1. 简答题：Toom-cook 整数乘法的核心思路是把 n 位整数乘法的问题拆分为 5 个 n/3 位整数的乘法问题，用这节课学习的方法分析，为什么 Toom-cook 算法的时间复杂度是 $O(n^{1.465})$

分析运行时的情况，有：

1 problem of size n

5 problem of size n/3

……

$5^t$ problem of size $n/3^t$

……

所以当 $n/3^t=1$，即 $t=\log_3 n$ 时，有$5^{\log_3 n}$ problem of size 1

而$5^{\log_3 n} = n^{\log_3 5}=n^{1.465}$，因此 Toom-cook 算法的时间复杂度是 $O(n^{1.465})$

2. 证明 $n^3 + 3n = \Theta(n^3 - n^2)$

2① ∵ $T(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, n_0>0$, s.t. $\forall n\geq n_0$, $T(n)\leq c\cdot g(n)$

∴取 $c=2$, $n_0=3$.

则 $c\cdot g(n)-T(n)=2(n^3-n^2)-(n^3+3n)$

$= \cancel{2}n^3-2n^2-3n$

$=n(n-3)(n+1)$

∴当 $n\geq 3$时，$n(n-3)(n+1)\geq 0$.

即 $T(n)\leq c\cdot g(n)$.

∴ $n^3+3n=O(n^3-n^2)$

② ∵ $T(n)=\Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c, n_0>0$ s.t. $\forall n\geq n_0$, $T(n)\geq c\cdot g(n)$

∴取 $c=\frac{1}{2}$, $n_0=0$.

则 $c\cdot g(n)-T(n)=\frac{1}{2}(n^3-n^2)-(n^3+3n)$

$=-\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n^2-3n$.

$=\cancel{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}n(n^2+n+6)$

∴当$n\geq 0$时，$n^2+n+6>0$.

$c\cdot g(n)-T(n)\leq 0$, ~~即~~

即 $T(n)\geq c\cdot g(n)$.

∴ $n^3+3n=\Omega(n^3-n^2)$.

综上，有 $n^3+3n=\Theta(n^3-n^2)$

3. 设 A 类函数为 T(n)，B 类函数为 g(n)，分析 T(n)和 g(n)的关系，争取的打✔，一行可以有多个✔。

| A | B | O | Ω | Θ |
|---|---|---|---|---|
| $(\log_a n)^7$ | $n^{0.7}$ | √ | √ | √ |
| $2n^{1.5}$ | $2^n$ | √ | | |
| $3^{3n}$ | $3^{4n}$ | √ | | |
| $\ln n$ | $\log n$ | √ | √ | √ |
| $\log(n!)$ | $\log(n^n)$ | √ | | |
| $(13/12)^n$ | $(12/13)^n$ | | √ | |
| $n^2$ | $4^{\log_2 n}$ | √ | √ | √ |
| $n^{0.1}$ | $(0.1)^n$ | | √ | |
| $\log(\log n)$ | $\sqrt{\log n}$ | √ | √ | √ |
| $n^{1/\log n}$ | 1 | √ | √ | √ |

4. 编程题：完成 yoj.ruc.edu.cn 上的 Karatsuba 整数乘法题目

http://yoj.ruc.edu.cn/index.php/teacher/problem/detail/pno/784.html

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| #515829 | #784 Karatsuba Multiplication | ✔ Accepted | 100 | 104 ms | 3056 KB |