был замкнутым.

Если электрическое смещение в конденсаторе $\bar{\mathcal{D}}$, то поверхностная плотность зарядов на обкладках

$$\sigma = \mathcal{D},$$

а полный заряд на каждой из обкладок

$$q = \mathcal{D}S,$$

тогда :

$$I = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\mathcal{D}}{dt}$$

Сила тока пропорциональна скорости изменения индукции электрического поля ($\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$) и вызывает магнитное поле как ток, имеющий силу ($S \cdot d\mathcal{D}/dt$) или плотность тока:

$$\int_{\text{см}} j_{\text{см}} = \frac{d\mathcal{D}}{dt} \quad (1)$$

В общем случае поле м.б. неоднородным и может изменяться не только во времени, но и в пространстве, тогда:

$$\boxed{j_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial t}} \quad (2)$$

Когда в проводнике имеется переменный ток, то внутри проводника есть и ток проводимости и ток смещения и магнитное поле проводника определяется суммой токов, т.е. по полным током:

$$\bar{j}_{\text{полн}} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (3).$$

Но тогда закон полного тока следует записывать:

$$\boxed{[\bar{\nabla} \bar{H}] = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см}}} \\ \boxed{[\bar{\nabla} \bar{H}] = \bar{j} + \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}}{\partial t}} \quad (4)$$

$$\boxed{e \oint \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_S \bar{\mathcal{D}} d\bar{S}} \quad (4)$$

1.45 Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электромагнитных (ЭМ) явлений. Эта теория объяснила все существовавшие к тому времени экспериментальные факты и позволила предсказать новые явления. Совершено новым явились предположения Максвелла о существовании ЭМ волн, распространяющихся со скоростью света.

Основу теории ЭМ явлений образуют уравнения Максвелла. В теории электромагнетизма они играют ту же роль, как и законы Ньютона в механике.

Первую пару уравнений образуют уравнения:

$$[\bar{\nabla} \bar{E}] = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \implies \oint \bar{E} d\bar{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{S} \quad (1)$$

$$\bar{\nabla} \bar{B} = 0 \implies \oint \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (1) связывает значения вектора \mathbf{E} с изменениями вектора \mathbf{B} во времени и является по сути законом ЭМ индукции Фарадея, записанным Максвеллом в другой форме. Уравнение (2)

констатирует отсутствие источников магнитного поля, т.е. магнитных зарядов в природе нет.

Вторую пару системы уравнений М. составляют следующие уравнения:

$$[\bar{\nabla} \bar{H}] = \bar{j} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{e}} \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{\Phi} d\bar{S} \quad (3)$$

$$\bar{\nabla} \bar{\Phi} = \bar{S} \Rightarrow \oint_S \bar{\Phi} d\bar{S} = \int_V \bar{S} dV \quad (4)$$

Третье уравнение (3) устанавливает связь между током проводимости и током смещения и порождаемым ими магнитным полем. Уравнение (4) говорит о том, что источниками вектора \mathbf{D} (т.е. электрического поля) служат сторонние заряды.

В первую пару уравнений входят основные характеристики поля - \mathbf{B} и \mathbf{E} , во вторую - вспомогательные \mathbf{D} и \mathbf{H} .

Всего получилось 4 уравнения и 4 неизвестных. Однако, на самом деле неизвестных 12, т.к. каждый вектор \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} имеет три неизвестные величины. Каждому уравнению (1), (3) соответствуют три скалярных уравнения (т.е. 6 уравнений), добавляются ещё уравнения (2) и (4). Всего 8 уравнений и 12

неизвестных. Поэтому необходимы ещё уравнения, связывающие \mathbf{D} и \mathbf{j} с \mathbf{B} и \mathbf{D} с \mathbf{H} . Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{D}} &= \epsilon \epsilon_0 \bar{E} \\ \bar{B} &= \mu \mu_0 \bar{H} \\ \bar{j} &= \sigma \bar{E} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Совокупность уравнений (1), (2), (3), (4), (5) образуют основу электродинамики сплошных сред.

Внимание, студенты! Систему уравнений Максвелла буду спрашивать каждого. Поэтому либо в дифференциальной, либо в интегральной форме вы её должны знать (лучше знать обе формы) и уметь объяснить физический смысл каждого уравнения. Это ключевой вопрос всей темы "Электромагнетизм".

Таблица уравнений Максвелла

Интегр. форма	Дифф. форма
$\oint \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{S}$	$[\bar{\nabla} \bar{E}] = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (1)$
$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0$	$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad (2)$
$\oint_e \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} d\bar{S}$	$[\bar{\nabla} \bar{H}] = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (3)$
$\oint_V \bar{D} d\bar{S} = \int_S \rho dV$	$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho \quad (4)$

$$\left. \begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon \epsilon_0 \bar{E} \\ \bar{B} &= \mu \mu_0 \bar{H} \\ \bar{j} &= \sigma \bar{E} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Задача 1

Заряженный воздушный конденсатор достаточно быстро погружается в среду с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти время разряда конденсатора.

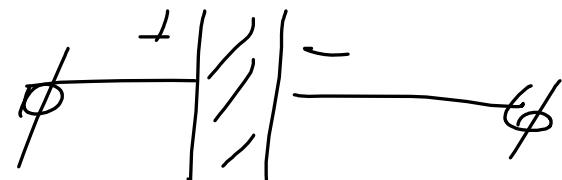
$$\frac{\rho}{\epsilon} \left| \begin{array}{l} I = \frac{U}{R}; \quad j = \frac{\bar{E}}{S} \\ I = \int j dS = \frac{1}{\rho} \int \bar{E} d\bar{S} = \end{array} \right.$$

$$= \frac{Q}{\epsilon \epsilon_0 \rho}$$

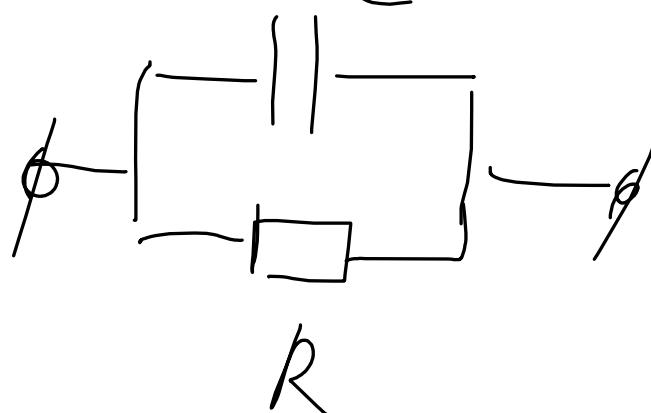
$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{CR}$$

$$\frac{Q}{\epsilon \epsilon_0 \rho} = \frac{Q}{CR}; \quad CR = \epsilon \epsilon_0 \rho$$

$$C = CR = \epsilon \epsilon_0 \rho$$



$$\rho E / S = \epsilon U$$



$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}; \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

ЛЕКЦИЯ_9

**Электромагнитные волны
Волновая оптика**

Лекция2с_7

Тема раздела:

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Литература:

1) Савельев И.В. Курс общей физики.

т.2, М. "Наука", с 1988г. (Электричество, магнетизм.
Волны. Оптика).

т.3, М. "Наука", с 1988г. (Квантовая оптика. Атомная
физика. Физ. твёрдого тела. Физ. атомного ядра)

2) Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике. М.
"Высшая школа", 1988 г.

3) Иродов И.Е., тома. Электромагнетизм + Волновые
процессы. Год издания 1999 - 2000.

Запишем уравнения Максвелла, описывающие
статическое поведение электрических и магнитных
полей, и вспомним их физический смысл:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \text{ — статика}$$

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0 \quad | \quad [\bar{\nabla} \bar{E}] = 0 \quad (1)$$

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad | \quad \bar{\nabla} \bar{B} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \bar{B} d\bar{l} = M_0 I \quad | \quad [\bar{\nabla} \bar{B}] = M_0 \bar{j} \quad (3)$$

$$\oint \bar{E} d\bar{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} \quad | \quad \bar{\nabla} \bar{E} = \frac{\bar{S}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\epsilon = 1; \quad M = 1$$

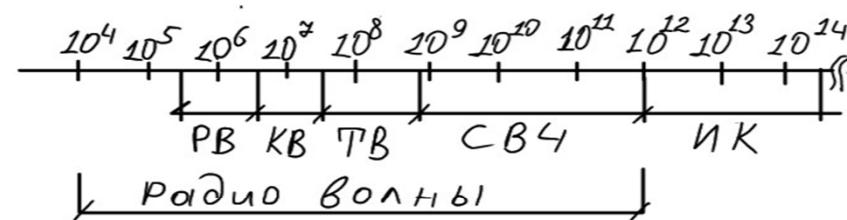
- (1) - Потенциальность ЭП (работа электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю);
- (2) - источников МП (магн. поля) нет;
- (3) - МП вихревое и причиной его появления является ток, т.е. движущиеся заряды;
- (4) - источником ЭП являются статические заряды.

Теперь перейдём к рассмотрению электродинамики.

1.46 Волновое уравнение

Если с помощью движущихся зарядов возбудить переменное магнитное поле, то возникнет периодически распространяющееся во времени и в пространстве ЭМ поле. Это поле будет представлять собой ЭМ волну.

Шкала ЭМ волн:



Уравнения Максвелла

$$\left. \begin{array}{l} \oint_{\Gamma} \bar{E} d\bar{\ell} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} \\ \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 \\ \oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{\ell} = \int_S \bar{j} d\bar{S} + \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S} \\ \oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dV \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{div } \bar{B} = 0 \\ \text{rot } \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \text{div } \bar{D} = \rho \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{D} = \epsilon \epsilon_0 \bar{E} \\ \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H} \\ \bar{j} = \partial \bar{E} \end{array} \right\} \text{дополнительные ур-ия}$$

Первоисточником ЭМ поля является движущийся заряд, но движущийся с ускорением. Постоянный ток, где ускорение носителей равно нулю, не излучает ЭМВ.
При тепловом движении частиц атом излучает ЭМВ – это тепловое или ИК-излучение.

- 1 - Закон ЭМ-индукции Фарадея (связь значений \bar{E} с изменениями вектора \bar{B} во времени).
- 2 - Отсутствие источников МП.
- 3 - Связь между током проводимости и током смещения и порождаемым ими магнитным полем.
- 4 - Источниками вектора \bar{D} служат сторонние (свободные заряды).

Покажем, что существование ЭМВ вытекает из уравнений Максвелла. Для упрощения рассмотрим однородную, нейтральную, непроводящую среду:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{const} \\ M &= \text{const} \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad j = 0 \end{aligned}$$

Кроме того, будем рассматривать плоские ЭМВ, т.е. $\bar{E}, \bar{H}, \bar{B}, \bar{\varPhi}$ зависят только от координаты z и от времени t . Распишем ротор и дивергенцию $\bar{\alpha}$:

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla} \bar{\alpha}] &= \bar{e}_x \left(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} \right) + \bar{e}_y \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} \right) + \\ &+ \bar{e}_z \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\bar{\nabla} \bar{\alpha} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z}$$

Для плоского поля:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla} \bar{\alpha}] &= -\bar{e}_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} + \bar{e}_y \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} \\ \bar{\nabla} \bar{\alpha} &= \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Вспомнив операторы, использующиеся для описания векторных полей, запишем систему уравнений Максвелла (1 - 4) для плоского поля:

$$-\bar{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \bar{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\bar{e}_x \frac{\partial B_x}{\partial t} - \bar{e}_y \frac{\partial B_y}{\partial t} - \bar{e}_z \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\bar{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \bar{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \bar{e}_x \frac{\partial \varPhi_x}{\partial t} + \bar{e}_y \frac{\partial \varPhi_y}{\partial t} + \\ &+ \bar{e}_z \frac{\partial \varPhi_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varPhi_z}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Сравнив левые и правые части уравнений (1) и (3), можно записать:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Уравнения, дополняющие систему уравнений Максвелла, для проекций запишем так:

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon E_i$$

$$B_i = M_0 M H_i$$

Теперь сгруппируем выражения (5) и (6) так, чтобы получить электромагнитные поля E_y, H_x и E_x, H_y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= MM_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -MM_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned} \right\} (8)$$

В каждой паре уравнений дифференцирум первое по Z , второе по t :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= MM_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial t} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (7')$$

Из последней системы (7) получаем уравнение для составляющей электрического поля E_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = M_0 \mu (\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}) \quad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \epsilon M_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\boxed{\epsilon \epsilon_0 \mu M_0 = \frac{1}{v^2}} \quad (11)$$

Проделав то же самое для (8), получим аналогичный результат.

Чтобы получить уравнение для составляющей напряжённости магнитного поля H_x , поступим с системой уравнений (7) следующим образом:

- второе уравнение из (7) дифференцируем по Z ;
- первое уравнение из (7) дифференцируем по t .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial z} &= M_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (7'')$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \end{aligned}} \quad (12)$$

Волн. ур-ие.
ЭМВ

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow (11)$$

$$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}} \quad (13)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}} \quad (14)$$

обобщенное
волн. ур-ие

Волновым уравнением электромагнитной волны являются оба уравнения (12) для \mathbf{E} и \mathbf{H} , поскольку эти векторы неразрывно связаны друг с другом. Уравнения (12) получены из (1) и (3), в которые одновременно входят \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Уравнения (9) и (10) представляют собой типичные волновые уравнения. Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну. Уравнение (14), например, можно рассматривать как волновое уравнение упругой (механической) волны относительно обобщённой координаты \tilde{y} . Причём корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, даёт фазовую скорость этой волны v . Значение фазовой скорости можно найти из соотношений (11) или (13). Формула (13) получена из (11) с учётом значения электродинамической постоянной:

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \quad (15)$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

В вакууме, где $\epsilon = \mu = 1$ скорость ЭМ волн совпадает со скоростью света C в пустоте.

1.47 Плоская электромагнитная волна

Волновое уравнение для плоской электромагнитной волны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ E_x = E_z &= 0; \quad H_y = H_z = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Стандартным решением волнового уравнения являются

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_m \cos(\omega t - Kz) \\ H_x &= -H_m \cos(\omega t - Kz) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \bar{K} = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{n} \quad ; \quad \mathcal{V} = \frac{\omega}{K} \quad (3)$$

\bar{K} — волновой вектор; \mathcal{V} — фазовая скорость.

Если эти уравнения подставить в промежуточные выражения (7) предыдущего параграфа, то можно получить решения для H_y и E_y .

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu M_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad \text{подставим } E_y$$

$$KE_m \sin(\omega t - Kz) = \mu M_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{KE_m}{\mu M_0} \sin(\omega t - Kz);$$

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{KE_m}{\mu M_0} (-1) \frac{1}{\omega} \cos(\omega t - Kz) = \\ &= -\frac{KE_m}{\omega \mu M_0} \cos(\omega t - Kz) = -H_m \cos(\omega t - Kz) \end{aligned}$$

$$H_m = \frac{KE_m}{\omega \mu M_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon M_0 M}}{M_0 M} E_m = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{M_0 M}} E_m \quad (*)$$

$$\frac{K}{\omega} = \frac{1}{\mathcal{V}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon M}{M_0}} \quad \leftarrow \begin{cases} \mathcal{V} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon M}} \\ \frac{1}{C^2} = \epsilon_0 M_0 \end{cases}$$

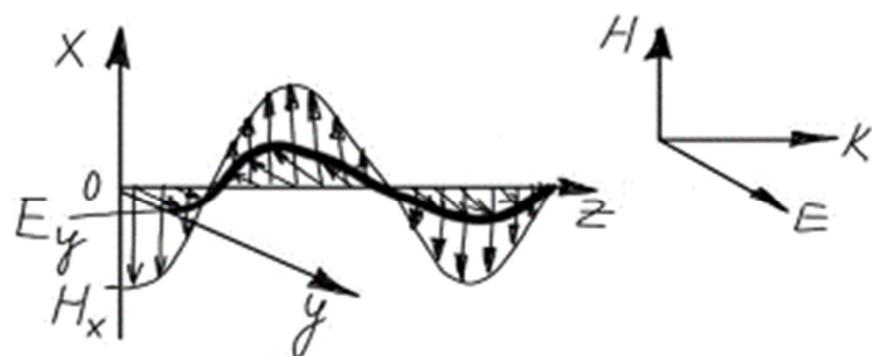
Тогда для вакуума:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} = \frac{10}{36\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{H_m} &= \sqrt{\frac{M_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} = \\ &= 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 10 = 120\pi = 377 \text{ (Ом)} \quad (4) \end{aligned}$$

Это волновое сопротивление свободного пространства.

"Моментальная фотография" электромагнитной волны:



Фаза прямой волны - $(\omega t - Kz)$

Фаза братной волны - $(\omega t + Kz)$

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_m \cos(\omega t - Kz) \\ E_y &= E_m e^{i(\omega t - Kz)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -H_m \cos(\omega t - Kz) \\ H_x &= -H_m e^{i(\omega t - Kz)} \end{aligned} \right\}$$

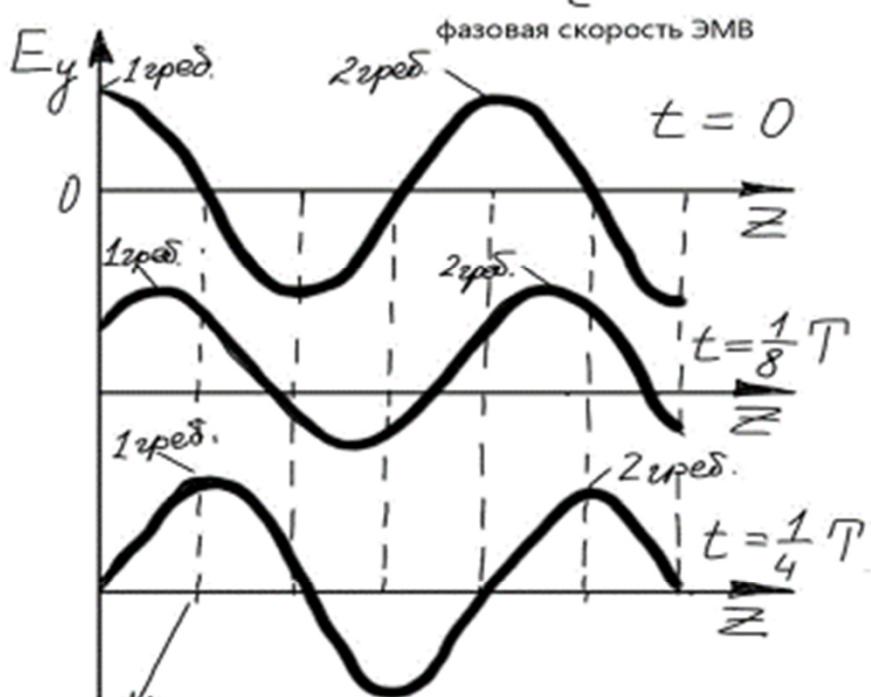
Покажем, как плоская бегущая волна перемещается во времени. Когда в выражении (5) фаза обращается в 0, то E_y или H_x достигают максимума и мы имеем:

гребень волны

$$(\omega t - Kz) = 0$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \frac{\omega}{K} = v \Rightarrow \frac{v \cdot 2\pi}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} z = 0$$

$$z = vt \Rightarrow v = \frac{z}{t}$$



1 гребень сместился на $1/4$ периода, также сместились и остальные гребни.

Итак, скорость гребня волны есть **фазовая скорость**, или скорость распространения волны.

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (6)$$

Можно рассмотреть основные характеристики волны на примере упругих волн (пример).

