

偏微分方程在图像处理中的应用

姜健, SCGY, USTC

Nov.18th, 2011

Introduction

PDEs Applied in Image Denoising

热传导模型: 各向同性的图像去噪方程

各向异性的偏微分方程方法

图像演化的 PDE 方法

最小化能量泛函

PDEs Applied in Image Restoration

数字图像修复技术综述

BSCB 模型

TV 模型

CDD 模型

Reference

Introduction to PDEs Applied in Image Processing

- ▶ 偏微分方程是近年来兴起的一种图像处理方法, 主要针对底层图像处理, 在图像去噪与修复等方向的应用中取得了不错的效果

Introduction to PDEs Applied in Image Processing

- ▶ 偏微分方程是近年来兴起的一种图像处理方法, 主要针对底层图像处理, 在图像去噪与修复等方向的应用中取得了不错的效果
- ▶ 偏微分方程具有各向异性的特点, 应用在图像去噪中, 可以在去噪的同时很好地保持边缘

Introduction to PDEs Applied in Image Processing

- ▶ 偏微分方程是近年来兴起的一种图像处理方法, 主要针对底层图像处理, 在图像去噪与修复等方向的应用中取得了不错的效果
- ▶ 偏微分方程具有各向异性的特点, 应用在图像去噪中, 可以在去噪的同时很好地保持边缘
- ▶ 在图像修复中, 利用偏微分方程对图像进行建模, 使待修复区域周围的有效信息沿等照度线自动向内扩散, 在保持图像边缘的基础上平滑噪音

PDEs Applied in Image Denoising

在图像去噪中应用的偏微分方程可分为以下两种:

- ▶ 各向同性

PDEs Applied in Image Denoising

在图像去噪中应用的偏微分方程可分为以下两种:

- ▶ 各向同性
- ▶ 各向异性

PDEs Applied in Image Denoising

在图像去噪中应用的偏微分方程可分为以下两种:

- ▶ 各向同性
- ▶ 各向异性
 - ▶ 图像演化的 PDE 方法

PDEs Applied in Image Denoising

在图像去噪中应用的偏微分方程可分为以下两种:

- ▶ 各向同性
- ▶ 各向异性
 - ▶ 图像演化的 PDE 方法
 - ▶ 最小化能量泛函

PDEs Applied in Image Denoising

在图像去噪中应用的偏微分方程可分为以下两种:

- ▶ 各向同性
- ▶ 各向异性
 - ▶ 图像演化的 PDE 方法
 - ▶ 最小化能量泛函

由于各向同性的方程在去噪的同时不能很好地保持边缘, 我们只简单介绍; 各向异性方程在不同方向的扩散强度不同, 因此可以较好地保持边缘.

热传导模型

热传导模型把整个图像看做一块温度不一的导体平板, 随着时间的推移导体各处温度趋于一致.

图像中的噪点可以看做是高温能量点, 随方程演化, 频率逐渐降低, 直到被平滑掉. 在图像上即可达到去噪的目的.

热传导模型

热传导模型把整个图像看做一块温度不一的导体平板, 随着时间的推移导体各处温度趋于一致.

图像中的噪点可以看做是高温能量点, 随方程演化, 频率逐渐降低, 直到被平滑掉. 在图像上即可达到去噪的目的.

热传导模型可由如下方程描述

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

热传导模型

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

在此模型中, 我们可以控制迭代时间 t , 得到不同的平滑效果. 由方程可以看出, 此方程在不同方向的扩散强度是相同的, 故在去噪的同时也模糊了边界.

热传导模型

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

在此模型中, 我们可以控制迭代时间 t , 得到不同的平滑效果. 由方程可以看出, 此方程在不同方向的扩散强度是相同的, 故在去噪的同时也模糊了边界.

如果减小迭代时间 t , 会导致噪声去除不完全; 如果加长 t , 会导致边缘被模糊掉. 而图像的信息大多数由边界表达出来. 故此模型在图像去噪方面是不可取的.

各向异性的 PDEs

各向异性的偏微分方程方法分为以下两种:

各向异性的 PDEs

各向异性的偏微分方程方法分为以下两种:

- ▶ 图像演化 PDE 方法

各向异性的 PDEs

各向异性的偏微分方程方法分为以下两种:

- ▶ 图像演化 PDE 方法
- ▶ 最小化能量泛函

各向异性的 PDEs

各向异性的偏微分方程方法分为以下两种:

- ▶ 图像演化 PDE 方法
- ▶ 最小化能量泛函

下面分别介绍这两种方法在图像去噪中的应用.

