MA02_線形代数1

1. テンソルって何？

テンソルは、スカラーを複数の次元に並べたもの。
テンソルは下記を含む。そして、○○○階のテンソルと表現する。
・スカラー
・ベクトル
・行列

■スカラー

・ 単なる数値(大きさそのものを表す)
・ +, -, ×, ÷の計算が可能
・ベクトル、行列、3階以上のテンソルの係数になれる
※スカラーは、テンソルに属している１要素。零階のテンソルと呼ぶ。

■ベクトル

・大きさと方向を持つ
・スカラーを縦方向だけ、または横方向だけに並べたもの。(要は一直線上に並べたもの)
・スカラーを縦方向に並べたものを縦ベクトル。横方向に並べたものを縦ベクトルという。
・矢印で表現される
※ベクトルは、テンソルに属している１要素。１階のテンソルと呼ぶ。

■行列

・スカラーを格子状に並べたもの
・もう少し言うと、ベクトルを並べたもの
※行列は、テンソルに属している１要素。２階のテンソルと呼ぶ。

行列の用途としては、*ベクトルの変換のために使用される(一次変換)*

■3階以上のテンソル

例えば3階のテンソルであれば、行列の行方向と列方向に対してZ方向に格子状の行列が増えていくイメージ。
（行列の厚みが増えるイメージ）

2. ベクトルの変換ってどうやるの？

1の行列のにて、行列の用途はベクトルの変換のために使用されると書いた。
行列とベクトルの積を行うことで、ベクトルの変換ができる。
下記のことを抑えておこう。
・行列は変換するための情報がある。
・変換したいベクトルに行列を掛けてあげる

下記に行列を使ったベクトルの変換例を示す。

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + 4 \times 2 \\ 3 \times 1 + 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ベクトルの変換例を観察

変換後のベクトルの要素を見ると、、、
b_{11} とb_{21} がある。元のベクトルの要素「すべて」から 影響を受けている。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} \end{pmatrix}$$

3. 行列の積のやり方

2のベクトルの変換例と同様に考えることができる。
ポイントは2つ
・右行列はベクトルの並んでいるとして理解すること
・元のベクトル(右行列)の要素「すべて」から 影響を受けるように計算する

具体的な計算式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} & a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} \\ a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} & a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} \end{pmatrix}$$

行列の積によって算出された要素には、 全て$b_{11}, b_{21}, b_{12}, b_{22}$が含まれている。 元の行列の要素「すべて」から 影響を受けている。

MA03_線形代数2-1

固有値と固有ベクトル

正方行列Aに対して，以下のような式が成り立つような、右辺の係数λと特殊なベクトルxをそれぞれ固有値と固有ベクトルという。

$$Ax = \lambda x(\lambda\text{は}0\text{でない定数})$$

Aという行列があった時、ある特殊なベクトルxだけはλxで表現できる。
行列Aとその特殊なベクトルxの積は，ただのスカラーの数λとその特殊なベクトルxとの積と同じ値になる。

MA04_線形代数2-2

固有値と固有ベクトルの求め方

正方行列Aの固有値と固有ベクトルを求めるためのポイントは２つ
・特性方程式(行列式)から固有値を求める
　⇒(A-λI)x = 0・・・・・①
・それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求める
　(もう少し具体的に述べると、 λを①式に戻す。戻したら連立方程式で固有ベクトルの関係を出す。)

MA05_線形代数3-1

固有値分解

固有値、固有ベクトルを用いて行列Aを分解することができる。(X, Λ, X^{-1}の３つに分解する)
このことを固有値分解という。
式で書くと下記であらわすことができる。
・A = XΛX^{-1}
　Xは、固有ベクトルの行列
　Λは、固有値の対角行列
　X^{-1}は X の逆行列

※固有ベクトルの行列に関する注意⇨固有値の並び順に対応させるように固有ベクトルを配置すること

固有値分解の利点

分解すると行列の特徴が見えてくる。
行列の特徴とは、固有値のことを示す。

特徴を見ることでできることの例
・固有値が近い値を持っていたら似た特徴を持っていると考えることが可能
　⇨実用例：cos類似度などの距離尺度を用いたデータの類似度計算、機械学習の例を上げるとしたらk近傍法とか
・固有値のどこかが小さかったら次元削減対象として考えることが可能
　⇨実用例：画像処理、リアルタイム次元圧縮を考慮するならPCAやt-sneよりも固有値分解の方が良い。

固有値分解によって、ぐちゃぐちゃな行列データを整理してみることができる。(固有値による特徴観察によって)
よだんで行列は様々な特徴を保持できるため、なんでも行列にしたいと思ってきた。

MA07_線形代数4

特異値分解その1

固有値分解は正方行列に対しては対応できるが、非正方行列に対しては対応できない。
非正方行列でない場合は、特異値分解と呼ばれる方法で固有値分解と同じようなことができる。

MA08_線形代数5-1

特異値分解その2

非正方行列Aは、特異値分解により固有値分解と同じようなことができる。いわば、固有値分解の拡張版が特異値分解である。
固有値分解の拡張版と言われるだけあって、AA^{T}やA^{T}Aを施すことにより無理やり正方行列を作り出してから固有値分解をしている。
特異値分解のポイントは３つ
・行列から無理やり正方行列を作る(AA^{T}やA^{T}A)
・無理やり作った正方行列を固有値分解をする
・特異値は二乗の値が出るので最後に√を施す

上記のポイントを抑えると下記のように分解ができる。
■ A = USV^{T} = USV^{-1}
・U は、各列が AA^{T}の固有ベクトルである行列(左特異行列)

・S は、対角成分が AA^T の固有値の平方根である対角行列（特異値）
・V は、各列がA^{T}Aの固有ベクトルである行列(右特異行列)

MA09_線形代数5-2

固有値分解と同様に特異値分解を用いることで、非正方行列の特性を抽出できる
特異値分解の実用例としてカメラのピントズレの判定に使われているらしい