1) Частицы среды не вовлекаются волной в поступательное движение, а лишь совершают колебания около своих положений равновесия.

2) Различают **продольные и поперечные** волны.

В продольных волнах частицы колеблются вдоль направления распространения волны. В поперечных волнах частицы колеблются в направлении перпендикулярном направлению распространения волны.

В ЭМВ векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются перпендикулярно направлению распространения волны, поэтому **ЭМВ поперечны**.

3) Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t называется **фронтом волны**. **Волновой фронт** это поверхность, которая отделяет часть пространства, вовлечённую в волновой процесс от области, где колебаний ещё нет.

4) Геометрическое место точек, где волны колеблются в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Волновых поверхностей бесконечно много, волновой фронт в каждый момент времени только один.

5) Форма волновой поверхности определяет **сферическую или плоскую волну**.

6) Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний, называется **длиной волны**.

$$\lambda = v T \quad (7)$$



Лекция_10

Энергия и импульс ЭМВ. Взаимодействие ЭМВ с веществом.

Волновые пакеты.

1.48 Энергия ЭМ волн. Вектор Пойнтинга

ЭМВ переносят энергию.

Плотность потока мощности в данной точке

пространства = количеству энергии, протекающему в 1 с через 1 м² плоскости ХОУ.

$$[\bar{S} = [\bar{E} \times \bar{H}] \quad (1)]$$

Вектор плотности потока энергии - вектор Пойнтинга.

Поток ЭМ энергии через некоторую поверхность F ввели

$\Phi = \int_S \bar{S} dF$ Джон Пойнтинг - английский физик в 1884 г. и Алексей Умов в 1874 г.

Т.к. в случае плоской волны $E_x = E_z = 0$ и

$H_y = H_z = 0$, то:

$$\bar{S} = -\bar{\epsilon}_z E_y H_x \quad (2)$$

Вектор \bar{S} по направлению совпадает с волновым вектором \bar{k} .

Объёмная плотность энергии ЭМ поля складывается из \mathcal{W}_E

и \mathcal{W}_H . Для вакуума:

$$\mathcal{W}_E = \frac{E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$\mathcal{W}_H = \frac{H^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{W}_E + \mathcal{W}_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{1}{2} E \sqrt{\epsilon_0} \cdot E \sqrt{\epsilon_0} + \\ &+ \frac{1}{2} H \sqrt{\mu_0} \cdot H \sqrt{\mu_0} \\ E \sqrt{\epsilon_0} &= H \sqrt{\mu_0} \\ \mathcal{W} &= \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E H = \frac{1}{c} E H \\ [\bar{S} = \mathcal{W} c = E H] &\quad (3) \end{aligned}$$

Векторы \bar{E} и \bar{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора $[\bar{E}; \bar{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии.

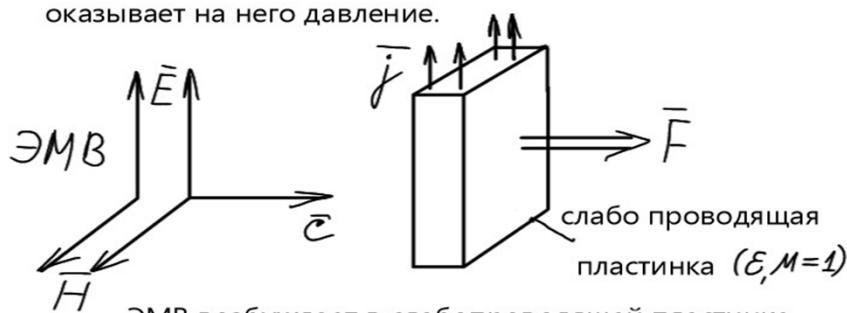
Напомню, что направление распространения энергии ЭМВ совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} , с которым вы впервые познакомились при записи уравнения ЭМВ. Эта физическая величина определяет направление распространения волны во всех волновых процессах, начиная с механических волн (упругие волны), заканчивая квантовомеханическими процессами.

$$\underbrace{\bar{k}}_{\text{---}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{n} \quad (4)$$

1.4 Импульс ЭМ поля.

Отражение и преломление ЭМВ

1) ЭМ волна, взаимодействуя с каким-либо веществом, сообщает ему не только энергию, но и импульс, т.е. оказывает на него давление.



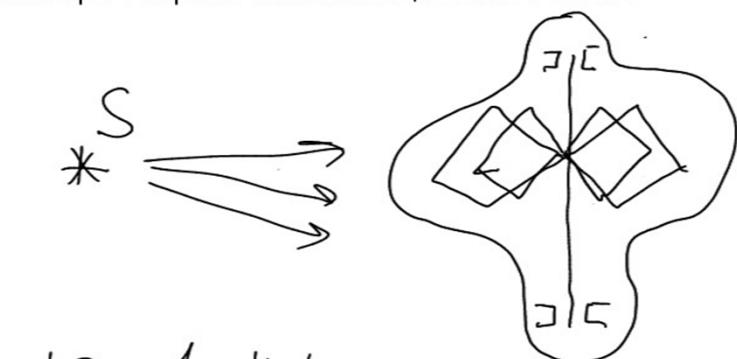
ЭМВ возбуждает в слабопроводящей пластинке ток плотностью $j = \sigma E$, вокруг которого возникает МП. Оно начинает действовать на ток с силой Ампера, величина которой в рассчёте на единицу площади и создаёт давление.

Можно показать, что ЭМВ, несущая энергию, обладает импульсом:

$$P = \frac{1}{c} W \quad (1)$$

Это согласуется с квантовомеханическими представлениями. Согласно им ЭМВ, несущая энергию, эквивалентна потоку фотонов, т.е. частиц, масса покоя которых равна "0".

Давление, которое оказывает на пластинку ЭМВ очень невелико. Оценим, с какой силой давит свет на лопасть радиометра от яркой лампы мощностью 100 Вт ?



$$\partial P = \frac{1}{c} \partial W$$

$$\partial P = \frac{2}{c} \partial W$$

$$F = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2}{c} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{2}{3 \cdot 10^8} \cdot 10^2 = 6,7 \cdot 10^{-7} N$$

2) К эффектам, связанным с взаимодействием ЭМВ с веществом, относятся также отражение и преломление. ЭМ волна может полностью отражаться только от очень хорошего проводника - от сверхпроводника (СП). В СП $\beta = \infty$ и электрическое поле внутри СП всегда обращается в "0". В противном случае неограниченно возрастал бы ток. Падающая волна индуцирует на поверхности СП поверхностный ток, который в свою очередь начинает излучать ЭМП. Отражённая т.о. от поверхности СП волна будет находиться в противофазе с падающей волной и в пространстве около СП возникает система стоячих волн. Это случай полного отражения. Если проводник не идеальный, то отражение будет частичным.

Если в веществе свободных электронов нет, то это диэлектрик. В диэлектрике электроны сильно связаны с ядром и под действием ЭМ излучения могут лишь смещаться относительно ядра, совершая гармонические колебания. Любой колеблющийся электрон сам по себе излучает ЭМВ. Т.к. в диэлектрике потерян Джоулево тепло нет, то вся энергия сохраняется в форме ЭМ излучения. Т.о., пластинка диэлектрика

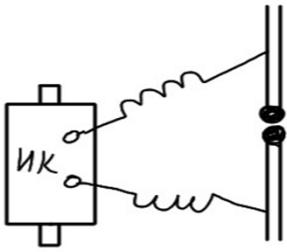
окажется прозрачной для ЭМВ. Кроме того, в диэлектрической пластинке волна распространяется с $v < c$

$$\frac{c}{v} = n \quad (3)$$

Это отношение называется показателем преломления. Для большинства твёрдых тел $n = 1.5$, т.е. скорость света в них замедляется примерно на 33%. Внутри пластинки поле является суперпозицией падающей волны и полей излучения всех свободных электронов. Каждое из полей в отдельности будет распространяться со скоростью $v = c$, но результирующее поле будет распространяться так, как если бы его скорость уменьшилась.

Впервые свойства ЭМВ исследовал Герц (1888 г.) Для получения ЭМВ он использовал изобретённый им вибратор.

ные небольшим искровым промежутком, от индукционной катушки подавалось высокое напряжение. В промежутке проскачивала искра, она закорачивала про-



На два стержня, разделённые небольшим искровым промежутком, от индукционной катушки подавалось высокое напряжение. В промежутке проскаивала искра, она закорачивала промежуток и в вибраторе возникали затухающие ЭМ колебания. За время горения искры возникало большое число колебаний, порождавших ЭМВ. Длина их составляла (0,6 - 10) м.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (разм. 1 м, массой 1200 кг) Герц осуществил стоячую волну.

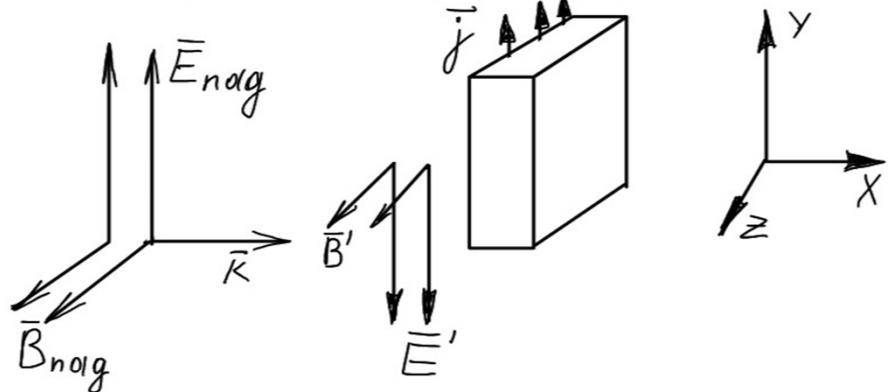
Располагая на пути ЭМВ решётку из параллельных медных проволок, Герц обнаружил, что интенсивность прошедших волн изменяется при вращении решётки.

Когда проволоки в решётке были перпендикулярны \vec{E} , то волна проходила, когда они были параллельны, то волна не проходила. Т.о. была установлена поперечность ЭМВ.

Передачу сообщения на расстояние 250м с помощью ЭМВ впервые осуществил А.С. Попов в 1886 г.

1.50 Стоячие волны

При полном отражении бегущей волны сумма падающей и отражённой волн порождает стоячую волну.



Падающая на идеальную отражающую поверхность ЭМВ индуцирует поверхностный ток j . Этот ток излучает поле E' , направленное в непосредственной близости от отражающей поверхности противоположно E_{nadg} .

$$E_{nol} = E_m \cos(\omega t - kz) \quad (1)$$

Отражённая волна имеет вид:

$$\begin{aligned} E'_{reb.} &= -E_m \cos(\omega t + kz) \\ E'_{refl.} &= -E_m \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (2)$$

Справа сумма падающей и отражённой волн:

$$E = E_{\text{пад}} + E'_{\text{отр}} = 0$$

Слева от отражателя результирующее поле записывается в виде:

$$E = E_{\text{пад}} + \bar{E}'_{\text{лев}} = E_m [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)]$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{(B+A)}{2} \sin \frac{(B-A)}{2}$$

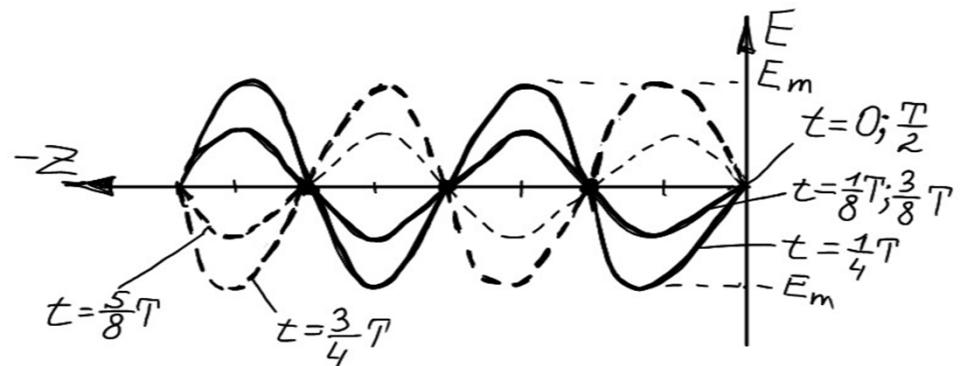
$$E = 2E_m \sin \omega t \sin kz = A(t) \sin kz$$

Уравнение стоячей волны.

(3)

Построим график этой функции для последовательных моментов времени t .

Стоячая волна представляет собой определённую функцию - в данном случае $\sin kz$.



$$E = 2E_m \sin \omega t \sin kz = A(t) \sin kz \quad (3)$$

$$A(t) = 2E_m \sin \omega t \quad (4)$$

$$kz_n = n\pi \Rightarrow E = 0 \text{ - узел} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Узлы располагаются в точках:

$$z_n = \frac{n\pi}{K} = \frac{n\lambda}{2} \quad (5)$$

Соседние узлы отстоят друг от друга на расстоянии равном полуволне.

Картину стоячих волн можно наблюдать визуально на струне, оттянув её и отпустив. Можно также закрепить верёвку с одного конца, а за другой держать рукой и поднимать этот конец вверх и вниз.

1.6 Волновые пакеты.

Фазовая и групповая скорость

Монохроматическая волна или монохроматическое излучение - это ЭМ излучение одной определённой и строго постоянной частоты и записывается так:

$$E = A \cos(\omega t - k z + \phi) \quad (1)$$

Монохроматическая волна представляет собой бесконечную во времени и в пространстве последовательность "горбов" и "впадин", перемещающихся вдоль оси z с фазовой скоростью:

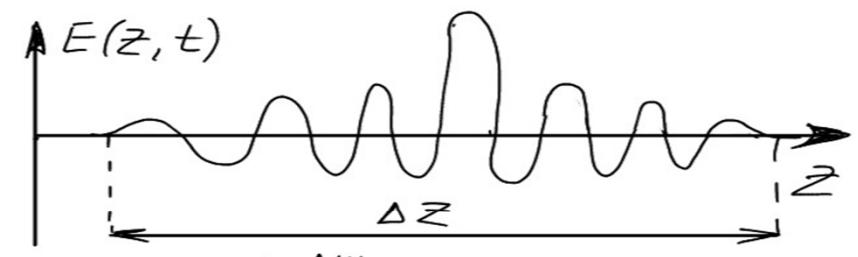
$$\beta = \frac{\omega}{k} \quad (2)$$

С помощью такой волны нельзя передать никакого сигнала, т.к. каждый последующий "горб" ничем не отличается от предыдущего. Для передачи сигнала на волне должна быть какая-то особенность, "отметка". Это м.б. изменение формы сигнала или прерывание на Δt . В этом случае, однако, волна уже не будет описываться уравнением (1).

Проще всего сигнал передать в виде импульса.

Согласно теореме Фурье подобный импульс можно представить как наложение волн вида (1) с частотами, заключёнными в узком интервале $\Delta \omega$.

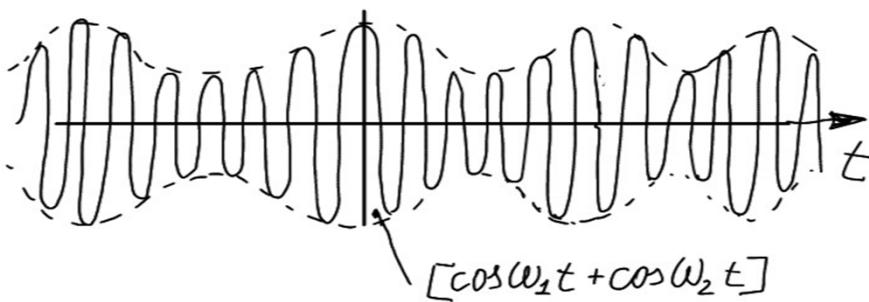
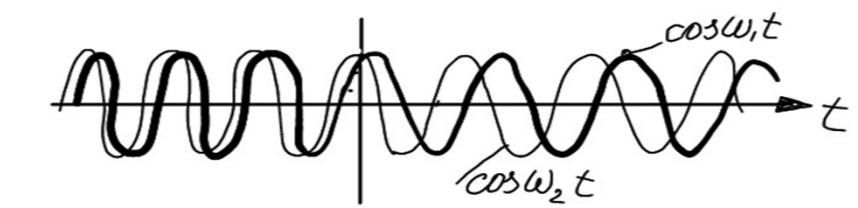
Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется "волновым пакетом" или "группой волн".



$$E(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega z + \phi_\omega) d\omega \quad (3)$$

Индекс ω при A , ϕ и k указывает на то, что эти величины для различных частот различны.

Рассмотрим простейший случай волнового пакета, образованного двумя монохроматическими волнами с частотами ω_1 и ω_2 , отличающимися друг от друга на очень небольшую величину.



$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega &= (\omega_2 - \omega_1) / 2 \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$E(t) = E_m \cos(\bar{\omega} + \Delta\omega)t + E_m \cos(\bar{\omega} - \Delta\omega)t \quad (5)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$E(t) = 2 E_m \cos \Delta\omega t \cos \bar{\omega}t = A(t) \cos \bar{\omega}t, \quad (6)$$

$$\boxed{A(t) = 2 E_m \cos(\Delta\omega)t} \quad (7)$$

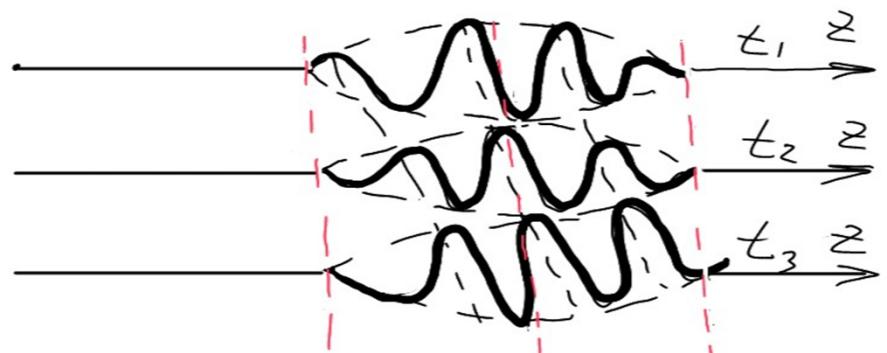
(7) - Это огибающая, или функция модуляции.

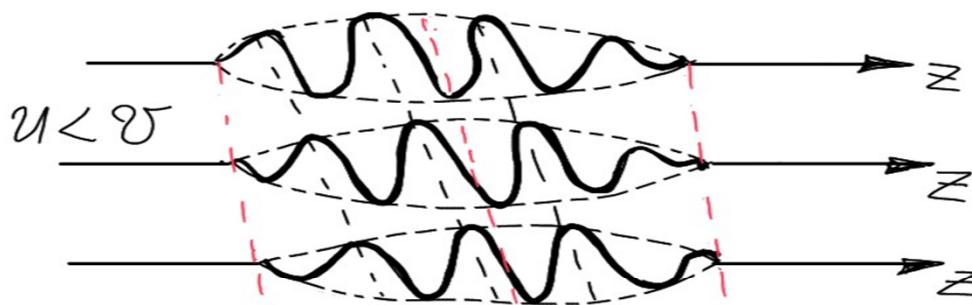
В данном случае огибающей является монохроматическая волна с меньшей частотой.

Складывая большое число монохроматических волн можно получить функцию модуляции любой формы и построить волновой пакет.

Характеристикой волнового пакета является его ширина: $\Delta t = 1/\Delta\omega$ (8), где $\Delta\omega$ - среднеквадратическое или стандартное отклонение величины ω от $\bar{\omega}$.