图像演化的 PDE 方法

图像演化的 PDE 方法可以看做是面向过程的图像处理方法. 通过分析图像处理中需要做什么样的变化来决定图像随时间的变化过程, 从而最终达到某种可能需要的结果.

图像演化的 PDE 方法

图像演化的 PDE 方法可以看做是面向过程的图像处理方法. 通过分析图像处理中需要做什么样的变化来决定图像随时间的变化过程, 从而最终达到某种可能需要的结果.

演化模型中, 最著名的是由 Perona 与 Malik 提出的如下模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(c(|\nabla U|^2)\nabla U) & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial N}(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega \\ U(0, x) = U_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

P-M 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(c(|\nabla U|^2)\nabla U) & \text{in } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial N}(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial\Omega \\ U(0, x) = U_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

P-M 方程中, U 是演化过程中的图像, U_0 是演化初期的图像 (即含有噪声的图像), N 是图像边界 $\partial\Omega$ 的法向.

P-M 方程

P-M 方程在扩散方程中加入了泛函 c , 此泛函是图像梯度的函数, 可以寻找到一个函数, 使其尽量满足如下条件:

P-M 方程

P-M 方程在扩散方程中加入了泛函 c , 此泛函是图像梯度的函数, 可以寻找到一个函数, 使其尽量满足如下条件:

- ▶ 在区域内部, 即图像梯度变化较小的部分, 不存在边界, 即使上述方程成为热传导方程形式, 即要求 $c(0) = 1$

P-M 方程

P-M 方程在扩散方程中加入了泛函 c , 此泛函是图像梯度的函数, 可以寻找到一个函数, 使其尽量满足如下条件:

- ▶ 在区域内部, 即图像梯度变化较小的部分, 不存在边界, 即使上述方程成为热传导方程形式, 即要求 $c(0) = 1$
- ▶ 在区域边界, 图像梯度变化非常大, 我们不希望在去噪过程中把边界模糊化, 使扩散几乎停止, 即要求:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} c(s) = 0$$

P-M 方程的病态性质

根据文献,P-M 方程的初值问题有可能是病态的, 下面做简要讨论.

P-M 方程的病态性质

如果定义能量泛函:

$$E(I) = \int_{\Omega} \rho(|\nabla I|) d\Omega$$

式中 $\rho(\cdot)$ 为一非负函数且 $\rho(0) = 0$, 那么, 利用变分原理, 最小化这一能量泛函所对应的梯度下降流为:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\rho'(|\nabla I|) \frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right]$$

P-M 方程的病态性质

现将 $\rho'(|\nabla I|)/|\nabla I|$ 改写为 $g(|\nabla I|)$, 则上式与之前给出的 P-M 方程一致.

P-M 方程的病态性质

现将 $\rho'(|\nabla I|)/|\nabla I|$ 改写为 $g(|\nabla I|)$, 则上式与之前给出的 P-M 方程一致.

若假定图像 $I(x, y)$ 是一个分片常数图像, 在每一分片内部对能量泛函的贡献为 0 (分片内部为常数). 但在分片边界上, 灰度值发生阶跃, 如果 $\rho'(\infty) = 0$, 那么这类边界积分的贡献也为零. 于是任何一个分片常数图像都可使 $E(I)$ 达到全局最小值. 在这种情况下, P-M 方程给出的初值问题是不稳定的, 是病态的.

P-M 方程的病态性质

P-M 方程具有适定性的必要条件.

P-M 方程的病态性质

P-M 方程具有适定性的必要条件.

后面我们会讨论到, 通过正则化方法, 可以完全消除 P-M 方程的病态性质.

Example



Figure: P-M 方程迭代 1400 次的情形, SNR=5.6



Figure: PM 方程迭代 76 次的情形, SNR=15.6

最小化能量泛函的去噪方法

在图像恢复 ((包括去噪, 解模糊, 修复等)) 领域中, 最著名的能量函数法为全变分 (TV) 模型.

