# 1 随机变量$X$的数学期望、方差

## （1）$X$为标量

对随机变量$X \in \mathbb{R}$，分两种情况讨论：

（1.1）$X$为离散型随机变量

令$X$的取值为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，这些取值点上对应的概率为$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$。

$X$的数学期望为：

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \end{aligned} \tag{1}$$

$X$的方差为：

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\{(X - E(X))^2\} \\ &= (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned} \tag{2}$$

（1.2）$X$为连续型随机变量

令$X$的概率密度函数为$f(x)$，$X$的定义域为$[a, b]$。则$X$的数学期望为：

$$E(X) = \int_a^b f(x) d(x) \tag{3}$$

$X$的方差为：

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_a^b (x - E(X))^2 dx \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned} \tag{4}$$

## （2）$X$为向量

记$X \in \mathbb{R}^n$，$X = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T$，其中$X_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$,均为随机变量。

$X$的数学期望为各个分量的数学期望：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$X$的方差为各个分量的方差：

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= Var\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} Var(X_1) \\ Var(X_2) \\ \vdots \\ Var(X_n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}
$$

### （3）$X$为矩阵

记随机变量$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$为：

$$
X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m,1} & X_{m,2} & \cdots & X_{m,n} \end{bmatrix} \tag{7}
$$

$X$的数学期望定义为：

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E\left(\begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m,1} & X_{m,2} & \cdots & X_{m,n} \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} E(X_{1,1}) & E(X_{1,2}) & \cdots & E(X_{1,n}) \\ E(X_{2,1}) & E(X_{2,2}) & \cdots & E(X_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(X_{m,1}) & E(X_{m,2}) & \cdots & E(X_{m,n}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$X$的方差定义为:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= Var\left(\begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{m,1} & X_{m,2} & \cdots & X_{m,n} \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} Var(X_{1,1}) & Var(X_{1,2}) & \cdots & Var(X_{1,n}) \\ Var(X_{2,1}) & Var(X_{2,2}) & \cdots & Var(X_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Var(X_{m,1}) & Var(X_{m,2}) & \cdots & Var(X_{m,n}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$