При рассмотрении волновых пакетов с различными частотами получается интересный результат - скорость распространения огибающей может значительно отличаться от скорости, с которой распространяются монохроматические компоненты.





Скорость волнового пакета или огибающей называется групповой скоростью.

$$U = \frac{\omega}{k}$$

$$U = \frac{d\omega}{dk} \quad (8)$$

Среда, в которой есть зависимость $\omega = f(k)$ называется дисперсионной средой. Для световых волн дисперсией называют зависимость показателя преломления вещества от длины волны света, т.е.

$$n = f(\lambda_0) \quad \lambda_0 - \text{юв. б. воли}$$

соотношения $\omega = f(k)$

$$n = f(\lambda_0) \quad \text{аналогичны, т.к.}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (v = \frac{\omega}{k}; n = \frac{c}{v})$$

Если среда не обладает дисперсией, то все гармонические монохроматические волны распространяются с одинаковой скоростью и пакет ведёт себя как

стационарный и фазовая скорость равна групповой скорости ($v = U$).

При наличии дисперсии волны с различными частотами распространяются с различными фазовыми скоростями.

При этом м.б., что $v > U$ и наоборот $U > v$.

Это зависит от свойств среды.

Групповая скорость, т.е. скорость распространения энергии всегда меньше скорости света

$$U < c !$$

Фазовая скорость м.б. как меньше, так и больше скорости света. Последнее наблюдается только в высоко ионизированных средах.

Все электронные приборы - мобильные телефоны, радио- и телеприёмники, радары фиксируют групповую скорость ЭМВ, т.к. именно она связана с переносом энергии. Фазовая скорость ЭМВ - это абстракция для описания распространения ЭМВ.

Лекция_11

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Явление интерференции. Дифракция. Принцип Гюйгеса-Френеля

Введение в волновую оптику

Свет - это сложное явление. Он ведёт себя то как ЭМВ, то как поток особых частиц - корпускул.

ЭМВ - это колебание векторов \vec{E} и \vec{H} .

Однако на опыте химическое, физиологическое, фотоэлектрическое воздействия вызываются только вектором \vec{E} . Поэтому, говоря о световом векторе, будем подразумевать только вектор \vec{E} .

Диапазон видимого света:

$$1) \lambda_0 = 400 \text{ нм} \div 760 \text{ нм} = 0,4 \text{ мкм} \div 0,76 \text{ мкм}$$

$$\nu = (0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

$$\lambda = \frac{\nu}{n};$$

$$2) \text{показатель преломления: } n = \frac{c}{\nu} = \sqrt{\epsilon M} \approx \sqrt{\epsilon} = \\ = \sqrt{\epsilon_{\infty}} \quad (1)$$

$$\epsilon_{H_2O} = 81, \epsilon_{\infty} = 1,77 - \text{на высоких част.} \\ n_{H_2O} = 1,33$$

3) оптическая длина пути в однородной среде:



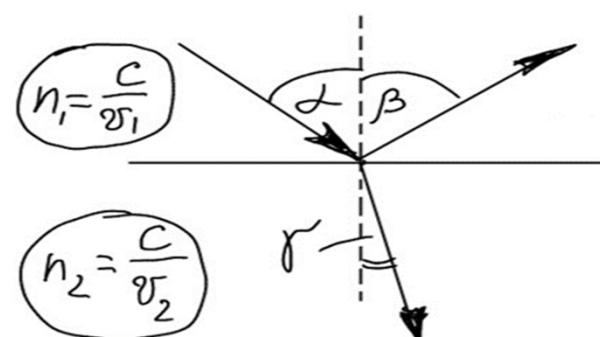
$$L = n s \quad (2)$$

В неоднородной среде:

$$L = \int_1^2 n dS \quad (3)$$

Основные законы геометрической оптики:

- 1) Закон прямолинейного распространения света.
- 2) Закон независимости световых лучей - при пересечении световые лучи не обмениваются энергией.
- 3) Закон отражения света - угол падения равен углу отражения (см. рис.)
- 4) Закон преломления - при преломлении на границе раздела сред отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно относительному показателю преломления второй среды относительно первой (см. формулу).
- 5) Принцип Ферма: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.



$$4) \angle \alpha = \angle \beta$$

$$5) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n_{21} \\ n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

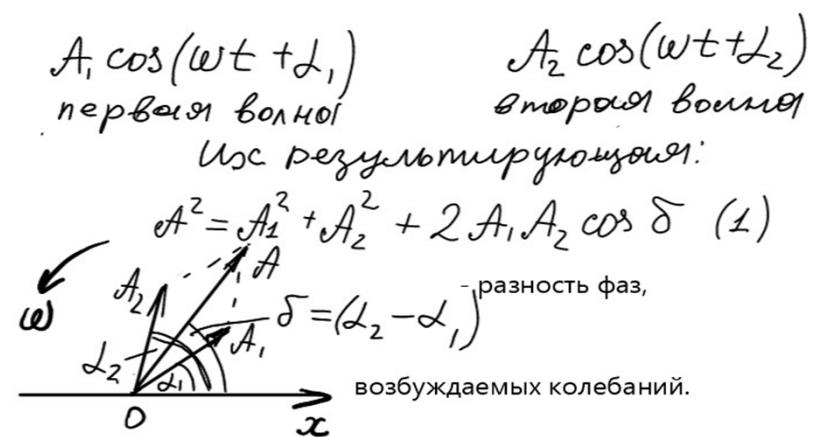
2. Волновая оптика

2.1 Интерференция световых волн

Интерференция - это круг явлений, при которых интенсивность результирующей волны при наложении волн не равна сумме отдельных интенсивностей. При этом возникает чередование тёмных и светлых участков - интерференционные полосы.

Необходимым требованием для интерференции является **когерентность источников и монохроматичность волн.**

Пусть две волны с одинаковой частотой ω распространяются в одном направлении:



Интенсивность света I пропорциональна квадрату амплитуды.

$$I \sim A^2$$

Тогда уравнение (1) можно записать:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (2)$$

Если разность фаз, возбуждаемых волнами колебаний, постоянна во времени, то волны называются когерентными.

Если волны когерентны:

$$\cos \delta > 0 \rightarrow I > (I_1 + I_2) - \text{max}$$

$$\cos \delta < 0 \rightarrow I < (I_1 + I_2) - \text{min}$$

Если волны не когерентны, то разность фаз хаотически меняется и:

$$\langle \cos \delta \rangle = 0 ; \quad I = I_1 + I_2$$

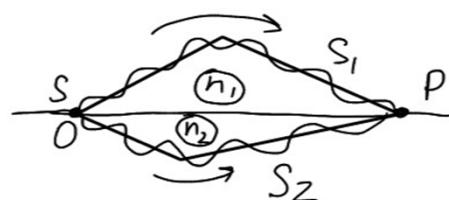
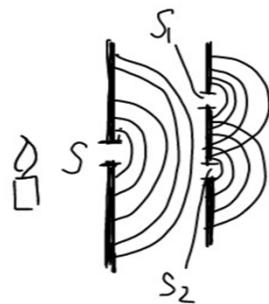
Естественные источники света некогерентны, т.к. свечение тел обусловлено испусканием волн отдельными атомами. Отдельные атомы излучают цуги длительностью 10^{-8} с. Начало фазы каждого нового цуга никак не связано с фазой предыдущего. Поэтому фазы результирующих волн меняются случайным образом - хаотически.

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = I_2 \rightarrow I_{\max} = 4I_1 \\ I_{\min} = 0 \end{array} \right\} \text{когер.}$$

Нет когерентности:

$$I = 2I_1$$

Опыт Юнга



$$A_1 \cos \omega \left(t - \frac{S_1}{v} \right)$$

$$A_2 \cos \omega \left(t - \frac{S_2}{v} \right)$$

Тогда в точке Р разность фаз двух колебаний будет:

$$\delta = \omega \left(\frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 S_2 - n_1 S_1)$$

$$v = \frac{c}{\lambda_0} \quad v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad ; \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

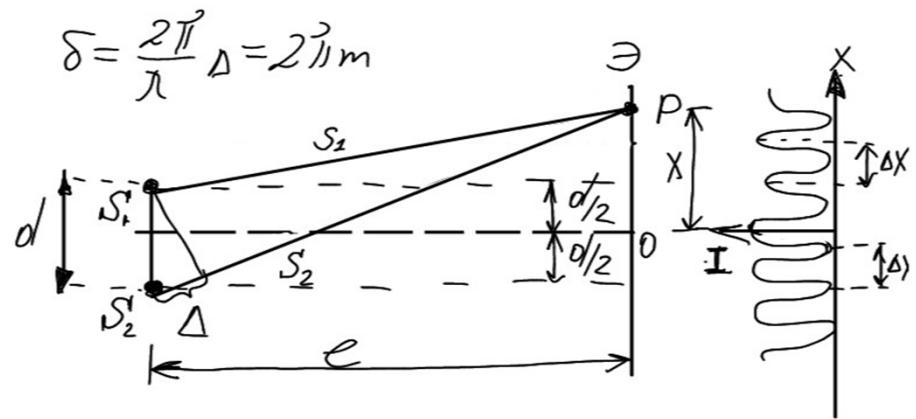
$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi v}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta} = \text{const}$$

$$\boxed{\Delta = n_2 S_2 - n_1 S_1 = \lambda_2 - \lambda_1} \quad (4)$$

(4) - Оптическая разность хода.

(3) - Разность фаз двух колебаний.

Вернёмся к опыту Юнга и рассмотрим его схему:



Из (3) следуют условия максимума и минимума:

$$\boxed{\Delta = \pm m \lambda_0; \quad (m=0, 1, 2, \dots)} \quad (5)$$

$$(\delta = 2\pi m)$$

$$\boxed{\Delta = \pm (m + \frac{1}{2}) \lambda_0; \quad (m=0, 1, 2, \dots)} \quad (6)$$

$$(\delta = \pm (2m+1)\pi)$$

Вычислим ширину интерференционной полосы в схеме опыта Юнга:

$$S_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2} \right)^2; \quad S_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2} \right)^2$$

$$S_2^2 - S_1^2 = (S_2 - S_1)(S_2 + S_1) = 2x d$$

$$S_2 - S_1 = \frac{2x d}{l}; \quad S_2 + S_1 \approx 2l$$

$$d \ll \ell, \\ \Delta = n \frac{x d}{\ell} \quad (7)$$

$$(7) \rightarrow (5), (6); \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$x_{max} = \pm m \frac{\ell}{d} \lambda$$

$$x_{min} = \pm (m + \frac{1}{2}) \frac{\ell}{d} \lambda$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

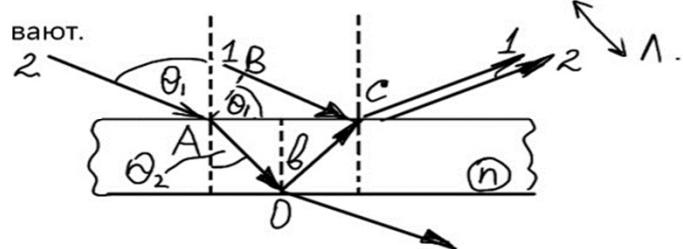
Разность координат соседних максимумов или минимумов даст расстояние между полосами, или ширину интерференционной полосы:

$$\boxed{\Delta x = \frac{\ell}{d} \lambda} \quad (8)$$

2.2 Способы наблюдения интерференции

1) Отражение от тонких пластинок

При падении световой волны на тонкую пластинку происходит отражение от верхней и от нижней поверхностей пластины. Вследствие этого пластина отбрасывает вверх два параллельных пучка. При этом второй пучок претерпевает преломление. Кроме этих двух пучков пластина отбрасывает вверх пучки, возникающие от 3-х, 5-ти и т.д. -кратного отражения, но их не учитывают.



(1) $\Delta = h S_2 - S_1$ - разность хода, которую приобретают лучи 1 и 2 в точке C .

$$\begin{aligned} S_1 &= BC ; \quad S_2 = AO + OC \\ S_1 &= 2B \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \sin \theta_1 \\ S_2 &= \frac{2B}{\cos \theta_2} \end{aligned} \quad \Rightarrow (1) \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{2Bn}{\cos \theta_2} - 2B \operatorname{tg} \theta_2 \cdot \sin \theta_1 =$$

т.к.

$$\begin{aligned} n \sin \theta_2 &= \sin \theta_1 \\ n \cos \theta_2 &= \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta_2} , \end{aligned}$$

то последнее равенство можно записать, как:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2B \frac{n^2 - n \sin \theta_2 \sin \theta_1}{n \cos \theta_2} = \\ &= 2B \frac{n^2 - \sin^2 \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = 2B \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \\ \Delta &= 2B \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (2) \end{aligned}$$

Привычеслии разности фаз δ между колебаниями 1 и 2 нужно, кроме оптической разности хода Δ учесть возможность изменения фазы волны при отражении. При отражении от оптически более плотной среды в точке C фаза изменяется на π , что эквивалентно потере $\lambda/2$. При отражении в точке O фаза не изменяется, поэтому окончательная формула:

$$\boxed{\Delta = 2B \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2}} \quad (3)$$

Итак, лучи 1 и 2, имея постоянную во времени разность хода, интерферируют.

2) Просветление оптики.

интерференция от тонких плёнок лежит в основе просветления оптики.

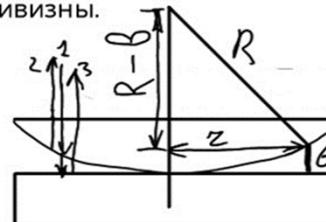
Просветление оптики - это уменьшение коэффициентов отражения от поверхностей оптических деталей путём нанесения на них непоглощающих плёнок, толщина которых соизмерима с длиной волны оптического излучения.

В сложных оптических системах при отражении от каждой границы раздела, т.е. на каждой поверхности линзы, теряется 4% падающего света. В сложных объективах суммарные потери светового потока достигают заметных величин. Кроме того, отражение от поверхностей линз приводят к возникновению бликов.

В просветлённой оптике: 1) на каждую поверхность линзы наносят тонкую плёнку вещества с $n_{\text{пл}} = \sqrt{n_{\text{линзы}}}$

2) толщина плёнки подбирается так, чтобы волны, отражённые от обеих поверхностей линзы погашали друг друга. При этих условиях интенсивность отражённых от обеих поверхностей плёнки становится одинаковой и волны гасят друг друга.

3) Кольца Ньютона - классический пример полос равной толщины. Линза должна иметь большой радиус кривизны.



Роль тонкой плёнки, на которой происходит отражение, играет воздушный клин между линзой и пластинкой. При нормальном падении света линии равной толщины имеют вид концентрических окружностей, при наклонном падении - эллипсов.

$$R^2 = (R - \delta)^2 + z^2 \approx R^2 - 2R\delta + \delta^2$$
$$\delta^2 \ll 2R\delta$$

$$\delta = \frac{z^2}{2R} \Rightarrow \Delta \sim 2\delta$$
$$\Delta_{\text{max}} = \pm m \lambda, \quad \Delta = \frac{z^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} \quad (4)$$

Приравняв (4) условию макс. или мин. интерференции, получим радиус светлых и тёмных колец в отражённом свете:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt{m R \lambda_0} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \\ z = \sqrt{\frac{R \lambda_0}{2} (m-1)}; \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{array} \right.$$

2.3 Явление дифракции

Дифракция – это круг явлений, связанный с нарушением законов геометрической оптики (огибание волнами препятствий, проникновение в область геометрической тени).

Между дифракцией и интерференцией нет различий. Оба явления заключаются в перераспределении плотности потока энергии светового пучка в результате суперпозиции волн и наблюдения тёмных и светлых полос.

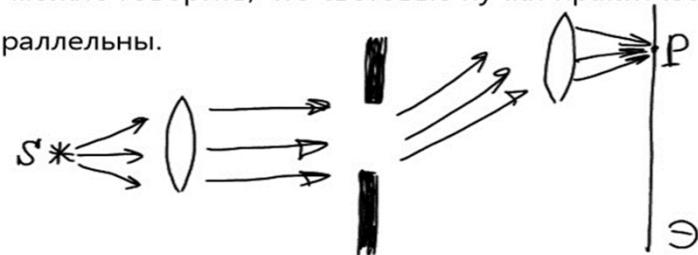
Интерференция света возникает в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников.

Дифракция волн – это перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно.

Схема наблюдения дифракции: источник, непрозрачная преграда, закрывающая часть волновой поверхности световой волны, затем экран, на котором наблюдают дифракционную картину.

Различают 2 вида дифракции: а) дифракция Фраунгофера и б) дифракция Френеля.

а) Дифракция Фраунгофера, если источник света и точка наблюдения находятся от преграды очень далеко, т.е можно говорить, что световые пучки практически параллельны.



б) Дифракция Френеля, если лучи, идущие от источника и от преграды недъзя считать параллельными.

2.4 Принцип Гюйгенса - Френеля

Необходимым условием для наблюдения дифракции является наличие неоднородностей в среде, где распространяется свет. При этом проникновение в область геометрической тени можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса - Френеля.

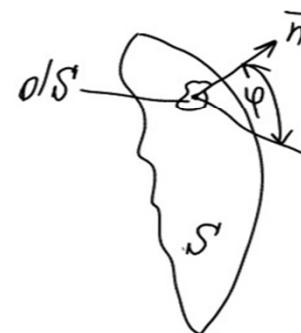
Согласно принципу Гюйгенса, каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн задаёт положение фронта волны в следующий момент времени.



является плоской волной.

Принцип Гюйгенса не даёт указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Он учёл амплитуду и фазу вторичных волн и это позволило найти амплитуду и фазу результирующей волны в любой точке пространства. Это принцип Гюйгенса-Френеля.



Согласно принципу Г.-Ф. каждый элемент волновой поверхности служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS' .

От каждого элемента dS' в точку P приходит колебание

$$\underline{\underline{D/E}} = K(\varphi) \frac{dS'}{z} \cos(\omega t - k z + \varphi_0) \quad (1)$$

$(\omega t + \varphi_0)$, D_0 фаза и амплитуда колебания в месте расположения первичной волновой поверхности S' ; K - волновое число; z - расстояние от элемента dS' до

точки P . Результирующее колебание в точке P представляет собой суперпозицию колебаний, взятых для всей волновой поверхности S :

$$E = \int_S K(\varphi) \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos(\omega t - \kappa z + \phi_0) dS \quad (2)$$

$K(\varphi)$ - коэффициент, зависящий от угла между нормалью \vec{n} к площадке dS и направлением от \vec{n} к точке P .

Лекция 2с_12

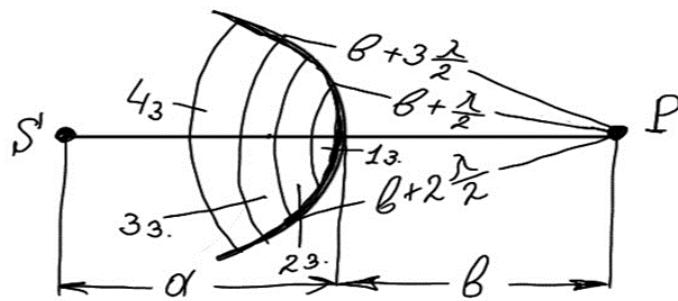
Дифракция Френеля. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решётка.

Явление поляризации световых волн.

Лекция_2с_10(1)

2.5 Зоны Френеля

Вычисление результирующего колебания по формуле Френеля из предыдущего параграфа является сложной задачей. Однако Френель предложил простой алгебраический способ нахождения амплитуды результирующего колебания в случаях, когда волны или преграды обладают симметрией.