最小化能量泛函的去噪方法

在图像恢复 ((包括去噪, 解模糊, 修复等)) 领域中, 最著名的能量函数法为全变分 (TV) 模型.

图像的能量函数定义为:

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

最小化能量泛函的去噪方法

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

最小化能量泛函的去噪方法

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

∇U 表示图像 U 的梯度场, $|\cdot|$ 表示向量的长度.

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 右边第一项 (全变差项) 是对输出图像 U 的分段光滑性的约束项, 采用梯度的一阶范数, 已经证明其允许阶跃性边缘存在, 因此在取最小化能量时不会模糊边界

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 右边第一项 (全变差项) 是对输出图像 U 的分段光滑性的约束项, 采用梯度的一阶范数, 已经证明其允许阶跃性边缘存在, 因此在取最小化能量时不会模糊边界
- ▶ 右边第二项体现输出图像 U 对原图像 U_0 的数据依赖性, 二者相差不能太大, 要求去噪后的图像与输入图像仍然具有相似性.

λ 的取值

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

λ 的取值

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 第二项系数 λ 为权衡两项能量的权系数.

λ 的取值

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 第二项系数 λ 为权衡两项能量的权系数.
- ▶ λ 的取值依赖于噪声大小.

λ 的取值

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 第二项系数 λ 为权衡两项能量的权系数.
- ▶ λ 的取值依赖于噪声大小.
- ▶ 当噪声功率较大时, λ 应该取较小值.

λ 的取值

$$E_{TV}(U|U_0) = \iint_{\Omega} |\nabla U| dx dy + \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} (U - U_0)^2 dx dy$$

- ▶ 第二项系数 λ 为权衡两项能量的权系数.
- ▶ λ 的取值依赖于噪声大小.
- ▶ 当噪声功率较大时, λ 应该取较小值.

在全变差项 (TV 项) 与数据依赖项的共同约束下, 最小化上式能量函数可以得到分段光滑的去噪模型.

能量函数的最小化方法

能量函数为泛函, 泛函的最小化方法可以采用欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程.

Euler-Lagrange Equation

如果泛函 J 定义如下:

$$J = \int f(t, y, y') dt \quad \text{where} \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

则当 Euler-Lagrange 方程满足如下条件时, J 有最小值

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

能量泛函的最小化

以上能量泛函的 Euler-Lagrange 方程为

$$\lambda(U - U_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = 0$$

该模型相当于传导系数为 $\frac{1}{|\nabla U|}$ 的热扩散方程.

能量泛函的最小化

以上能量泛函的 Euler-Lagrange 方程为

$$\lambda(U - U_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = 0$$

该模型相当于传导系数为 $\frac{1}{|\nabla U|}$ 的热扩散方程.

Question: if $|\nabla U|=0$?

全变分模型的正则化

由于图像中存在 $\nabla U = 0$ 的点, 以上给出的 Euler-Lagrange 方程是带有病态条件的 PDE. 通过引入一个小正数 β , 我们可以对它进行正则化.

将全变分表达为:

$$TV(U) = \iint_{\Omega} |\nabla U|_{\beta} d\Omega = \iint_{\Omega} \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + \beta} d\Omega, \quad \beta > 0$$

则 Euler-Lagrange 方程变为:

$$\lambda(U - U_0) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|_{\beta}} \right) = 0$$

Euler-Lagrange 方程的解

求得 Euler-Lagrange 方程的解即为去噪结果.

Example



Figure: 能量函数法所得结果, SNR=15.5

数字图像修复的综述

数字图像修复的综述

- ▶ 数字图像修复就是针对图像中遗失或损坏的部分, 利用其周围的有效信息对其修复, 使修复后的图像接近或者达到原图的视觉效果.

数字图像修复的综述

- ▶ 数字图像修复就是针对图像中遗失或损坏的部分, 利用其周围的有效信息对其修复, 使修复后的图像接近或者达到原图的视觉效果.
- ▶ 由于没有足够的信息可以保证能唯一正确地恢复被损坏的部分, 因而图像修复通常是一个病态问题.

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

人类视觉系统所感觉到的就是以信息的”最佳猜测”。

从统计角度看, 最佳猜测表明图像修复应该是一个贝叶斯推断过程, 包括数据模型和图像先验模型两个部分.

