

## Lecture 11: Sublinear Algorithm of 1-median Problem

2025.4.5

Lecturer: 丁虎

Scribe: 王向祿

**Sublinear Algorithm (次线性算法)** 是一类算法，其时间复杂度或空间复杂度小于线性时间  $O(n)$  或线性空间  $O(n)$  (其中  $n$  是输入大小)。这些算法在处理大规模数据时尤为重要，因为它们可以避免遍历整个输入，节省计算资源和存储空间。

**次线性算法的特点**

- 时间复杂度小于  $O(n)$ : 如  $O(\log n)$ 、 $n^\epsilon$  (其中  $0 < \epsilon < 1$ )、 $O(1)$  等。
- 不需要完整读取输入: 往往通过随机采样、哈希或其他近似方法，从部分数据中推断整体情况。
- 适用于大规模数据: 如流数据处理、机器学习、图分析等领域。

**1 1-median problem**

“1-median problem” [1] (也叫 1-中位数问题或 1 median problem) 是**设施选址问题**中的一个经典优化问题。它在运筹学、图论和数据科学中都有广泛应用。

**Definition 1.1** (1-median problem). 给定一个加权无向图  $G = (V, E)$ , 其中边的权重  $w(e)$  满足三角不等式 (即  $G$  是一个度量图), 顶点数  $|V| = n$ , 边数  $|E| = \binom{n}{2}$  (即  $G$  是一个完全图)。目标是寻找一个顶点  $v^* \in V$  使得下式最小化:

$$S(v) = \sum_{p \in V} w(p, v)$$

即选取一个顶点，使其到所有其他点的加权距离总和最小。

**Goal:** 找到一个顶点  $v_0 \in V$ , 使得:

$$S(v_0) \leq (1 + \delta) \min_{v \in V} S(v), \quad \delta > 0$$

**想象一个 Oracle:** 记作  $\Gamma_\delta(p, q)$

$$\begin{cases} S(p) > (1 + \delta)S(q) & \text{返回 } q \\ S(q) > (1 + \delta)S(p) & \text{返回 } p \\ S(p) \leq (1 + \delta)S(q) \text{ 且 } S(q) \leq (1 + \delta)S(p) & \text{返回 } p \text{ 或 } q \end{cases}$$

那么做  $n - 1$  次比较就能得到一个近似最小的顶点（证明略）。接下来就是怎么构造上面这样的一个 Oracle，且该 Oracle 的时间复杂度是常数级别  $\Theta(1)$ 。

**构造方法：**分别以  $p, q$  为顶点， $r$  为半径画球，定义  $H = \text{Ball}(p, r) \cup \text{Ball}(q, r)$ ， $t = w(q, p)$ ， $r = \frac{1}{\delta}t$ 。那么分类讨论

(1) 对于  $\forall v \notin H$ ，都有

- $|w(v, p) - w(v, q)| \leq t$
- $w(v, p), w(v, q) \geq \frac{1}{\delta}t$
- $\frac{w(v, q)}{w(v, p)}, \frac{w(v, p)}{w(v, q)} \leq \frac{w(v, p) + t}{w(v, q)} = 1 + \frac{t}{w(v, q)} \leq 1 + \delta$

所以所有球外的顶点都不考虑。

(2) 对于  $\forall v \in H$ ，都有

- $0 \leq w(v, p) \leq t + r = (1 + \frac{1}{\delta})t$
- $0 \leq w(v, q) \leq t + r = (1 + \frac{1}{\delta})t$

根据 Hoeffding Bounds。随机采样  $m$  个顶点（球内），对应的到顶点  $p$  的距离为  $x_1, x_2, \dots, x_m$ 。如果我们希望

$$\text{Prob}[\left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i - \frac{1}{|H|} \sum_{v \in H} w(p, v) \right| \geq \epsilon(1 + \frac{1}{\delta})t] \leq e^{O(m\epsilon^2)} = O(\frac{1}{n})$$

那么  $m = O(\frac{1}{\epsilon^2} \log n)$ 。因此只需要采样  $m$  个顶点就能近似  $\frac{1}{|H|} \sum_{v \in H} w(p, v)$ ，使得

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \in \bar{x} \pm \epsilon(1 + \frac{1}{\delta})t$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \in \bar{y} \pm \epsilon(1 + \frac{1}{\delta})t$$

其中  $\bar{x} = \frac{1}{|H|} \sum_{v \in H} w(p, v)$ ， $\bar{y} = \frac{1}{|H|} \sum_{v \in H} w(q, v)$ 。

区分  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ : 假设  $\bar{x} > \bar{y}$ , 那么有

$$\begin{aligned}\bar{x} - \epsilon(1 + \frac{1}{\delta})t &> \bar{y} + \epsilon(1 + \frac{1}{\delta})t \\ \Rightarrow \epsilon &< \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2(1 + \frac{1}{\delta})t}\end{aligned}$$

根据三角不等式有  $\bar{x} + \bar{y} \geq t$ , 对  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  的取值范围进行分类讨论:

- (1)  $\bar{x}, \bar{y} \geq \frac{1}{3}t$
- (2)  $\bar{y} \leq \frac{1}{3}t, \bar{x} \geq \frac{2}{3}t$

得:

$$m = \Theta(\frac{1}{\delta^4} \log n)$$

所以, 在  $\Theta(\frac{1}{\delta^4} n \log n)$  找到一个顶点  $v_0 \in V$ , 使得:

$$S(v_0) \leq (1 + \delta) \min_{v \in V} S(v), \quad \delta > 0.$$

## References

- [1] P. Indyk. Sublinear time algorithms for metric space problems. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 428–434, 1999.