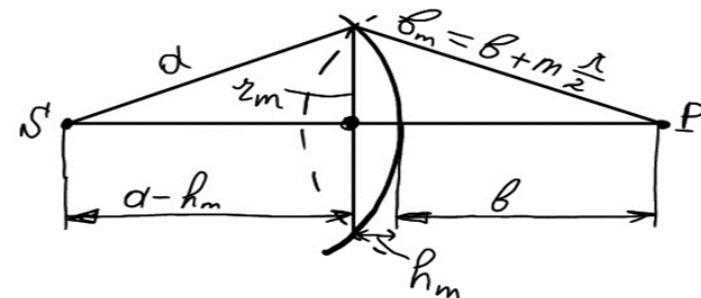


В однородной изотропной среде расстояние от внешнего края зоны до точки P равно:

$$\beta_m = \beta + m \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Тогда колебания, приходящие в точку P от аналогичных точек двух соседних зон, находятся в противофазе. Результирующие колебание, создаваемое

каждой из зон в целом, будет для соседних зон отличаться по фазе на π .



Рассмотрим зону m .

$$z_m^2 = \alpha^2 - (\alpha - h_m)^2 = (\beta + m \frac{\lambda}{2})^2 - (\beta + h_m)^2$$

$$z_m^2 = 2\alpha h_m - h_m^2 = \beta m \lambda + m^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2\beta h_m - h_m^2$$

$$h_m = \frac{\beta m \lambda + m^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(\alpha + \beta)}$$

$$h_m = \frac{\beta m \lambda}{2(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

Т.к. λ очень мала, то можно пренебречь λ^2 . При не слишком больших m высота сегмента $h_m \ll 0$, тогда

$$r_m^2 = 2\alpha h_m$$

$$(2) \Rightarrow z_m^2 \Rightarrow$$

$$z_m = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)} m \lambda} \quad (3)$$

Это формула радиуса зоны Френеля.

Амплитуды колебаний, возбуждаемых зонами Френеля в точке P , образуют монотонно убывающую последовательность:

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Т.к. фазы возбуждаемых соседними зонами колебаний отличаются на π , то амплитуда результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (4)$$

Вследствие монотонного убывания m можно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда все выражения в скобках (4) обращаются в ноль и (4) упрощается к виду

$$A = \frac{A_1}{2}. \quad (5)$$

Т.е. амплитуда, созданная в точке P всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, созданной одной лишь центральной зоной.

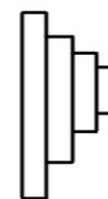
Если на пути волны поставить непрозрачный экран,

с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, то амплитуда в точке P будет равна A_1 , т.е. будет в 2 раза превышать амплитуду, созданную всей волной.

На свойстве, что колебания от чётных и нечётных зон Френеля находятся в противофазе и взаимно ослабляют друг друга, основано действие т.н. **зонных пластинок**.

Амплитудная зонная пластина перекрывает либо все чётные, либо все нечётные зоны Френеля - интенсивность света в точке наблюдения резко возрастает.

Фазовая зонная пластина - прозрачная пластина, толщина которой в местах, соответствующих чётным или нечётным зонам, отличается на такую величину, чтобы изменить фазу колебания на π . Она даёт увеличение амплитуды в 2 раза, а интенсивности в 4 раза .

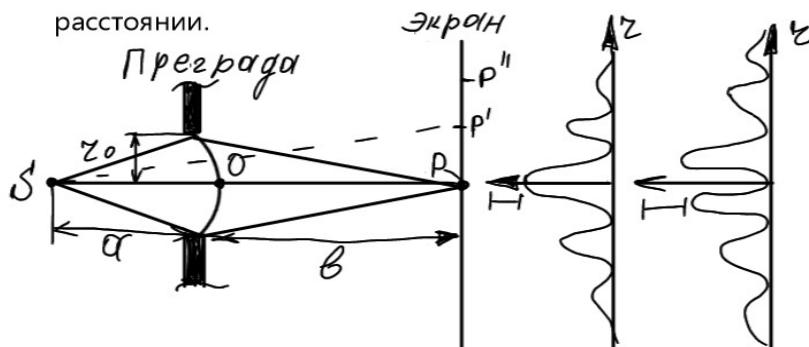


Набег фазы на одной ступеньке $\lambda/2$.
Работает как фокусирующая линза.

2.6 Дифракция Френеля от простейших препрятствий

1) Дифракция от круглого отверстия

Дифракция Френеля осуществляется, когда источник света и экран для наблюдения находятся на конечном расстоянии.



$$z_0 \ll \alpha \text{ и } \beta$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}} m \lambda \quad (1)$$

Число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{z_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \quad (2)$$

Тогда амплитуда в точке P будет равна:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m \quad (3)$$

\checkmark A_m берётся со знаком плюс, если m чётное, и минус, если m нечётное.

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots$$

Выражения в скобках равны нулю, тогда придём к

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m \text{-нечётное})$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m \text{-чётное})$$

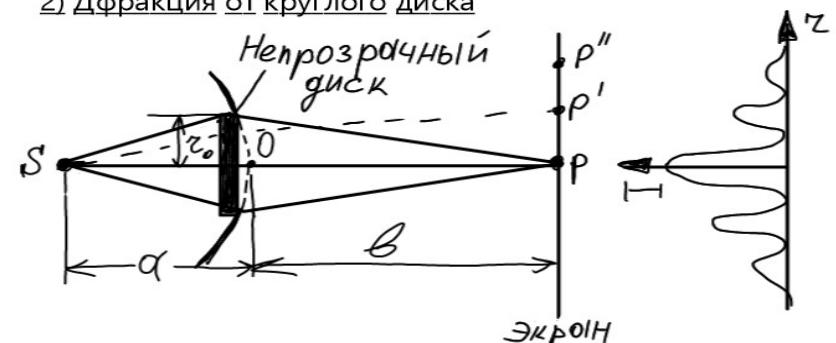
Т.к. амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы, поэтому

$$\frac{A_{m-1}}{2} - A_m = - \frac{A_m}{2}$$

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$$

Т. о., дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и тёмных концентрических колец и в центре картины будет либо светлое пятно (m -нечётное), либо тёмное пятно (m -чётное).

2) Дифракция от круглого диска



Если диск закроет m первых зон Френеля, то в точке P

будет равна:

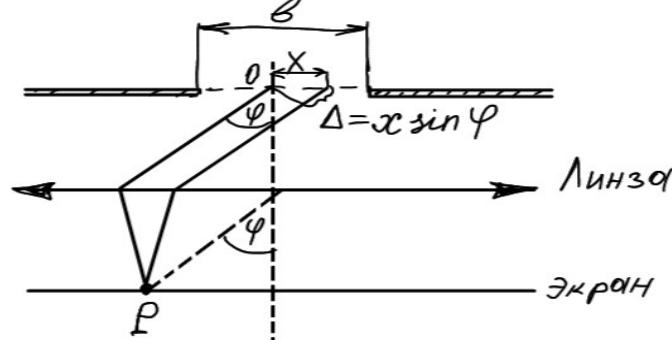
$$\begin{aligned} A &= A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \\ &= \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots \\ &\boxed{A = \frac{A_{m+1}}{2}} \end{aligned}$$

Т.о. в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и тёмных концентрических колец, причём в центре картины всегда наблюдается светлое пятно.

Огюст Френель - (1788 - 1827) родился в Париже в семье архитектора.

2.7 Дифракция Фраунгофера от щели

Рассмотрим бесконечно длинную щель. В любой плоскости перпендикулярно щели картина одинакова.



Разобъём щель на элементарные зоны dA . Вторичные волны, посыпаемые этими зонами в направлении угла φ собираются в точке P . Каждый элемент dA в точке P даёт: $dA = c dA$.

Тогда амплитуда A_0 , создаваемая в точке P всеми зонами:

$$A_0 = \int_0^b dA = \int_0^b c dA = c b$$

$$c = \frac{A_0}{b} \Rightarrow dA = \frac{A_0}{b} dA$$

Оптическая разность хода между колебаниями, возбуждёнными элементарной зоной в точке 0 и в точке X: $\Delta = c x \sin \varphi$.

тогда разность фаз колебаний, возбуждённых этими

элементарными зонами, будет равна:

$$-2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi$$

Тогда, согласно принципу Г.-Ф., колебание, испущенное элементарной зоной dx в точке P будет:

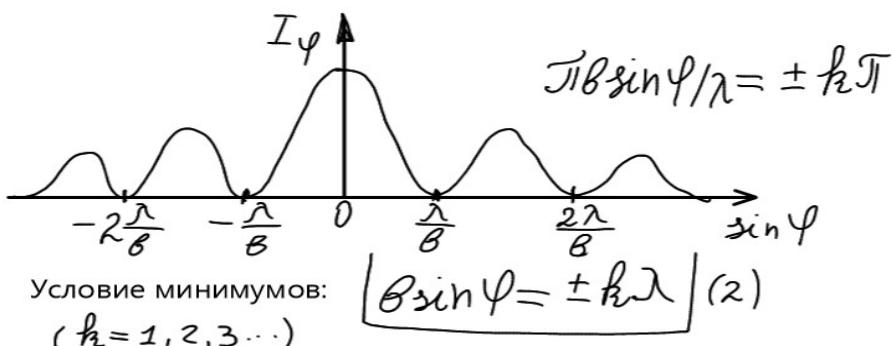
$${}_0 E_\varphi = \left(\frac{A_0}{B} dx \right) \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) \right]$$

Если проинтегрировать это выражение по всем зонам щели от $(-\frac{B}{2})$ до $(\frac{B}{2})$, то амплитуда результирующего колебания:

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin(\pi B \sin \varphi / \lambda)}{\pi B \sin \varphi / \lambda},$$

а интенсивность:

$$\boxed{I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\pi B \sin \varphi / \lambda)}{(\pi B \sin \varphi / \lambda)^2}} \quad (1)^*$$



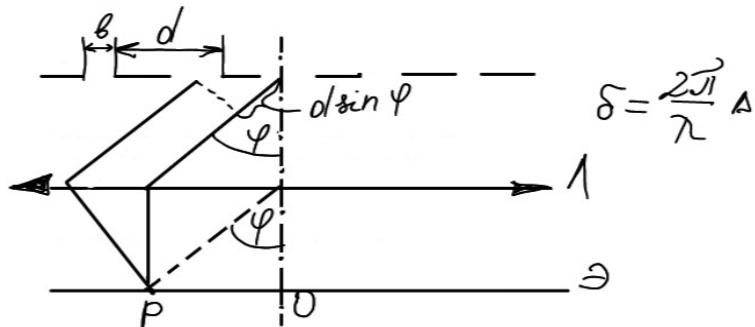
Количественным критерием, определяющим вид дифракции, является параметр $(B^2/\ell \lambda)$, где ℓ - расстояние от щели до экрана, λ - длина волны света в данной среде. Этот параметр напрямую связан с числом открытых зон Френеля:

$$\frac{B^2}{\ell \lambda} \begin{cases} \ll 1 & \text{- дифракция Фраунгофера} \\ \sim 1 & \text{- дифракция Френеля} \\ \gg 1 & \text{- геометрическая оптика} \end{cases}$$

$$I \sim \mathcal{A}^\ell$$

2.8 Дифракционная решётка

Дифракционной решёткой называется совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние щелей.



При падении света на решётку каждая щель в отдельности даст такую же картину распределения интенсивности, как одна щель. Картину от всех щелей придется на одно и то же место не зависимо от положения щели. Центральный максимум будет лежать против центра линзы.

Будем считать, что радиус когерентности $R_{ког}$ больше длины всей решётки L

$$R_{ког} >> L.$$

Тогда результирующее колебание в точке P , положение которой определяется углом φ , представляет собой сумму одинаковых колебаний, сдвинутых друг относительно друга по фазе на одну и ту же величину δ , т.е. :

$$I_{\text{реч.}} = I_\varphi \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad (1)$$

$$\Delta = d \sin \varphi \rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \quad (2)$$

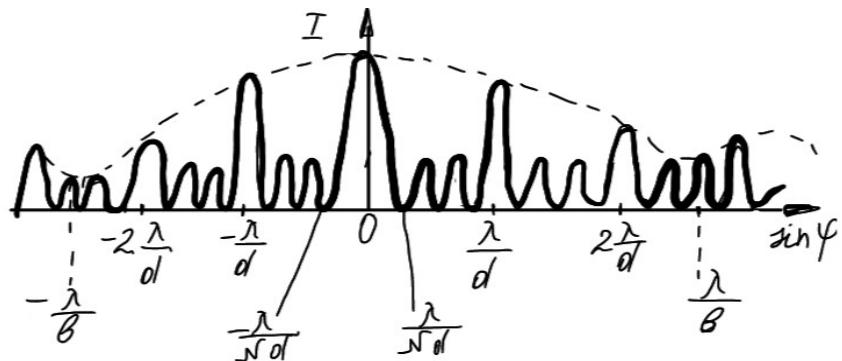
$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2(\pi B \sin \varphi / \lambda)}{(\pi B \sin \varphi / \lambda)^2} \quad (3)$$

$$(2) \text{ и } (3) \Rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{реч.}} &= I_\varphi \frac{\sin^2(N \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi)}{\sin^2(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi)} = \\ &= I_0 \frac{\sin^2(\pi B \sin \varphi / \lambda)}{(\pi B \sin \varphi / \lambda)^2} \cdot \frac{\sin^2(N \pi d \sin \varphi / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \varphi / \lambda)} \end{aligned} \quad (4)$$

I_0 - интенсивность, создаваемая одной щелью против центра линзы, N - количество щелей решётки.

d |
—



Первый сомножитель (4) обращается в ноль в точках:

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda \quad (5)$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

В этих точках обращается в "0" интенсивность, создаваемая каждой щелью в отдельности - это минимумы огибающей. Второй множитель принимает значение $\sqrt{2}$

при

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (6)$$

$$m = 0, 1, 2 \dots$$

В этих точках колебания от отдельных щелей усиливают друг друга - это условие главных максимумов.

Условие добавочных минимумов:

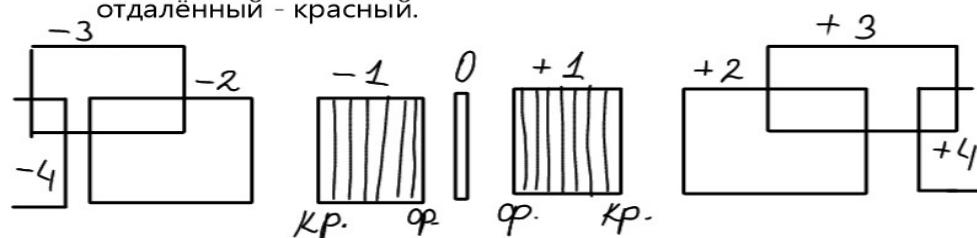
$$d \sin \varphi = \pm \frac{k'}{n} \lambda \quad (7)$$

$$k' = 1, 2 \dots, (n-1), (n+1) \dots$$

Эти минимумы там, где колебания от отдельных щелей взаимно поглощаются.

Положения главных максимумов зависят от λ .

Поэтому при пропускании через решётку белого света он разлагается в спектр. Центральный максимум белый, а далее ближе к центральному максимуму симметрично расположен фиолетовый, а наиболее удалённый - красный.



Спектры 2, 3 и 4 порядков перекрываются.

2.9 Основные характеристики спектральных приборов

1) Разрешающая способность – безразмерная величина, равная отношению длины волны к минимальной разности двух спектральных линий, при которых эти линии воспринимаются раздельно.

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

(1)



Максимумы двух спектральных линий расположены близко и воспринимаются как один макс.



Если середина одного максимума совпадает с краем другого, то такие максимумы воспринимаются как две раздельные спектральные линии.

Интенсивность в середине между максимумами должна составлять не более 80% от интенсивности в максимуме

Это критерий Релея. Для разрешающей способности дифракционной решётки:

$$R = m\sqrt{N}$$

(2)

m – порядок спектра; N – число щелей.

2) Угловая дисперсия

$$\mathcal{D}_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$$

(3)

$[\mathcal{D}_\varphi] = \frac{1}{m}$

$\delta\varphi$ – угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta\lambda$.

Для дифракционной решётки:

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda \Rightarrow d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda$$

$$\mathcal{D}_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$$

(4)

3) Линейная дисперсия

$$\mathcal{D}_\ell = \frac{\delta \ell}{\delta \lambda} \quad (5)$$

$d\ell$ - минимальное линейное расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta \lambda$

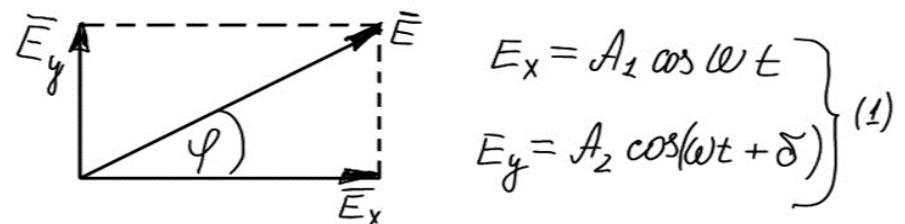
Линейная и угловая дисперсии связаны через фокусное расстояние F.

$$\mathcal{D}_e = F \mathcal{D}_\varphi \quad (6)$$

2.10 Поляризация ЭМ волн. Естественный и поляризованный свет

Если колебания светового вектора упорядочены каким-либо образом, то свет называется поляризованным.

В естественном свете колебания в разных направлениях быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Рассмотрим два взаимно перпендикулярных электрических колебания, совершающихся вдоль осей "X" и "Y" и отличающиеся по фазе на дельту δ .



Угол "фи" φ между результирующим вектором \mathbf{E} и его составляющей E_x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t} \quad (2)$$

Если разность фаз "дельта" меняется случайным образом, то и угол "фи" также будет менять своё направление случайным образом. Т.о. естественный свет это

наложены некогерентных ЭМ волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях. Такое представление намного упрощает рассмотрение прохождения естественного света через поляризационные устройства.

1) Пусть E_x и E_y когерентны, причём "дельта" равна 0 или "пи":

$$\underline{A_2} \quad \delta = 0, \pi \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A_1}{A_2}}$$

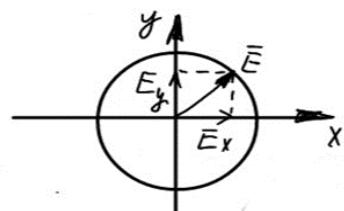


Это соответствует колебаниям вектора Е только в одном направлении под фиксированным углом "фи" в плоскости XY. **Это плоскополяризованный свет.**

2) В случае, когда

$$A_1 = A_2 \quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

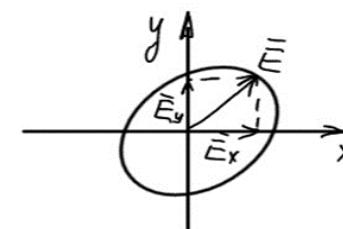
$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} \omega t}$$



Плоскость колебаний вектора Е поворачивается вокруг луча с угловой скоростью "омега", конец вектора Е

описывает круг и свет называется **поляризованным по кругу.**

3) В случае произвольного постоянного во времени значения "дельта" и при амплитуде A_1 не равной A_2 две произвольные когерентные световые волны со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации дают **эллиптическую поляризацию.**



При разности фаз равной 0 или "Пи" эллипс вырождается в прямую, при разнофаз "дельта" равной ("Пи")/2 и равенстве амплитуд $A_1 = A_2$ эллипс превращается в окружность.

В зависимости от направления вращения вектора Е различают **правую и левую** поляризацию.