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

人类视觉系统所感觉到的就是以信息的”最佳猜测”。

从统计角度看, 最佳猜测表明图像修复应该是一个贝叶斯推断过程, 包括数据模型和图像先验模型两个部分。

- ▶ 数据模型说明观测到的图像是怎样从真实的图像中获得的, 也就是真实图像和观测图像存在什么关系。

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

人类视觉系统所感觉到的就是以信息的”最佳猜测”。

从统计角度看, 最佳猜测表明图像修复应该是一个贝叶斯推断过程, 包括数据模型和图像先验模型两个部分.

- ▶ 数据模型说明观测到的图像是怎样从真实的图像中获得的, 也就是真实图像和观测图像存在什么关系.
- ▶ 先验模型用于说明真实的图像应该是什么样子的. 不同的先验模型将导致完全不同的解.

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

贝叶斯公式

$$P(u|u_0) = \frac{P(u_0|u)P(u)}{P(u_0)}$$

图像修复就是利用受到污染的图像 u_0 恢复原始图像 u , 即从观察到的图像出发, 求真实图像的一个最优估计——贝叶斯最大后验概率, 即求使 $P(u|u_0)$ 最大的 u .

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

贝叶斯公式

$$P(u|u_0) = \frac{P(u_0|u)P(u)}{P(u_0)}$$

一旦 u_0 给定, 分母 $P(u_0)$ 就是常数, 所以该问题就变为最大化数据模型 $P(u_0|u)$ 与图像先验模型 $P(u)$ 的乘积.

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

- ▶ “最佳猜测”通常由能量泛函的最优化过程来实现.

数字图像修复的基本理论——贝叶斯理论

- ▶ “最佳猜测”通常由能量泛函的最优化过程来实现.
- ▶ 能量泛函的极值通过变分法求得, 而能量泛函的直接变分通常归结为特定的 PDE 和相应的边界条件.

数字图像修复模型建立的原则

2002 年,Chant 等人提出数字图像修复应遵循如下三个原则

数字图像修复模型建立的原则

2002 年,Chant 等人提高出数字图像修复应遵循如下三个原则

- ▶ 图像修复模型是局部性的,待修复区域的信息完全由其周围的已知信息决定,与全局信息无关.
- ▶ 图像修复模型应该能够修复窄的被截断的光滑的边缘.
- ▶ 图像修复模型应该对噪声具有健壮性 (鲁棒性,robustness),即图像修复不能受到噪声的干扰.

基于 PDE 的图像修复模型

基于 PDE 的图像修复模型一般分为两种：

基于 PDE 的图像修复模型

基于 PDE 的图像修复模型一般分为两种：

- ▶ 微观仿真系统 (扩散过程): 模仿手工修复的过程, 利用曲率, 梯度等几何信息来控制图像的等照度线的扩散方向, 使它们按照一定的要求扩散至破损区域, 从而完成修复

基于 PDE 的图像修复模型

基于 PDE 的图像修复模型一般分为两种：

- ▶ 微观仿真系统 (扩散过程): 模仿手工修复的过程, 利用曲率, 梯度等几何信息来控制图像的等照度线的扩散方向, 使它们按照一定的要求扩散至破损区域, 从而完成修复
- ▶ BSCB 模型

基于 PDE 的图像修复模型

基于 PDE 的图像修复模型一般分为两种：

- ▶ 微观仿真系统 (扩散过程): 模仿手工修复的过程, 利用曲率, 梯度等几何信息来控制图像的等照度线的扩散方向, 使它们按照一定的要求扩散至破损区域, 从而完成修复
 - ▶ BSCB 模型
 - ▶ CDD 模型

基于 PDE 的图像修复模型

基于 PDE 的图像修复模型一般分为两种：

- ▶ 微观仿真系统 (扩散过程): 模仿手工修复的过程, 利用曲率, 梯度等几何信息来控制图像的等照度线的扩散方向, 使它们按照一定的要求扩散至破损区域, 从而完成修复
 - ▶ BSCB 模型
 - ▶ CDD 模型
- ▶ 变分模型: 归纳为一个求解能量泛函最小值的问题

BSCB 模型

BSCB 模型模拟手工修复的过程, 通过迭代, 一步步地从边缘信息向内扩散, 更新破损区域, 直到最终得到较稳定的修复结果.
修复算法主要包括迭代和扩散两部分.

