

1. 计算问题的复杂度是针对问题的输入规模来说的，0-1 背包问题的输入规模除了物品个数 n 之外，还包括每个物品的重量，价值，背包的容量上限 W 等。0-1 背包问题的解法的复杂度为 $O(nW)$ ，是关于 n 和 W 的多项式时间复杂度。但是，输入数据的规模要通过 2 进制的位数来表示，即要用 $\log_2(W)$ 个字符表示出 W ，所以设输入规模（长度）为 m ，则 $W = 2^m$ ，则复杂度是 $O(n \cdot 2^m)$ ，是指数复杂度，所以 $O(nW)$ 的运行时间，可以看做是指数级别的。
2. (1) 首先，如果只调用这个多项式时间子例程零次，我们所做的就是多项式的额外工作量，因此整个过程只需要多项式时间。现在，假设调用多项式时间子例程 $n+1$ 次，并且前 n 次调用花费多项式时间。这意味着在最后一次调用之前，所有数据适合的空间是多项式级别的。因此无论传递给最后一个多项式时间子例程的参数是什么，其大小都以某个多项式为界，所以最后一次调用所用的时间也是多项式级别的。所以最终花费的总时间就是两个多项式之和，也是多项式时间。
(2) 取一个例子，让多项式时间子例程是对输入求平方的函数，对其调用多项式次数。假设算法取一个整数 x 为输入，然后将其平方 $\log(x)$ 次，是多项式次数的调用。但是最终结果的值是 $x^{(2^{\log x})} = x^x = 2^{(\log x \cdot 2^{\log x})}$ ，作为输出需要指数级别的 bit 来表示，所以总的的时间是指数级别的。
3. 首先 Set partition 问题证明是 NP 问题，取 certificate 为 S 集合两个子集之一，只需要线性的时间把其中的元素加起来求和，并且确定得到的值是 S 中所有元素之和的一半即可，所以是 NP 问题。
由于 subset sum 问题是 NPC 的，下证 subset sum 问题可以归约到 Set partition 问题。假设 x 等于 S 中所有元素之和，然后在集合 S 中添加 $x+t$ 和 $2x-t$ 形成新的集合 S' ，则 S' 的所有元素之和为 $4x$ 。我们不可能同时取 $x+t$ 和 $2x-t$ ，因为它们的和是 $3x$ ，即 S 中元素之和的三倍。但是把问题传给 Set partition 问题，划分得到的两个子集之和应该均为 $2x$ ，那么取包含 $2x-t$ 的子集，其他元素之和应该恰为 t ，且这些元素都属于集合 S ，因此它们是 subset sum 问题的解，即把 subset sum 问题归约到了 Set partition 问题。所以 Set partition 问题也是 NPC 的。
4. 创建一个和金矿大小相同的 $N \times M$ 的二维矩阵 $DP[n][m]$ ，其中 $DP[i][j]$ 表示矿工到达第 i 行第 j 列时得到的最多的黄金数目。（ $V[i][j]$ 表示第 i 行第 j 列的格子的黄金数目）而得到 $DP[i][j]$ 有三种不同的情况：
 1. 矿工向右移动到 $DP[i][j]$ ，即从 $DP[i][j-1]$ 来。那么 $[i, j]$ 格子的最大值就等于 $[i, j-1]$ 格子的最大值加上 $[i, j]$ 格子的黄金数目，即 $DP[i][j] = DP[i][j-1] + V[i][j]$
 2. 矿工向右上移动到 $DP[i][j]$ ，即从 $DP[i+1][j-1]$ 来。那么 $[i, j]$ 格子的最大值就等于 $[i+1, j-1]$ 格子的最大值加上 $[i, j]$ 格子的黄金数目，即 $DP[i][j] = DP[i+1][j-1] + V[i][j]$
 3. 矿工向右下移动到 $DP[i][j]$ ，即从 $DP[i-1][j-1]$ 来。那么 $[i, j]$ 格子的最大值就等于 $[i-1, j-1]$ 格子的最大值加上 $[i, j]$ 格子的黄金数目，即 $DP[i][j] = DP[i-1][j-1] + V[i][j]$
 在这三种情况中取最大值，即为 $DP[i][j]$ 的值。因此递归关系式如下：

$$DP[i][j] = V[i][j] + \max(DP[i][j-1], DP[i+1][j-1], DP[i-1][j-1])$$
 初始化第一列的 $DP[i][j] = V[i][j]$ ，然后依次更新，最后取最后一列中的最大值即为全局最大值。