Поляризованный свет получают с помощью приборов, называемых **поляризаторами**. Они пропускают колебания в направлении, параллельном плоскости поляризатора и полностью или частично не пропускают колебания в направлении перпендикулярном плоскости

поляризатора. Поляризатор, задерживающий колебания перпендикулярно его плоскости - не совершенный. Свет на выходе такого поляризатора будет **частично поляризованным**. Это смесь плоскополяризованного и частичнополяризованного света - колебания в одном направлении преобладают над колебаниями в других направлениях.

2.11 Степень поляризации. Закон Малюса

Если частично поляризованный свет пропустить через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча интенсивность прошедшего света будет изменяться от I_{max} до I_{min} . Переход от одной интенсивности к другой будет происходить при повороте на ("Пи")/2).

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1)$$

Эта величина называется степенью поляризации.

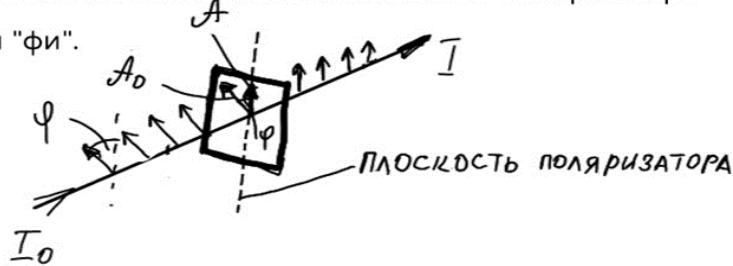
$$0 < P < 1$$

1) $I_{min} = 0 ; P = 1$ - плоскополяризованный свет

2) $I_{max} = I_{min}; P=0$ - естественный свет.

К эллиптически поляризованному свету и свету, поляризованному по кругу, понятие степени поляризации не применимо.

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет с амплитудой A_0 и интенсивностью I_0 . Плоскость колебаний составит с плоскостью поляризатора угол "фи".



Прибор пропустит лишь составляющую, совпадающую с плоскостью поляризатора:

$$A = A_0 \cos \varphi$$

Следовательно интенсивность прошедшего света определяется соотношением:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad (1)$$

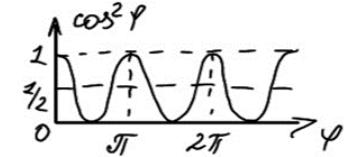
Это закон Малюса.

Если на пути естественного света поставить два поляризатора, плоскости которых образуют угол "фи", то

из первого поляризатора выйдет плоскополяризованный свет:

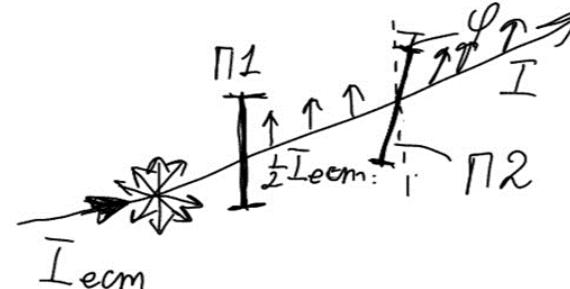
$$I_0 = I_{\text{есм}} <\cos^2 \varphi> = \frac{1}{2} I_{\text{есм}}$$

$$<\cos^2 \varphi> = \frac{1}{2}$$



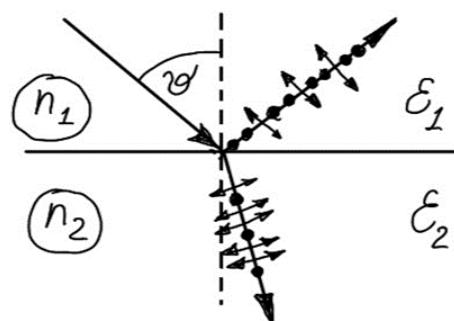
В соответствии с приведённым графиком, среднее значение косинуса в квадрате равно $1/2$. Среднее значение косинуса в квадрате берётся потому, что в естественном свете вектор \mathbf{E} в каждый момент времени совершает хаотические колебания под всеми возможными углами и все значения углов равновероятны. Тогда согласно закону Малюса из 2 поляризатора:

$$\underline{I = \frac{1}{2} I_{\text{есм}} \cos^2 \varphi}$$



2.12 Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков отличен от "0", то отражённый и преломлённый лучи оказываются частично поляризованными. В отражённом луче преобладают колебания перпендикулярные плоскости падения - на рис. они изображены точками. В преломлённом луче преобладают колебания, параллельные плоскости падения - они изображены в виде двойной стрелки, т.к. вектор E совершает колебания в этом направлении.



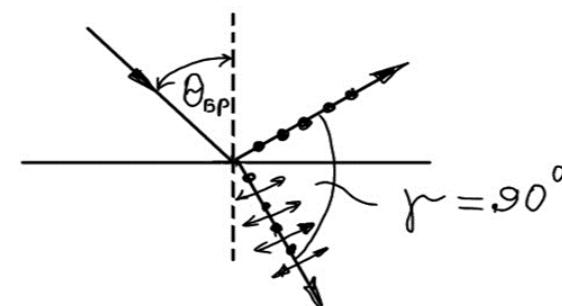
Степень поляризации зависит от угла падения.

Назовём угол, удовлетворяющий условию (1), углом Брюстера.

$$\vartheta = \theta_{БР}$$

$$\operatorname{tg} \theta_{БР} = n_{21} \quad (1)$$

При падении луча под углом Брюстера отражённый луч будет полностью поляризован. Преломлённый луч будет иметь максимальную степень поляризации, но останется частично поляризованным.





$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

$$\sin \varphi_2 = \cos \varphi_1$$

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \cos \varphi_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_{bp} = \frac{n_2}{n_1}$$

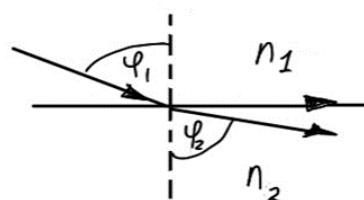
$$n_2 = 1,5$$

$$\theta_{bp} = 57^\circ$$

Рассмотрена задача о вычислении угла брюстера для границы воздух - стекло.

2.15 Полное внутреннее отражение. Световод

Явление полного внутреннего отражения заключается в том, что луч, падающий на границу раздела двух сред из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления при определённом угле падения не выйдет в среду с меньшим показателем преломления.



$$n_1 > n_2$$

$$\sin \varphi_1 n_1 = \sin \varphi_2 n_2$$

$$n_2 = 1$$

$$\sin \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

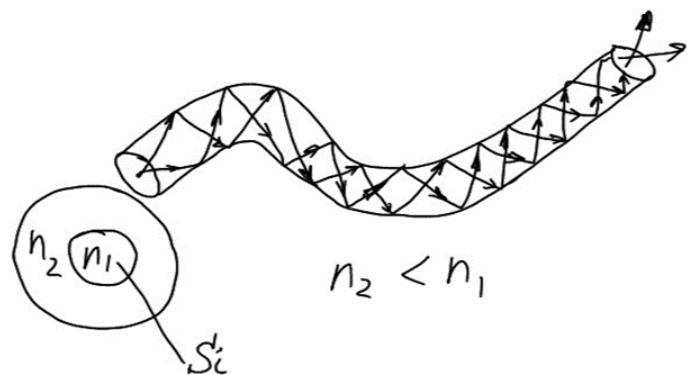
$$\sin \varphi_1 n_1 = 1$$

$$\boxed{\sin \varphi_1 = \frac{1}{n}}$$

Для стекла:

$$\underbrace{n = 1,5}_{\text{For glass}} \quad \underbrace{\sin \varphi = 42^\circ}_{\text{For glass}}$$

Волоконный световод представляет собой кварцевую нить с показателем преломления n_1 , окружённую оболочкой с показателем преломления $n_2 < n_1$. Свет в световоде распространяется по центральному волокну из чистого кварца, испытывая полное внутреннее отражение на границе с оболочкой. Оболочка обычно изготавливается тоже из кварца, но легированного германием (Ge) или фосфором (P). Волоконные световоды передают информацию по любым криволинейным траекториям с минимальными потерями.



Тепловое излучение

Абсолютно чёрное тело. Закон Стефана-Больцмана. Формула Релея-Джинса. Формула Планка.

Лекция_11_часть1

2.13 Тепловое излучение

К началу XX века в классической физике накопился ряд явлений, не поддающихся полному истолкованию в рамках классических представлений. К ним следует отнести температурное поведение теплоёмкости, фотоэффект и тепловое излучение. Последнее замечательно в историческом отношении тем, что в его теории появилась в 1900 году постоянная Планка - постоянная зарождающейся квантовой физики.

Излучение телами ЭМ волн (свечение тел) может осуществляться за счёт различных видов энергии.

Тепловое излучение (ТИ) - испускание ЭМ волн за счёт внутренней энергии тел.

Любое нагретое тело излучает ЭМ волны в очень широком диапазоне длин волн и частот. ТИ присущему всем нагретым телам, если они не находятся при температуре абсолютного нуля.

Все остальные виды свечения тел, возбуждаемые за счёт любой энергии, кроме внутренней, называются **люминесценцией**. Существуют: 1) хемолюминесценция - свечение за счёт выделяемой химической энергии (например свечение Р при окислении на воздухе); 2) элек-

тролюминесценция - свечение газов при самостоятельном разряде; 3) фотолюминесценция - свечение твёрдого тела, возбуждаемое поглощаемым телом ЭМ излучением.

ТИ есть при любой температуре. При невысоких температурах (порядка комнатной - 300 К) излучаются лишь длинные ЭМ волны - это область ИК излучения - порядка 1000 нм.

Единственным видом излучения, которое может находиться в равновесии с излучающим телом является тепловое излучение.

Это свойство ТИ связано с тем, что его интенсивность возрастает с повышением температуры. Допустим, что равновесие между телом и излучением нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Тогда внутренняя энергия тела будет убывать, что приведёт к уменьшению его температуры. Это в свою очередь приведёт к уменьшению количества излучаемой телом энергии. Температура тела будет понижаться до тех пор, пока количество излучаемой телом энергии не станет равной количеству поглощаемой энергии. Если равновесие нарушается в другую сторону, т. е. количество излучаемой энергии меньше поглощаемой, то

температура тела будет расти до тех пор, пока снова не установится равновесие. Т.о., нарушение равновесия в системе тело - излучение вызовет в системе возникновение процессов, восстанавливающих равновесие.

Основные характеристики теплового излучения:

1. Интенсивность теплового излучения мы будем характеризовать величиной **потока энергии** - Φ [Вт].
2. **Энергетической светимостью** тела будем называть поток энергии, испускаемый единицей поверхности тела по всем направлениям (тесный угол 2π) во всём интервале длин волн.

$$R_{\text{п}} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda, \text{п}} d\lambda \quad (1)$$

$$[R_{\text{п}}] = [\text{Вт}/\text{м}^2]$$

Энергетическая светимость является функцией длины волны и температуры.

3. Спектральная испускательная способность тела - энергия, испущенная в единицу времени с единичной площади в единичном интервале длин волн, в окрестности

какой-либо длины волны.

$$[\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \text{п}}] = [\text{Вт}/\text{м}^3]$$

Спектральную испускательную способность можно характеризовать не только длиной волны, но и частотой, т.к. существует связь между длиной волны и частотой.

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \rightarrow d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} ; \omega = 2\pi\nu$$

Знак "-" указывает на то, что с возрастанием длины волны убывает частота и наоборот, поэтому опустим знак. При одинаковой температуре в одинаковом интервале длин волн должно соблюдаться равенство:

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda} d\lambda = \tilde{\varepsilon}_{\omega} d\omega$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\omega} d\omega = \tilde{\varepsilon}_{\lambda} \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = \tilde{\varepsilon}_{\lambda} \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

$$\boxed{\tau_{\omega} = \tau \frac{2\pi c}{\omega^2} = \tau \frac{\lambda^2}{2\pi c}} \quad (2)$$

$$[\tau_{\omega, T}] = \left[\frac{\Phi_{ac}}{m^2} \right]$$

4. Все тела поглощают энергию падающих на них ЭМ волн. Характеристикой поглощения служит коэффициент поглощения, определяемый отношением поглощённого потока Φ' к величине падающего потока Φ .

$$\boxed{\alpha_T = \frac{\Phi'}{\Phi}} \quad (3)$$

Коэффициент поглощения называют также поглощательной способностью. Поглощательная способность в единичном интервале длин волн в окрестности какой-либо длины волны называют спектральной поглощающей способностью -

$$\alpha_{\lambda, T}.$$

5. Падающая на тело энергия не только поглощается, но и отражается. Интегральной характеристикой отражения является коэффициент отражения - это отношение отражённого потока к падающему:

$$\rho = \frac{\Phi''}{\Phi}$$

$$\alpha + \rho = \frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 1$$

Тела кроме отражения и поглощения могут пропускать энергию, т.е. обладать прозрачностью к тепловому излучению и характеризуются коэффициентом пропускания. Коэффициент пропускания зависит от толщины - большинство тел не прозрачны к тепловому излучению уже при сравнительно небольших толщинах.

2.14 Абсолютно чёрное тело. Закон Кирхгофа

Абсолютно чёрным телом (АЧТ) называется такое тело, которое при любой температуре полностью поглощает энергию падающих на него ЭМ волн, независимо от длины волны.

Для АЧТ коэффициент поглощения равен 1:

$$\alpha = \alpha_{\lambda, T} = 1 \quad (1)$$

Все реальные тела не являются абсолютно чёрными, т.е.

$$\alpha_{\lambda, T} < 1,$$

однако некоторые из них в определённом интервале частот близки к таковому. Для видимого света сажа, платиновая чернь, чёрный бархат имеют

Наиб

$$\alpha \approx 1.$$

Наиболее совершенная модель АЧТ - непрозрачная большая полость с зачернёнными сажей стенками, имеющая небольшое отверстие. Луч света, попадая в полость, вследствие много-кратных отражений от стенок, тратит почти всю энергию и интенсивность выходящего луча пренебрежимо мала по сравнению с интенсивностью падающего. Чем больше отношение площади полости к площади отверстия, тем рассматриваемая модель ближе к АЧТ. Пример - окна в яркий солнечный день. Интегральнуюлучеиспускательную способность АЧТ будем обозначать:

$$R_T^o = \int_0^\infty \alpha_{\lambda, T}^o d\lambda \quad (2)$$

$\alpha_{\lambda, T}^o$ - спектральная испускательная способность АЧТ

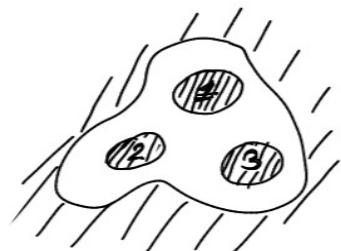


при данной температуре и длине волн.

Между испускательной и поглощательной способностью тел существует связь. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий эксперимент. Пусть внутри замкнутой оболочки, температура которой постоянна, помещены несколько тел. Полость внутри оболочки эвакуирована. Тела могут обмениваться друг с другом

испускательной способностью.

Т.к. температуры тел постоянны, то и энергия не должна изменяться, а тогда тело, испускающее большее энергии, должно больше и поглощать, т.е. обладать большим коэффициентом поглощения. Т.о., чем больше испускательная способность тела, тем больше и поглощательная способность. Отсюда вытекает соотношение:



лишь путём испускания и поглощения ЭМ волн. Опыт показывает, что такая система через некоторое время придёт в состояние теплового равновесия – все тела примут одну и ту же температуру, равную температуре оболочки T . В таком состоянии тело, обладающее большей испускательной способностью теряет в единицу времени с единицы поверхности больше энергии, чем тело, обладающее меньшей спектральной

$$\underbrace{\left(\frac{\gamma_{\omega,T}}{d_{\omega,T}} \right)_1}_{\text{Index 1}} = \left(\frac{\gamma_{\omega,T}}{d_{\omega,T}} \right)_2 = \left(\frac{\gamma_{\omega,T}}{d_{\omega,T}} \right)_3 = \dots \quad (2)$$

Индексы 1, 2, 3... относятся к различным телам.

Отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же универсальной функцией частоты и температуры.

$$\boxed{\frac{\gamma_{\omega,T}}{d_{\omega,T}} = f(\omega, T)} \quad (3)$$

Формула (3) - это математическая формулировка закона Кирхгофа.

Сами величины испускательной и поглощательной способностей, входящие в (3), могут сильно изменяться при переходе от одного тела к другому, однако их отношение оказывается одинаковым для всех тел. Это отношение показывает, что тело, сильнее поглощающее какие либо лучи, будет сильнее и испускать.

Для АЧТ закон Кирхгофа записывается следующим образом:

$$\frac{\tau_{\omega,T}^o}{\lambda_{\omega,T}} = f(\omega, T).$$

Но для АЧТ

$$\lambda_{\omega,T} = 1,$$

тогда:

$$\tau_{\omega,T}^o = f(\omega, T),$$

есть

не что иное, как испускательная способность АЧТ.

Т.о., отношение лучеиспускательной способности тела к его поглощательной способности в некотором интервале длин волн равно испускательной способности АЧТ того же интервала длин волн и при той же температуре.

Следствия из закона Кирхгофа:

1) Т.к.

$$\lambda_{\lambda,T} < 1, \text{ то } \tau_{\lambda,T}^o > \tau_{\lambda,T}$$

Т.е. при любой температуре излучение АЧТ наибольшее.

2) Если тело не поглощает некоторые длины волн, то оно их и не излучает, но не наоборот.

$$\lambda_{\lambda,T} = 0 \Rightarrow \tau_{\lambda,T} = 0$$

3) Если АЧТ некоторых длин волн не излучает, то их не излучает и серое тело. $\tau_{\lambda,T}^o = 0 \Rightarrow \tau_{\lambda,T} = 0$
Если стенки модели АЧТ поддерживать при постоянной температуре, то из отверстия будет

выходить излучение, близкое к излучению АЧТ.

Разлагая излучение в спектр с помощью дифракционной решётки и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно экспериментально найти вид функции

$$f(\omega, T) = \gamma_{\omega, T}^{\sigma}$$

Результат такого эксперимента приведён на рисунке

для $\varphi(\lambda, T)$ и $f(\omega, T)$.

Площадь под кривой есть энергетическая светимость. Разные кривые относятся к различным температурам. На зависимости излучательной способности от длины волн с ростом температуры максимумы смещаются в область коротких длин волн. С ростом температуры энергетическая светимость резко возрастает.

На зависимости излучательной способности от частоты с ростом температуры максимумы смещаются в область больших частот. Энергетическая светимость с ростом температуры также возрастает.