BSCB 模型

BSCB 模型模拟手工修复的过程, 通过迭代, 一步步地从边缘信息向内扩散, 更新破损区域, 直到最终得到较稳定的修复结果.
修复算法主要包括迭代和扩散两部分.

- ▶ 迭代计算只在待修复区域 D 内进行

BSCB 模型

BSCB 模型模拟手工修复的过程, 通过迭代, 一步步地从边缘信息向内扩散, 更新破损区域, 直到最终得到较稳定的修复结果.

修复算法主要包括迭代和扩散两部分.

- ▶ 迭代计算只在待修复区域 D 内进行
- ▶ 每经过几次迭代计算, 就进行一次扩散, 两过程交替进行, 直到缺损区域被完全填充完毕.

BSCB 模型

已知初始图像 $u_0(i, j)$, 待修复区域为 D , 其边界为 ∂D . 迭代公式为

$$u^{n+1}(i, j) = u^n(i, j) + \Delta t u_t^n(i, j)$$

(i, j) 为像素点位置, $(i, j) \in D$

n 为迭代计数

Δt 为迭代速率

$u_t^n(i, j)$ 是对当前图像的更新.

其中 $u^0(i, j) = u_0(i, j)$

BSCB 模型

$$u^{n+1}(i, j) = u^n(i, j) + \Delta t u_t^n(i, j)$$

此迭代过程只对待修复区域内部像素有效, 不改变其他像素值.

BSCB 模型

$$u^{n+1}(i, j) = u^n(i, j) + \Delta t u_t^n(i, j)$$

设 $L^n(i, j)$ 为传递的信息, $\partial L^n(i, j)$ 表示信息的变化, $N^n(i, j)$ 为传递的方向, 则有

$$u_t^n(i, j) = \partial L^n(i, j) \cdot \partial N^n(i, j)$$

BSCB 模型

达到稳态时, 有

$$\partial L^n(i, j) \cdot \partial N^n(i, j) = 0$$

这说明信息 $L^n(i, j)$ 已经沿着方向 $N^n(i, j)$ 传递了.

BSCB 模型迭代的信息传递

为了平滑传递信息, $L^n(i, j)$ 可用简单的 Laplace 算子计算

$$L^n(i, j) = u_{xx}^n(i, j) + u_{yy}^n(i, j)$$

并选择等照度线的方向作为 N 的方向.

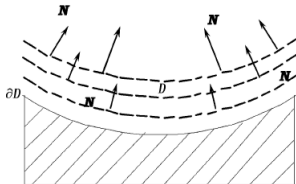


Figure: BSCB 模型图像修复

BSCB 模型小结

- ▶ BSCB 模型的修复算法对小尺寸区域有良好的效果

BSCB 模型小结

- ▶ BSCB 模型的修复算法对小尺寸区域有良好的效果
- ▶ 对于较大区域的修复, 扩散通常会造成模糊

全变分 (TV) 模型

由于 CDD 模型是对 TV 模型的修正和改进, 我们先从 TV 模型开始.

全变分 (TV) 模型

TV 模型为:

$$E(u) = \iint_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \iint_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy$$

在图像去噪的偏微分方程方法中已经有所介绍. 同样也是使用变分法求能量泛函的最小值的方法来修复图像.

全变分 (TV) 模型

前面已经讲到,TV 模型相当于传导系数为 $\frac{1}{\nabla U}$ 的热扩散方程,扩散强度仅依赖于梯度值而不依赖于等照度线等几何信息. 因此易造成如下效果:

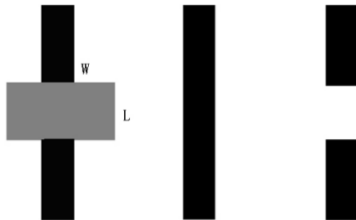
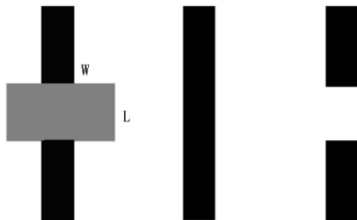


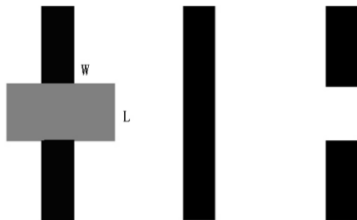
Figure: TV 模型

全变分 (TV) 模型



当 $l < w$ 时, 修复结果如中间的图所示; 当 $l > w$ 时, 如右图所示.

