大数据算法-2025 春

Lecture 17: Compressed Sensing

2025.5.29

Lecturer: 丁虎 *Scribe:* 莫官霖

1 背景与动机

传统信号处理依赖奈奎斯特–香农采样定理，要求采样频率至少为信号带宽的两倍才能无失真重构信号。然而，许多实际信号（如图像、语音、医学成像）在某个变换域中具有稀疏性，仅有少量非零系数。压缩感知（Compressed Sensing, CS） Candes and Tao [2006], Candes et al. [2006] 正是利用这一性质，在采样端直接获取远少于奈奎斯特率的线性测量，实现有效重构。

2 问题定义

设实际信号为 $x \in \mathbb{R}^d$，我们对该信号的测量为 $y \in \mathbb{R}^N$，我们通过一个测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{N\times d}$ 来获得 y:

$$y = \Phi x$$

令 Φ 为 Encoder，Δ 为 Decoder，问题的优化目标为：设计合适的 Φ 和 $\Delta, s.t.$,

$$\max_{x\in\mathbb{R}^d} ||\Delta(\Phi x) - x||_2^2$$

最小。

3 稀疏性（Sparsity）

若信号向量 x 中仅有 k 个非零分量（$k \ll d$），则称 x 为 k-稀疏。稀疏度可用 ℓ_0 范数度量：

$$\|x\|_0 = \#\{i : x_i \neq 0\} \leq k.$$

4 限制等距性质（RIP）

测量矩阵 Φ 满足 k-稀疏向量的限制等距性质（Restricted Isometry Property），即存在常数 $\epsilon \in (0,1)$ 使得：

$$(1-\epsilon)\|x\|_2^2 \le \|\Phi x\|_2^2 \le (1+\epsilon)\|x\|_2^2$$

对所有 $\|x\|_0 \le k$ 都成立。

5 理论保证

结论：如果 Φ 满足 RIP，则 $\Delta(y)$ 可以通过解

$$\begin{cases} \min ||x||_1 \\ \Phi x = y \end{cases}$$

得到，最终信号重构过程的误差保证为 $||x - \Delta\Phi x||_2 \le \frac{C \cdot ||x||_1}{\sqrt{k}}$.

6 小结

压缩感知利用信号的稀疏性，通过满足 RIP 或不相干性的测量矩阵，只用远低于奈奎斯特率的测量即可精确重构信号，具有重要的理论价值与广泛的应用前景。

References

Emmanuel J. Candes and Terence Tao. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(12):5406–5425, 2006. doi: 10.1109/TIT.2006.885507.

Emmanuel J Candes, Justin K Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 59(8):1207–1223, 2006.