2.14 Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина

Долгое время попытки получить аналитические зависимости

$$f(\omega, T) \text{ или } \varphi(\lambda, T)$$

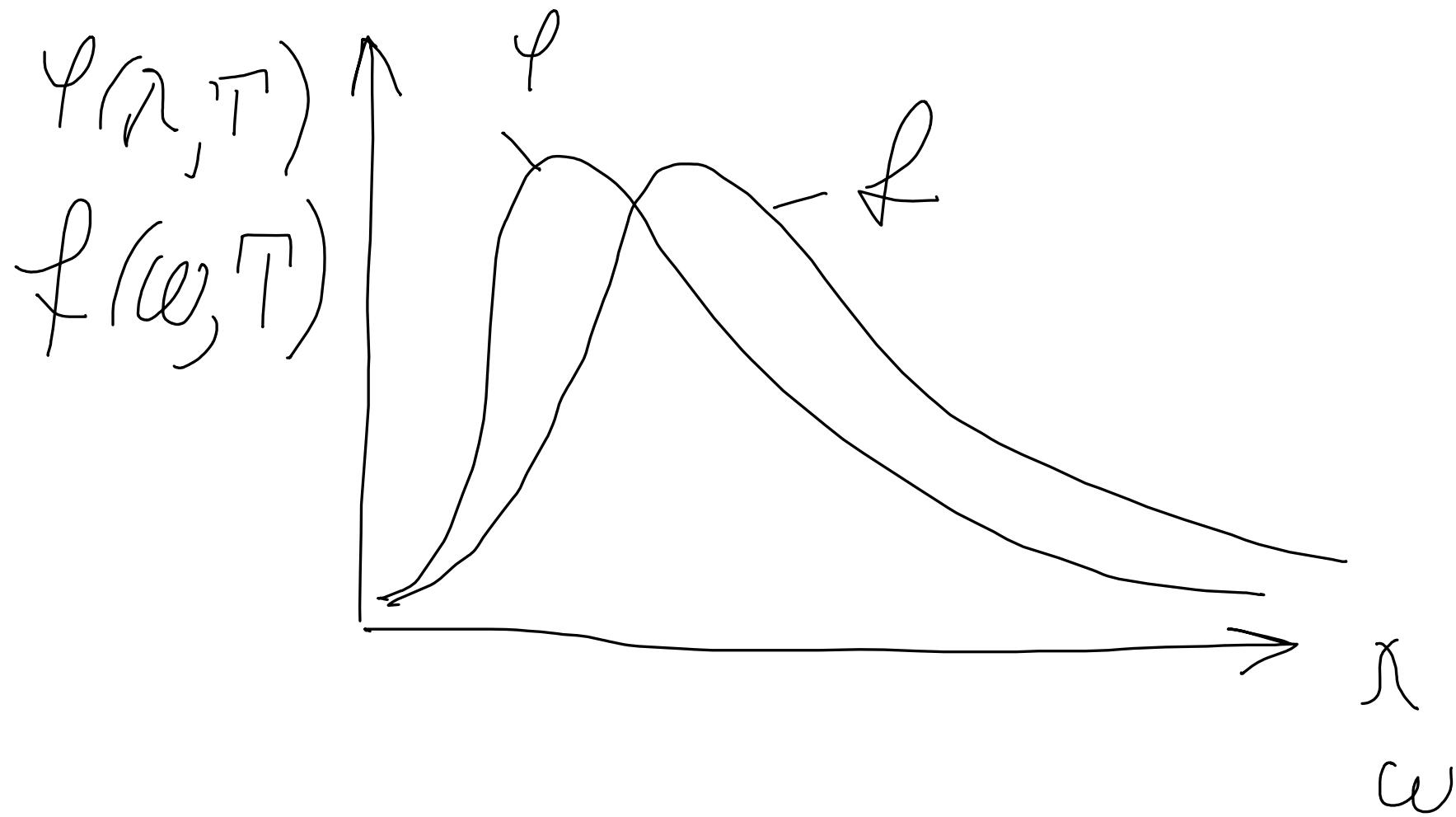
не давали общего решения задачи. Стефан, анализируя экспериментальные данные, пришёл к выводу, что

$$R \sim T^4.$$

Однако более точные измерения показали ошибочность результата. Больцман, исходя из ТД соображений, получил теоретически для энергетической светимости АЧТ следующее значение.

$$\left[R_T^{\sigma} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \mathcal{Z} T^4 \right] \quad (1)$$

$$\mathcal{Z} = 5,7 \cdot 10^{-8} \quad \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} \right)$$



Это значение постоянной Стефана-Больцмана. Из ТД и ЭМ Вин показал, что функция спектрального распределения имеет вид

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (2)$$

либо

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} \Phi(\lambda, T) \quad (3).$$

Эта функция позволяет найти связь между длиной волны, на которую приходится максимум функции и температурой. Для этого надо взять производную от (3) и приравнять нулю.

$$\frac{d\varphi(\lambda, T)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_m = f(T).$$

Решение этого уравнения относительно длины волны позволило Вину получить соотношение:
Это закон смещения Вина.

$$\boxed{\lambda_m = \frac{b}{T}} \quad (4)$$

Постоянная Вина:

$$\underline{b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м.к.}}$$

Т.о., при увеличении температуры T увеличивается не только испускаемая энергия, но и изменяется и спектральный состав излучения. Последний факт все неоднократно наблюдали - пламя вокруг свечи - оранжевое, жёлтое, голубое (фиолетовое).

Фиолетовое - самое горячее пламя.

Жёлтое - следующее по температуре в сторону понижения.

Оранжевое - самая холодная часть пламени.

Лекция_11_часть2

2.16 Формула Релея - Джинса

Попытка объяснить вид кривых теплового излучения, исходя из законов классической физики, была сделана Релеем и Джинсом. Они в своих теоретических выводах основывались на законах классической физики.

Из классической электродинамики следует, что с энергетической точки зрения "чёрное" излучение в полости эквивалентно системе из бесконечно большого числа невзаимодействующих друг с другом гармонических излучателей. Причём собственные частоты последних равны частотам соответствующих компонент АЧТ. Исходя из теоремы классической статистической физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, они предположили, что на каждое ЭМ колебание приходится в среднем энергия, равная двум половинкам КТ (одна половина на электрическую, вторая - на магнитную энергию волны). Исходя из этого они записали среднюю энергию осциллятора:

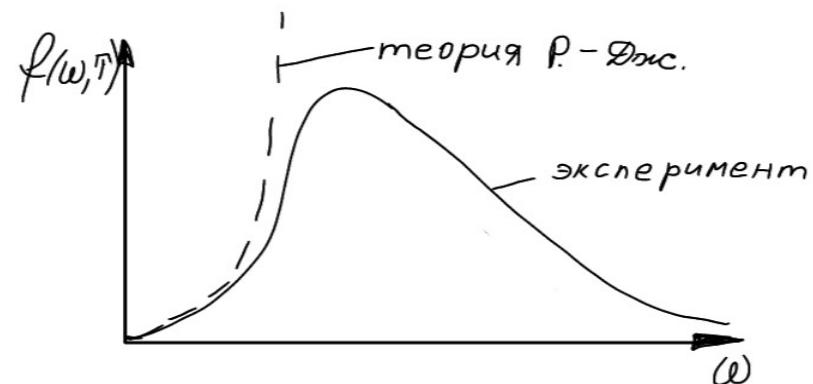
$$\langle \mathcal{E} \rangle = K\mathcal{T} \quad (1)$$

Далее ими было показано, что универсальная функция частоты и температуры м.б. записана как:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 C^2} \langle \mathcal{E} \rangle$$

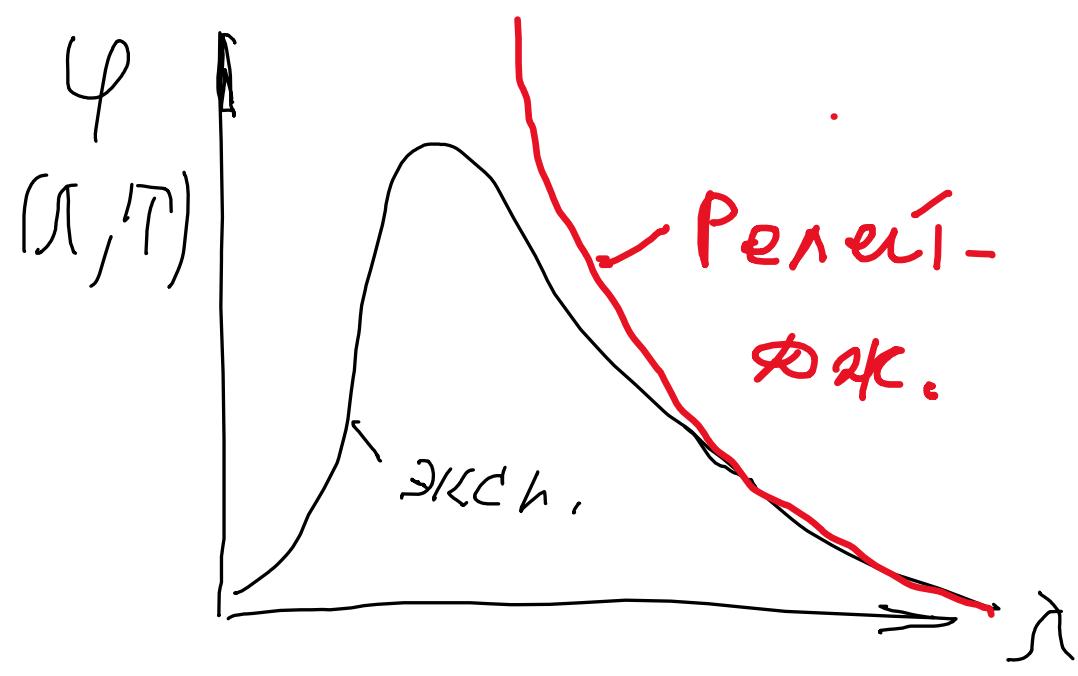
$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 C^2} K\mathcal{T} \quad (2)$$

Отметим, что в (2) не вошли ни заряд ни масса осциллятора.



леем - Джинсом интегральная излучательная способность АЧТ обращается в бесконечность. В действительности она $\sim T^4$.

В литературе в течение некоторого времени употреблялся термин "ультрафиолетовая катастрофа", указывая на то, что при переходе к УФ части спектра в соответствии с (2) и (2') излучение должно резко возрастать.



2.17 Формула Планка

С точки зрения классической физики вывод формулы Релея-Джинса являлся безупречным. Поэтому расхождение этой формулы с опытом указывало на существование каких-то закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

Выход из создавшегося положения был указан Максом Планком. В первом своём сообщении на заседании немецкого физического общества Планк представил эмпирическую формулу, правильно описывающую распределение энергии по спектру излучения АЧТ. Вскоре в этом же году Планк доложил о выводе полученной им формулы. День этого доклада (14 декабря 1900 г.) можно считать днём рождения квантовой физики.

Планк выдвинул совершенно чуждую классической физике гипотезу о том, что энергия осциллятора E может принимать лишь определённые дискретные значения, равные целому числу элементарных порций энергии E_0 , которые он назвал квантами энергии, причём E_0 д.б. пропорциональна частоте. Следовательно:

$$E_0 = h\nu \quad (1)$$

2.17 Формула Планка

С точки зрения классической физики вывод формулы Релея-Джинса являлся безупречным. Поэтому расхождение этой формулы с опытом указывало на существование каких-то закономерностей, несовместимых с представлениями классической физики.

Выход из создавшегося положения был указан Максом Планком. В первом своём сообщении на заседании немецкого физического общества Планк представил эмпирическую формулу, правильно описывающую распределение энергии по спектру излучения АЧТ. Вскоре в этом же году Планк доложил о выводе полученной им формулы. День этого доклада (14 декабря 1900 г.) можно считать днём рождения квантовой физики.

Планк выдвинул совершенно чуждую классической физике гипотезу о том, что энергия осциллятора E может принимать лишь определённые дискретные значения, равные целому числу элементарных порций энергии E_0 , которые он назвал квантами энергии, причём E_0 д.б. пропорциональна частоте. Следовательно:

$$E_0 = \hbar \nu \quad (1)$$

где ν - частота излучения, а \hbar - коэффициент пропорциональности, получивший название "постоянной Планка". Её значение:

$$\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} (\text{Дж} \cdot \text{с}) .$$

Т.н. приведённая постоянная Планка:

$$\begin{aligned} \tilde{\hbar} &= \frac{\hbar}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} (\text{Дж} \cdot \text{с}) = \\ &= 6,59 \cdot 10^{-14} (\text{эВ}) \end{aligned}$$

Через приведённую постоянную Планка элементарная порция энергии записывается в виде:

$$\checkmark \quad \underbrace{E}_{\sim} = \tilde{\hbar} \omega \quad (2)$$

Предполагалось, что энергия осцилляторов могла

принимать лишь значения:

$$\checkmark \quad 0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, \dots, \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{E}_n = n\hbar\omega \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3)$$

Для описания распределения колебаний по значениям энергии Планк использовал распределение Больцмана:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right) \quad (4)$$

Учитывая вероятностный характер колебаний осцилляторов, а также выражения (3) и (4), он нашёл среднее значение энергии осциллятора, которое в короне отличалось от выражения средней энергии осциллятора, использованное Релеем и Джинсом:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} \quad (5)$$

В таком виде Планк представил значение средней энергии осциллятора и ему удалось получить "исправленную" формулу Релея-Джинса:

$$\checkmark \quad \boxed{f(\omega, T) = \gamma_{\omega, T}^{\sigma} = \frac{\omega}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}} \quad (6)$$

Это формула Планка. Она хорошо согласуется с экспериментальными данными. При малых частотах

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \simeq \frac{\hbar\omega}{kT} \Rightarrow$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle = kT$$

и (6) прямо переходит в формулу Релея-Джинса. В области высоких частот

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \simeq \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$$

и (6) экспоненциально убывает при частоте, стремящейся к бесконечности, а не стремится к бесконечности, как это имеет место у Релея-Джинса.

Из формулы Планка легко получить закон Вина.

Формулу (6) можно записать в виде:

$$f(\omega, T) = \omega^3 \frac{1}{4\pi^2 C^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$$

и универсальная функция Вина окажется равной

$$F\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{4\pi^2 C^2} \cdot \frac{\hbar}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \quad (7)$$

Из (6) вытекает также закон Стефана-Больцмана.

$$R^o(T) = \frac{1}{4\pi^2 C^2} \int_0^\infty \omega^2 \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} d\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$= \frac{K^4}{4\pi^2 C^2 \hbar^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (8)$$

Сравнивая (8) с выражением закона Стефана-Больцмана и учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

получаем:

$$\mathcal{Z} = \frac{K^4 \pi^2}{60 C^2 \hbar^3} \quad (9)$$

Откуда можно найти постоянную Планка:

$$\hbar = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 K^4}{60 C^2 Z}} \quad (10)$$

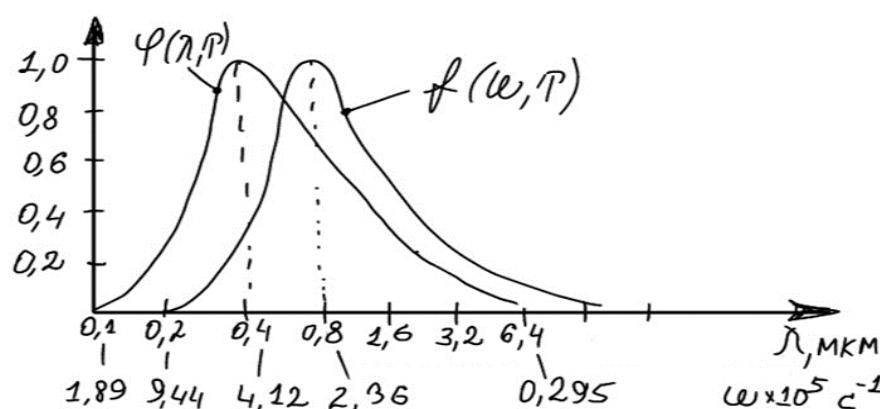
$$Z = 5,6 \cdot 10^{-8} \frac{B_m}{M^2 K^4}$$

Поскольку постоянная Стефана-Больцмана была измерена с большой степенью точности, то (10) позволяет достаточно точно определить значение приведённой постоянной Планка.

Осуществив в (6) переход от частоты к длине волн, можно записать:

$$\left| \varphi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{h c / \lambda k T} - 1} \right| \quad (11)$$

Можно построить графики функций (6) и (11) для одной и той же температуры (5000 К).



На графике масштабы по оси абсцисс логарифмические и вбраны так, что связанные известным соотношением длина волны и частота совмещены друг с другом.

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

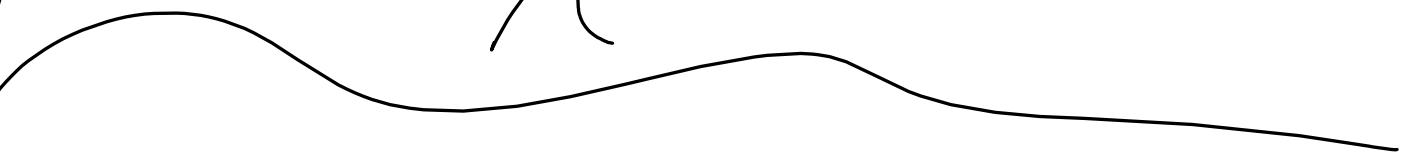
Для решения практических задач формулу (11) можно представить в виде:

$$\varphi_{\lambda, T}^0 = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \left[\frac{1}{e^{h c / \lambda k T} - 1} \right]$$

$$\varphi_{\lambda, T}^0 = C_1 \lambda^{-5} (e^{C_2 / \lambda k T} - 1)^{-1}$$

$$C_1 = (3,7405 \pm 0,0003) \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$$

$$C_2 = (1,43879 \pm 0,00019) \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \text{const}(t)$$


$$\Delta = n_i S_i - n_e S_e$$

Лекция 14

КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Лекция-12

Квантовые свойства света

2.18 Фотон как частица

Для объяснения теплового излучения Планку пришлось ввести "квантовую гипотезу" - гипотезу о дискретных уровнях значений энергии осциллятора. Через 5 лет после работы Планка появилась работа Энштейна, в которой был сделан следующий шаг в развитии квантовых представлений: был введён квант света - фотон. Эйнштейн сумел в рамках такого представления полностью объяснить свойства фотоэффекта и снять трудности в классическом описании этого явления.