全变分 (TV) 模型



当 $l < w$ 时, 修复结果如中间的图所示; 当 $l > w$ 时, 如右图所示. 而人眼的判断结果是, 即使 $l > w$, 我们也会认为其是连通的. 即 TV 模型违背了人类视觉的“连接性准则”.

曲率推动扩散 (CDD) 模型

曲率推动扩散模型即将 TV 模型的扩散因数修正为:

$$\frac{g(k)}{\nabla u}$$

曲率推动扩散 (CDD) 模型

曲率推动扩散模型即将 TV 模型的扩散因数修正为:

$$\frac{g(k)}{\nabla u}$$

k 水平线的曲率

$g(k)$ 曲率的单调递增函数

曲率推动扩散 (CDD) 模型

其方程为:

$$k = \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]$$
$$g(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \infty & k = \infty \\ 0 \rightarrow \infty & 0 < k < \infty \end{cases}$$

曲率推动扩散 (CDD) 模型

引入曲率项后,CDD 模型的最小化的能量函数为:

$$E(u) = \iint_{\Omega} g(k)|\nabla u|dx dy + \lambda \iint_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy$$

曲率推动扩散 (CDD) 模型

引入曲率项后,CDD 模型的最小化的能量函数为:

$$E(u) = \iint_{\Omega} g(k) |\nabla u| dx dy + \lambda \iint_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy$$

- ▶ CDD 模型的扩散强度不仅依赖于梯度值, 还依赖于等照度线的几何信息, 即曲率.

曲率推动扩散 (CDD) 模型

引入曲率项后,CDD 模型的最小化的能量函数为:

$$E(u) = \iint_{\Omega} g(k)|\nabla u|dx dy + \lambda \iint_{\Omega} |u - u_0|^2 dx dy$$

- ▶ CDD 模型的扩散强度不仅依赖于梯度值, 还依赖于等照度线的几何信息, 即曲率.
- ▶ CDD 模型比 TV 模型的修复能力要强, 可以修复较大的破损区域和较细小的断裂边缘.

Example



Figure: 图像修复结果

小结:PDE Applied in Image Restoration

小结:PDE Applied in Image Restoration

- ▶ BSCB 修复模型通过模仿手工修复, 沿等照度线方向将信息迭代入受损区域, 算法在修复区域内进行非线性扩散获得稳定清晰的结果

小结:PDE Applied in Image Restoration

- ▶ BSCB 修复模型通过模仿手工修复, 沿等照度线方向将信息迭代入受损区域, 算法在修复区域内进行非线性扩散获得稳定清晰的结果
- ▶ TV 模型从最佳猜测角度建模, 将等照度线的发展方向作为信息扩展方向进行修复. 但其不能满足视觉连通性原则.

小结:PDE Applied in Image Restoration

- ▶ BSCB 修复模型通过模仿手工修复, 沿等照度线方向将信息迭代入受损区域, 算法在修复区域内进行非线性扩散获得稳定清晰的结果
- ▶ TV 模型从最佳猜测角度建模, 将等照度线的发展方向作为信息扩展方向进行修复. 但其不能满足视觉连通性原则.
- ▶ CDD 模型是基于曲率驱动扩散的, 由 TV 模型改进产生.

Reference

- ▶ 王大凯, 侯榆青等. 图像处理的偏微分方程方法, 北京: 科学出版社, 2008
- ▶ 仵冀颖, 阮秋琦. 偏微分方程在图像去噪中的应用, 北京: 北京大学信息科学研究所, 2006
- ▶ MATLAB docs, The Mathworks Co., Ltd, United States
- ▶ 张红英, 彭启琮. 数字图像修复技术综述, 成都: 电子科技大学, 2005
- ▶ Wikipedia, www.wikipedia.com, United States

Reference

- ▶ 李兰兰, 吴乐南. 一种偏微分方程图像平滑方法, 南京: 东南大学无线电工程系, 2003
- ▶ 王超. 基于变分问题与偏微分方程的图像处理技术研究, 合肥: 中国科学技术大学, 2007

The End

Thanks!