Любая частица в современной физике характеризуется следующими параметрами: масса покоя, полная энергия, импульс. Кроме этих параметров, частицам приписывается ещё ряд характеристик, но о них речь пойдёт позже. Определим три основных характеристики фотона. Энергия фотона была постулирована Эйнштейном

$$E = \hbar \omega$$

(1)

С другой стороны масса релятивистской частицы даётся соотношением

$$m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}},$$

где m_0 - масса покоя частицы, v - её скорость. Но для фотона $v=c$ и знаменатель становится равным нулю $(1 - v^2/c^2) = 0$. Для того, чтобы "спасти" формулу для массы фотона (в знаменателе нуль!), необходимо положить $m_0 = 0$, т.е. считать массу покоя фотона равной нулю. Раскрыть получающуюся здесь неопределённость не представляется возможным. Для определения массы фотона воспользуемся формулой для полной энергии частицы:

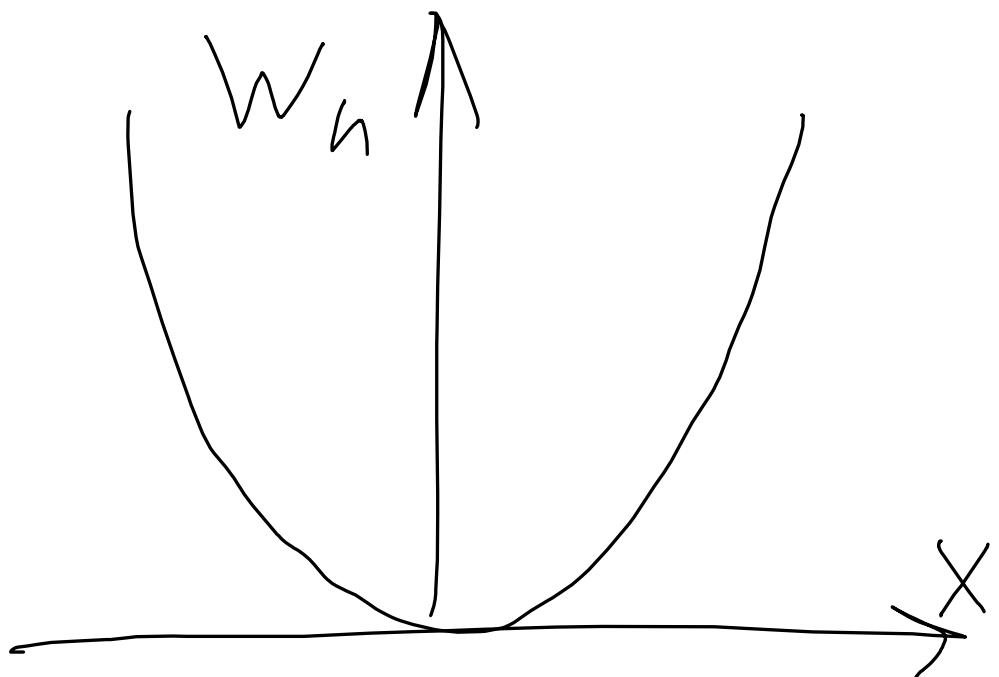
$$E = m c^2 \quad (2)$$

Сравнивая её с (1), получим:

$$m = \frac{\hbar \omega}{c^2}$$

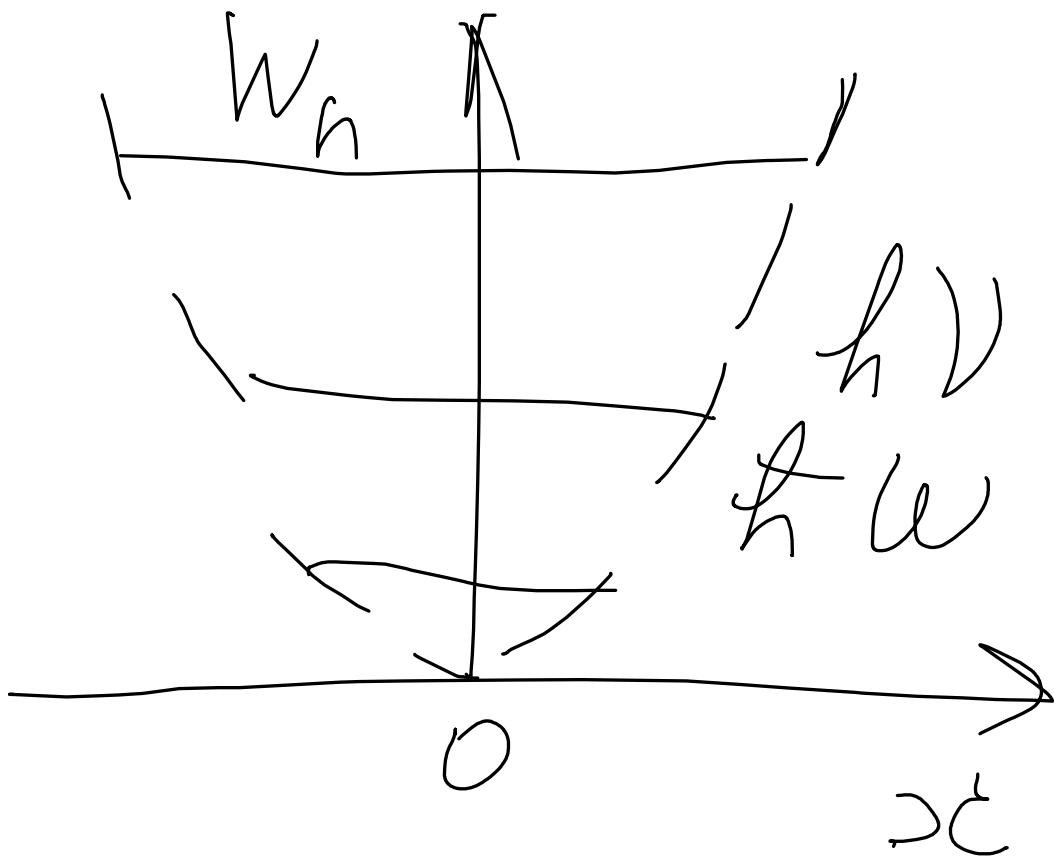
(3)

Кинес. ГО



$$w_h = \frac{kx^2}{2}$$

Кинес. ГО



Итак, фотон имеет нулевую массу покоя и ненулевую массу движения. На первый взгляд, утверждение о нулевой массе покоя является физически бессмысленным - масса материальной частицы в собственной системе отсчёта д. б. положительной. Следовательно, для измерения массы покоя фотона необходимо перейти в систему отсчёта, где фотон покоится. Но это невозможно! По одному из постулатов специальной теории относительности, в любой инерциальной системе отсчёта скорость фотона равняется С - скорости света. Итак, масса покоя фотона не является физической величиной, и её равенство нулю является формальным и не имеет физического смысла. Теперь уже нетрудно определить импульс фотона, если воспользоваться формулой для релятивистского импульса. Поскольку для фотона $V = C$, то $p = mC$ или

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} .$$


В векторной форме, если учесть, что вектор импульса \mathbf{p} параллелен волновому вектору \mathbf{k} с помощью (2), имеем

$\overline{P} = \hbar \overline{k}$

(4)

Итак, основные свойства фотона как частицы определяются формулами (1), (3), (4).

Корпускулярные представления позволяют объяснить как ряд чисто классических явлений, понятных в рамках волнового подхода, так и эффекты, которые классическая физика объяснить не в состоянии.

$$\omega = \frac{\omega}{k}, k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega \leq c$$

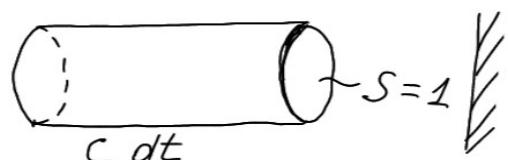
$$k = \frac{\omega}{c}$$

2.19 Давление света

Недавно, рассматривая свойства ЭМ волн, мы представили давление света как классический волновой эффект. Теперь рассмотрим давление света с точки зрения корпускулярного подхода.

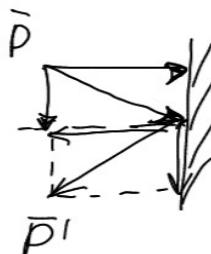
Если в результате взаимодействия света с каким-либо телом происходит отражение или поглощение, то это означает, что при таком взаимодействии меняется и импульс. Но, если происходит изменение импульса света, то на тело действует импульс силы

$$\mathcal{F}_{\Delta t} = \Delta P.$$



Выделим цилиндр с образующей длины Cdt и с единичной площадью основания, где dt - некоторый промежуток времени. За это время все фотоны, находящиеся внутри цилиндра, "ударят" по поверхности экрана и зеркально от него отразятся. Экран получит импульс

на единицу площади:



$$\Delta P = 2n \frac{\hbar\omega}{c} C dt$$

где n - количество фотонов в единице объёма (концентрация). Следовательно, сила, действующая на единицу поверхности экрана, оказывается равной:

$$\mathcal{F} = \frac{dP}{dt} = 2n \hbar\omega$$

$n \hbar\omega = \mathcal{W}$ - обёмная плотность энергии

Тогда световое давление окажется равным удвоенной

$$\underline{P = \mathcal{F} = 2\mathcal{W}}$$

плотности энергии. Такое давление испытает поглощающая площадка.

$$\Delta p = 2h \frac{\hbar\omega}{c} \text{d}/t$$

$$[n] = \frac{N}{V}, [m^{-3}]$$

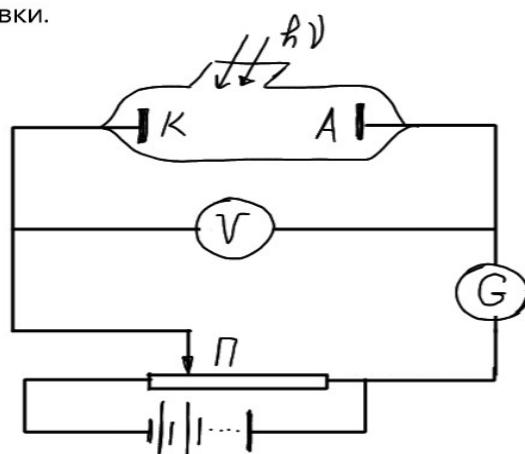
$$c \text{d}/t = [m]$$

$$p = mc = \frac{\hbar\omega}{c^2} c = \frac{\hbar\omega}{c}$$

2.20 Внешний фотоэффект

Фотоэффект - явление испускания электронов веществом под действием света.

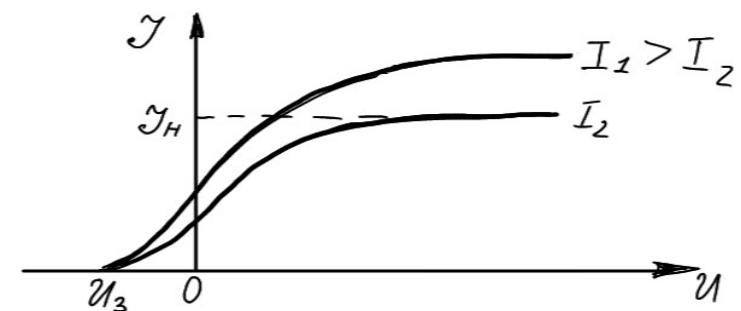
Фотоэффект (ФЭ) был открыт Герцем в 1887 г. Обычно ФЭ наблюдают с помощью следующей экспериментальной установки.



Электроды помещались в вакуумированный баллон. Катод освещался светом, проходящим через кварцевое окно. Электроны, испущенные под действием света, начинают перемещаться к аноду. При этом в цепи течёт ток, регистрируемый гальванометром. Напряжение между К и А измеряется вольтметром V. Его величину можно изменять с помощью потенциометра Π. ВАХ

приведены на рисунке при неизменном потоке света.

По кривым видно, что уже при небольшом напряжении фототок достигает насыщения, т.е. все испущенные электроны достигают анода. Пологий ход кривых говорит о

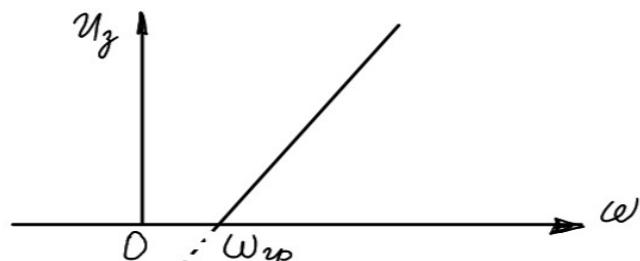


том, что электроны вылетают из катода с различными скоростями. Даже при напряжении равном нулю часть электронов обладает достаточной скоростью, чтобы долететь до анода без ускоряющего поля. Для обращения тока в ноль необходимо приложить задерживающую разность потенциалов U_3 . При таком напряжении ни одному электрону, даже обладающему при вылете максимальной скоростью V_m не удаётся достичь анода. Поэтому

$$\frac{m V_m^2}{2} = e U_3$$

где m - масса электрона, и по U_3 можно определить максимальную скорость фотоэлектронов. Если освещать катод светом с большей интенсивностью $I_2 > I_1$, то ток насыщения окажется больше.

Неожиданным оказалось то, что ток через фотоэлемент становится равным нулю при одинаковом U_3 . Это означает, что максимальная кинетическая энергия электронов не зависит от интенсивности света. По классической теории амплитуда электрического вектора пропорциональна корню из интенсивности и, следовательно с ростом интенсивности должна расти и энергия фотоэлектронов. Полученный экспериментальный график запирающего напряжения от частоты линейно зависит от частоты и не зависит от интенсивности света. Наименьшая частота, при которой начинается фотоэффект, называется его красной границей и зависит только от вещества, из которого сделан катод. Такой результат резко противоречит классическому подходу.



Действительно, если в металле электроны слабо связаны, то в поле световой волны электроны ведут себя в соответствии с уравнением движения:

$$m\ddot{x} = eE \cos \omega t.$$

$$\vartheta = \dot{x} = \frac{eE}{m\omega} \sin \omega t,$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(\frac{eE}{\omega} \right)^2 \sin^2 \omega t.$$

Следовательно, согласно классическим представлениям, энергия электрона должна падать с частотой обратно-пропорционально "омега" в (-2) степени, а не возрастать.

Объяснение было найдено Эйнштейном на основании представления света как потока фотонов. Свет поглощается такими же порциями, квантами $\hbar v$ и $\hbar w$, как и испускание по предположению Планка.

По Эйнштейну часть энергии $\hbar w$, доставляемой фотоном электрону, затрачена на преодоление работы выхода, а часть идёт на образование кинетической энергии вылетевшего электрона. В этом случае выполняется соотношение, называемое формулой Эйнштейна.

$$\boxed{\hbar\omega = A + \frac{1}{2}mv_m^2} \quad (2)$$

Т.е., если $\hbar\omega < A$, то электроны не могут покинуть металл. Следовательно, для возникновения фотоэффекта необходимо выполнение условия:

$$\hbar\omega \geq A \Rightarrow \omega_{yp} \geq \frac{A}{\hbar} \Rightarrow \lambda_{yp} = \underbrace{\frac{2\pi\hbar c}{A}}_{(3)}$$

$(w)_{gr}$ или $(\lambda)_{gr}$ - красная граница фотоэффекта, т.к. справедливо (1), то уравнение Эйнштейна можно записать:

$$\boxed{\hbar\omega = A + eU_3} \quad (4)$$

$$U_3 = \frac{\hbar}{e}\omega - \frac{A}{e} \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что U_3 является линейной функцией w . По зависимости $U_3 = f(w)$ можно определить работу выхода металла и по наклону - постоянную \hbar .

2.21 Эффект Комптона

Особенно отчётливо корпускулярные свойства проявляются на эффекте Комптона.

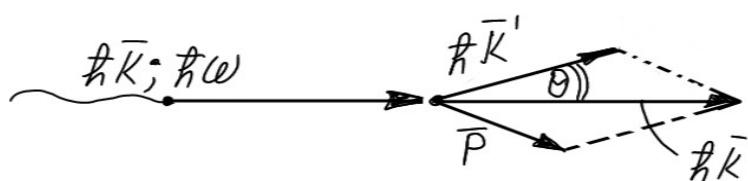
Эффект Комптона - это процесс рассеяния фотонов на свободных электронах с изменением частоты рассеянного света. Это изменение длины волны рассеянного света зависит от угла рассеяния.

В 1927 г. Комптон исследовал рассеяние монохроматического рентгеновского излучения на ряде "лёгких" веществ (парафин, графит и т.д.) и в спектре рассеянного излучения обнаружил длину волны большую, чем в падающем излучении. По классической теории длина волны рассеянного света д.б. равна длине волны падающего излучения - парадокс. Однако, эффект можно объяснить с точки зрения квантовых представлений о свете.

Пусть на первоначально покоящийся свободный электрон падает фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Энергия электрона до соударения (mC^2), импульс равен нулю. После соударения у электрона импульс p , а энергия:

$$C \sqrt{P^2 + m^2 C^2}.$$

Энергия фотона после рассеяния $\hbar\omega'$, импульс - $\hbar\vec{k}'$. Из законов сохранения энергии и импульса получаем:



$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (1)$$

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p} \quad (2)$$

Возведём (1) и (2) в квадрат и из обоих найдём импульс.

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar mc(k - k') \quad (3)$$

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\theta) \quad (4)$$

$$(3) = (4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mc(k - k') = \hbar kk'(1 - \cos\theta)$$

$$\left(\times \frac{2\pi}{mckk'} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$$

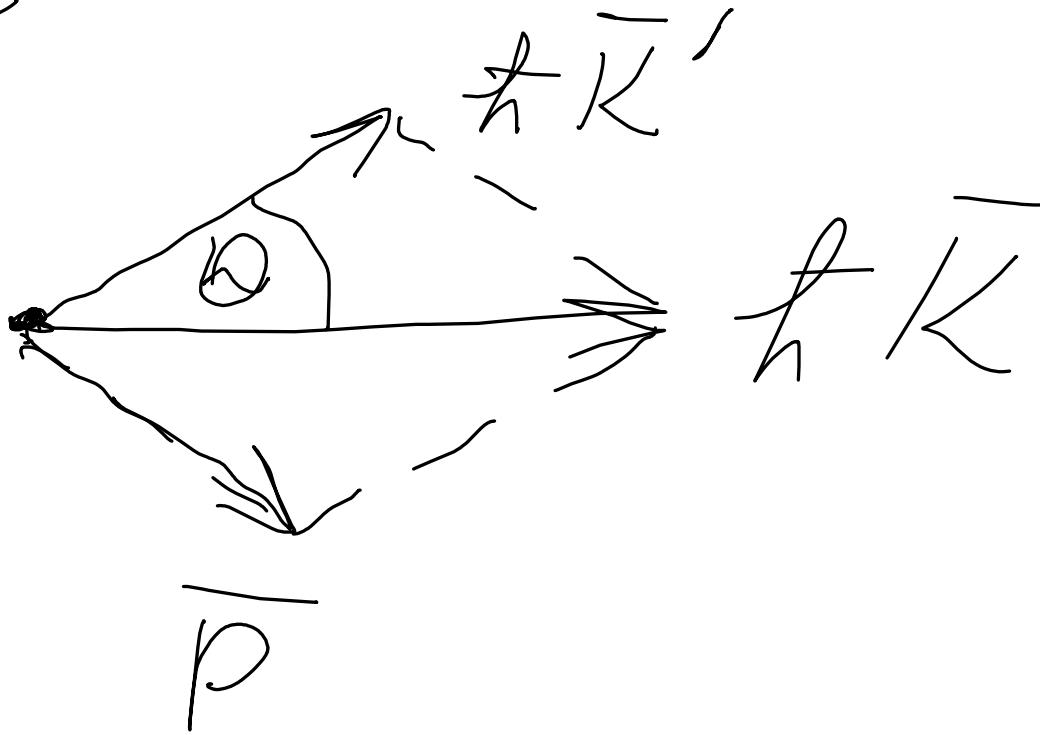
$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}(1 - \cos\theta)} \quad (5)$$

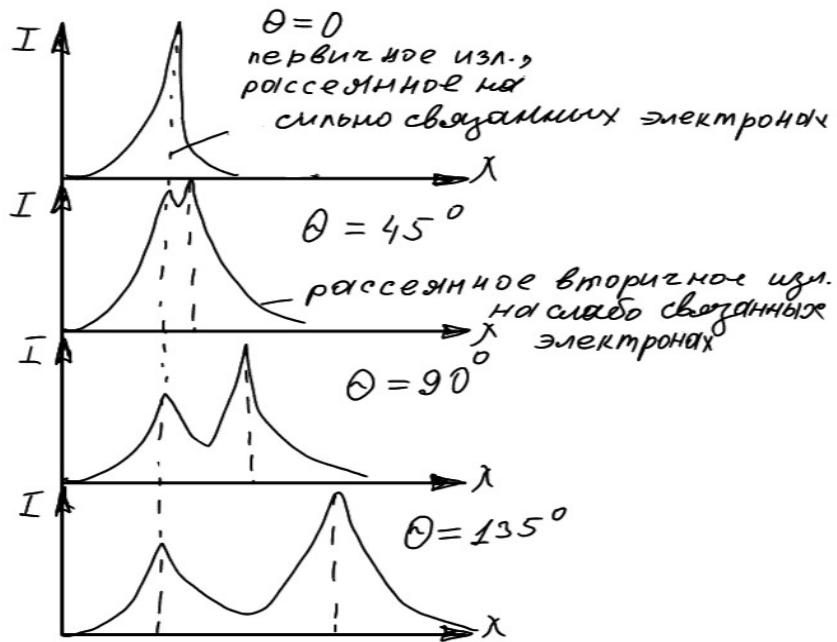
$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc} = 0,0243 \text{ \AA} \quad (6)$$

(6) - это Комптоновская длина волны для электрона. Т.о. можно рассчитать Комптоновскую длину волны для любой частицы.

Т.к. длина волны рассеянного излучения больше, чем падающего, то частота рассеянного излучения меньше, чем падающего. Это значит, что часть энергии первичного фотона передаётся электрону. На рис. представлена интенсивность рассеянного излучения как функция частоты для трёх разных углов рассеяния.

$$f\bar{K} = f\bar{K}' + \bar{P}$$





2.22 Волновые свойства частиц

В 1924 г. французский физик Луи де Броиль выдвинул гипотезу о том, что любая материальная частица также обладает волновыми свойствами, т.е. дуализм проявляется не только в оптических явлениях, но является более универсальным. В то время, когда была выдвинута эта гипотеза, не существовало ни одного факта в пользу существования волновых свойств частиц.

Каждой материальной частице де Броиль поставил в соответствие волновую функцию в виде монохроматической плоской волны. Такая волна характеризуется частотой "омега" (ω) и волновым вектором \mathbf{k} . Частоту де Броиль предложил находить из соотношения Эйнштейна

$$E = \hbar \omega \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}, \quad (1)$$

где E - полная энергия частицы, а волновой вектор \mathbf{k} связан с импульсом соотношением:

$$\bar{P} = \hbar \bar{K} \quad (2)$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad P = \frac{\hbar}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\hbar}{P}} \quad (3) \quad \begin{matrix} \text{длина волны} \\ \text{де Броиля} \end{matrix}$$

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{P} \quad (3')$$

Длина волны де Броиля - это длина волны частицы, движущейся в свободном пространстве.

Тогда волну де Броиля можно записать в виде:

$$\boxed{4(\bar{z}, t) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\bar{P} \bar{z} - E t)\right)} \quad (4)$$

$$4 = A \exp(-i(\omega t - \bar{K} \bar{z})) \quad (4')$$

В формулах (4) \mathbf{r} - радиус вектор, задающий положение материальной частицы.

Физический смысл волновой функции в идее де Бройля



$$[x_0; (x_0 + dx)]$$

В произвольный момент времени положение частицы определяется положением максимума суперпозиции волн (волнового пакета).

Скорость распространения такого максимума есть групповая скорость пакета.

$$v_{gp} = \frac{\partial/\omega}{\partial/k} \quad (5)$$

$$E = \hbar\omega; \quad E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}$$

$$\omega = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}$$

$$k = \frac{p}{\hbar} \rightarrow \partial/k = \frac{\partial/p}{\hbar} \Rightarrow (5)$$

$$\begin{aligned} v_{gp} &= \frac{\partial}{\partial/p} (\sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}) = \frac{2pc^2}{2\sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}} = \\ &= \frac{pc^2}{E} = \frac{mc^2}{mc^2} = v \end{aligned} \quad (6)$$

Групповая скорость волнового пакета равна скорости частицы !!!

Однако движение частицы как волны должно характеризоваться, кроме групповой, ещё и фазовой скоростью. Фазовая скорость волны де Бройля:

$$\begin{aligned} v_{gp} &= \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}}{p} = \sqrt{\frac{m_o^2 c^4}{p^2} + c^2} = \\ &= c \sqrt{1 + \frac{m_o^2 c^2}{p^2}} = c \left(1 + \frac{m_o^2 c^2}{\hbar^2 \omega^2} c^2\right)^{1/2} = \\ &= p = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{c} \\ &= c \left(1 + \frac{m_o^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

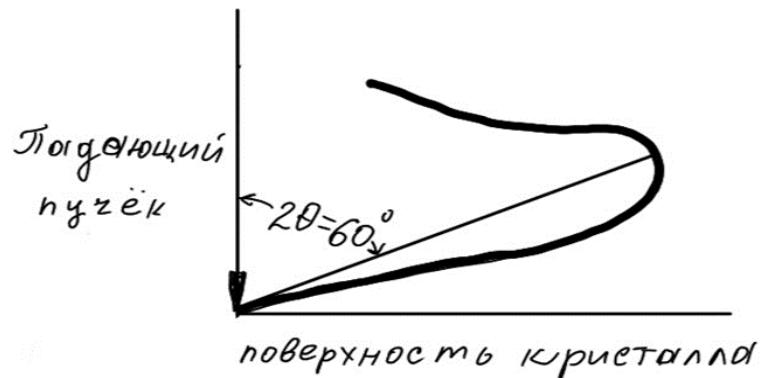
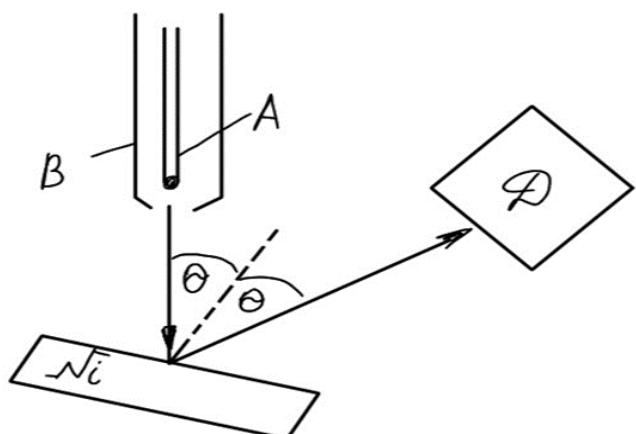
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\hbar}{p} \rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{m\omega} \quad (8)$$

$(\omega \ll c)$

$$1) m = 12; \quad \omega = 1 \text{ м/c} \rightarrow \lambda \sim 10^{-18} \text{ Å}$$

$$2) m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}; \quad W_k = 100 \text{ эВ} \rightarrow \lambda \sim 3 \text{ Å}$$

Схема эксперимента Дэвиса и Джермера



вечающая формуле

$$2d \sin \theta = n \lambda \implies 1,65 \text{ \AA}^{\circ}.$$

$$\lambda_p = 1,67$$

Совпадение длин волн настолько разительное, что опыты Дэвиса и Джермера явились блестящими подтверждениями наличия у "классических" частиц волновых свойств.

Т.о., экспериментально доказано, что все частицы обладают волновыми свойствами и между ними и фотонами нет принципиального различия, т.е. материальные частицы и фотоны обладают одновременно как свойствами частиц, так и волновыми свойствами.

Лекция_15

Вероятностный характер волн де Броиля

Принцип неопределённости Гейзенберга

Лекция_13

2.23 Принцип неопределённости

Итак, Луи де Бройль ввёл волновую функцию, пс-функцию, для материальной частицы (формула (4), параграф 2.22). Для этой волновой функции как у света существует способность к дифракции и к интерференции. Макс Борн предложил рассматривать амплитуду пс-функции как амплитуду вероятности нахождения частицы в данном месте пространства. Если dV - элементарный объём, в котором находится частица, а dw - вероятность нахождения частицы в данном объёме, то

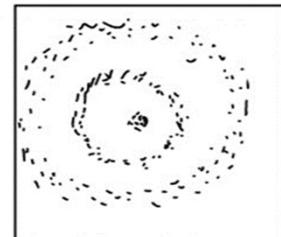
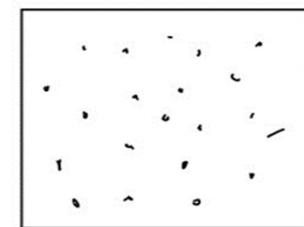
$$w = |A|^2 dV \quad (1)$$

$|A|^2$ - плотность вероятности нахождения частицы.

В оптике под $|A|^2$ понимают интенсивность, а не вероятность нахождения фотона в данной точке

пространства. Однако, если в световом потоке фотонов много, то соответствующая вероятность пропорциональна интенсивности.

Вероятностный характер волн де-Бройля отчётливо виден на опыте по дифракции электронов при очень малой интенсивности пучка. Этот классический опыт был поставлен Биберманом, Сушковым и Фабрикантом. Электроны проходили через рассеиватель в виде тонкой металлической пластинки по одному и каждый электрон регистрировался фотопластинкой. Вначале, когда их было мало, картинка распределения электронов на фотопластинке соответствовала беспорядочному разбросу электронов.

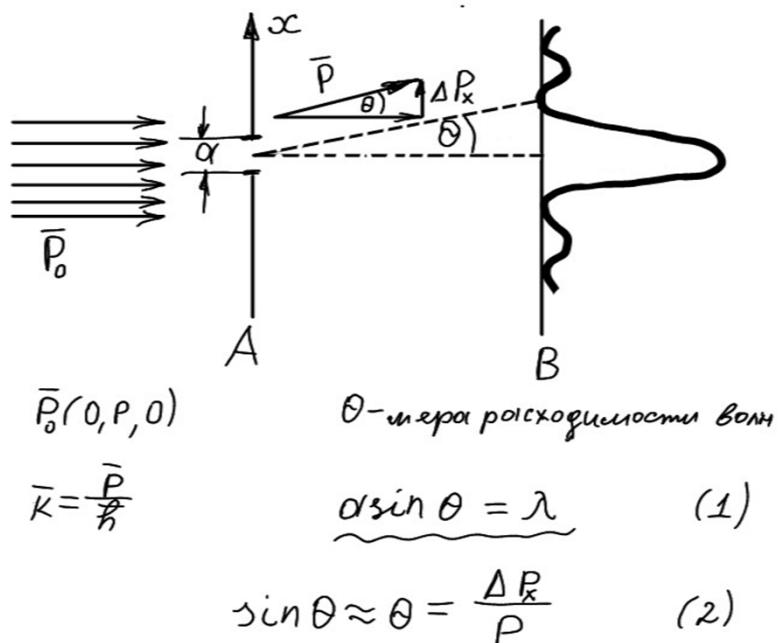


Когда число электронов, попавших на фотопластинку, возрастало (через очень большой промежуток времени - примерно через год), то отчётливо проявлялась дифракционная картина с максимумами и минимумами. В этом эксперименте несмотря на то, что каждый электрон шёл по отдельности, но он шёл по законам дифракции. Движение каждого электрона в отдельности определялось полной дифракционной картиной. При вероятностной интерпретации понятия материальных частиц (электронов) понятие траектории теряет строгий смысл. В этой интерпретации электрон следует представлять "размазанным" по пространству в соответствии с амплитудой псевдофункции. Когда же электрон взаимодействует с серебром, то он как бы собирается в точку как целое. Его распределение оказывается очень узким - лишь в области почернения фотопластинки.

Всякая попытка узнать что-либо о свойствах микрочастиц, всякий эксперимент с ними, обязательно меняет их состояние и их волновую функцию.

Представления классической механики оказываются неприменимы к микрообъектам. В частности, для движения микрочастиц понятие траектории часто теряет свой смысл. Под траекторией в классической физике понимают задание координат и импульса частицы в следующие один за другим моменты времени.

К чему приведёт попытка одновременного определения координаты и импульса у электрона?



На рисунке изображён параллельный пучёк электронов, падающих на непрозрачный экран А со щелью шириной "a". После прохождения экрана электроны фиксируются на фотопластинке В. Как нам уже известно, на пластинке будет зафиксирована дифракционная картина. Пусть до прохождения щели электроны обладали импульсом $\mathbf{P}(0, P, 0)$. Такие электроны описываются волной де-Бройля с волновым вектором

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\vec{P}}{\hbar} .$$

Плоская волна до экрана занимает всё пространство и поэтому каждый падающий на щель электрон оказывается размазанным по всему пространству, а его координата "X" - полностью неопределена.

Электроны, прошедшие сквозь щель, уже не описываются плоской волной, а представляют пучёк расходящихся плоских волн, поскольку часть электронов из-за взаимодействия с краями щели, изменяют значения своих импульсов. Наиболее заметным образом изменяются проекции импульсов на ось "X" параллельную экрану А.

Рассмотрим какой-либо электрон, прошедший через щель шириной a. Указать заранее, в какое место экрана попадёт электрон невозможно. Можно указать лишь вероятность его попадания в ту или иную точку по дифракционной картине. Из рисунка дифракционной картины видно, что подавляющая часть электронов попадёт в область главного максимума. За меру расходимости волн за экраном примем угловое расстояние между первоначальным направлением импульса и направлением на первый минимум. Это расхождение можно записано известным из оптики соотношением (1). При малых углах справедливо также соотношение (2),

где

$$\Delta P = P_{sc} .$$

Т.к. неопределённость в координате x задаётся шириной щели:

$$\Delta x = a ,$$

то:

$$\Delta x \cdot \frac{\Delta P}{P} = \frac{a}{P} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar} \quad (3)$$

Это соотношение, полученное для щели, оказывается универсальным и носит название соотношения неопределённостей Гейзенберга.

Это соотношение записывают и так:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (3')$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3'')$$

Здесь важен порядок величины.

Т.о., полная определённость координаты частицы приводит к неопределённости у стого определённого ранее импульса.

Совершенно аналогичные соотношения можно записать и для других координат:

$$\Delta y \cdot \Delta P_y = \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta P_z = \hbar$$

Можно указать также много других пар физических величин, связанных соотношением вида (2). Такие величины называются канонически сопряжёнными. Ими являются энергия и время, связанные соотношением

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar} \quad (3).$$

$\Delta t = \tilde{\tau}$ — время жизни $\tilde{\tau}$ в каком-либо состоянии

Т.о. время жизни электрона связано с некоторой неопределенностью в энергии. Из (3) следует, что энергия данного состояния имеет строго определённое значение лишь для стационарного состояния, когда "тай" = бесконечности. $(\tilde{\tau} = \infty)$.

Общая формулировка соотношения неопределённости Гейзенберга (1927 г.):

Произведение неопределённостей значений двух канонически сопряжённых переменных не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка.

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar$$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta A \Delta B \geq \hbar$$

$$(\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ дж\cdotс}; \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ дж\cdotс})$$

2.24 Оценки характеристик микрочастиц с помощью соотношения неопределённости

Соотношение неопределённости позволяет получить правильный порядок физических величин.

1) Оценим размеры атома водорода.

Обозначим среднее расстояние электрона от ядра в атоме водорода - "a", разброс в импульсах - "P". Они связаны соотношением неопределённостей

$$P = \frac{\hbar}{\alpha} .$$

Расстояние "a" определяет условие минимума полной энергии электрона в атоме:

$$E = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{\alpha} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{\alpha} \quad (1)$$

Первое слагаемое – кинетическая энергия, второе – потенциальная (в СГС). Отрицательный знак у потенциальной энергии из-за разных знаков заряда электрона и

ядра. Определим минимум энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = -\frac{\hbar^2}{m \alpha^3} + \frac{e^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{(1,0546 \cdot 10^{-27})^2 (\text{эргс})}{9,1 \cdot 10^{-28} (\text{з}) \cdot (4,8 \cdot 10^{-10}) (\text{эВс})} = \\ = 5,28 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 5,28 \cdot 10^{-11} \text{ м} \approx 1 \text{ \AA}$$

(2)

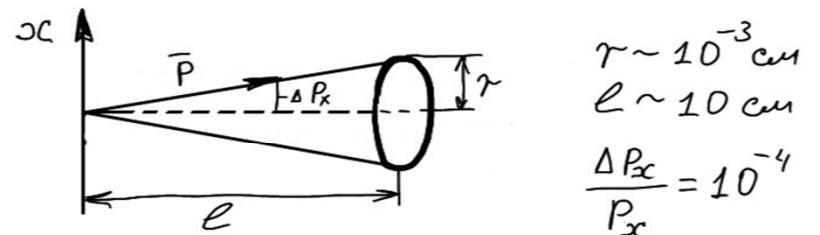
Расстояние "а." - Боровский радиус и по порядку величины отражает размеры.

(2) \Rightarrow (1)

$$E = \frac{\hbar^2 m^2 e^4}{2 m \hbar^4} - \frac{e^4 m}{\hbar^2} = \frac{m e^4}{2 \hbar^2} - \frac{m e^4}{\hbar^2} = \\ = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} = -13,6 (\text{эВ}) \quad (6)$$

Знак "-" в (6) означает, что энергия электрона в связанном состоянии в атоме меньше, чем в свободном.

2) Покаже на примере движения электронов в электроннолучевой трубке с какой степенью точности можно говорить о траектоирии микрочастиц в определённых условиях. оценим неопределённости координаты и импульса электрона.



$$r \sim 10^{-3} \text{ см}$$

$$l \sim 10 \text{ см}$$

$$\frac{\Delta P_x}{P_x} = 10^{-4}$$

$$\text{При } U=10^4 \text{ В} \Rightarrow eU=10^4 \text{ эВ}$$

$$eU = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2meU}$$

$$10^4 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ эргс}$$

$$p = \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-8}} \approx 5 \cdot 10^{-18}$$

$$\Delta P_x \approx 5 \cdot 10^{-22} \Rightarrow \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta P_x} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta P_x} \approx \frac{1,05 \cdot 10^{-27}}{5 \cdot 10^{-22}} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$$

$$\Delta p = m \Delta \vartheta = 5 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot \text{см}}{\text{с}}$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} \approx 10^{-24} \text{ см}$$

Этот результат говорит о том, что движение электрона в электронно-лучевой трубке практически неотделимо от движения по траектории.

3) Соотношение неопределённостей отражает те существенные особенности реальных взаимодействий частиц, которые не учитывает модель частицы в виде материальной точки. Оно указывает на необходимость пересмотра характеристик состояния объектов, которыми пользовались в макрофизике, где считалось, что любые физические величины независимо друг от друга м.б. выражены числами с любой степенью точности.

Покажем, что для макротел ограничение применимости модели материальной точки не существенно.

а) летящая пуля

$$m = 62, \quad v = 800 \text{ м/с}; \quad \frac{\Delta v}{v} = \lambda = 10^{-6} \%$$

точность определения скорости.

Неопределенность координаты несопоставимо мала и лежит ниже того предела, до которого эта величина имеет физический смысл.

б) движение маленькой капли

$$\left. \begin{aligned} m &= 5 \cdot 10^{-7} \text{ г} \\ \phi &= 0,1 \text{ мм} \\ \vartheta &= 0,1 \text{ мм/с} = 10^{-2} \text{ м/с} \end{aligned} \right\} p = m v = 5 \cdot 10^{-9} \frac{2 \cdot \text{мм}}{\text{с}}$$

$$\lambda = \frac{\Delta v}{v} = 10^{-6} \% = 10^{-8}$$

$$\Delta p = \lambda p = 5 \cdot 10^{-17} \frac{2 \cdot \text{мм}}{\text{с}}$$

$$\Delta x \approx 10^{-10} \text{ см}$$

Неопределенность координаты этой маленькой частицы лежит также ниже предела, в котором её координата ещё имеет физический смысл.

"Размытости" по координате и импульсу "сжаты" для макроскопических тел в узкие относительные интервалы и использование определённых значений для X и P не приводит к сколь-нибудь ощутимой ошибке.

в) движение электрона с энергией 1эВ

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$v \sim 6 \cdot 10^7 \text{ см/с}$$

$$\Delta = 10\% = 0,1 \Rightarrow \Delta v \sim 6 \cdot 10^6 \text{ см/с}$$

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{m \Delta v} \approx 10^{-6} \text{ см} = 100 \text{ Å}$$

Для такой частицы это уже недопустимо много. Поэтому в атоме её уже нельзя рассматривать как материальную точку подобно тому, как это было в теории Бора.

Соотношение неопределённостей относится к объективным свойствам фононов и электронов, проявляющимся независимо от наличия или отсутствия наблюдателя.