Commande multivariable
Représentation d'état - Propriétés

A. Desbiens, 24 janvier 2018

1. RELATION AVEC LA FONCTION DE TRANSFERT

- Continu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$[sI - A]X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$
$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) + DU(s)$$
$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D}$$

Stabilité → pôles de $G(s)$, i.e. les valeurs de s pour que le dénominateur de *G*(*s*) soit nul.

$$G(s) = C\frac{\text{adj}[sI - A]}{\det[sI - A]}B + D$$

Les pôles de $G(s)$ sont donc les valeurs de s qui font que $\det[sI - A] = 0$.

Pôles de $G(s)$ → valeurs propres de *A*.

Matlab : eig(A)

- Discret :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$
$$[zI - A]X(z) = BU(z)$$
$$X(z) = [zI - A]^{-1} BU(z)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$
$$Y(z) = C[zI - A]^{-1} BU(z) + DU(z)$$
$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = C[zI - A]^{-1} B + D}$$

Pôles de $G(z)$ **→ valeurs propres de *A*.**

2. **PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT**

- Retards :
  - En continu : ne peuvent être représentés.
  - En discret : par des z^{-1}

- Transmission directe et nombre d'états *n*:

  Pour un système multivariable : il faut additionner les états de chacun des sous-systèmes

  (parfois certains sous-systèmes sont communs => cela permet de réduire le nombre d'états).

  - En continu (système monovariable) :
    - Transmission directe si degré du dénominateur de la fonction de transfert = dégré de son numérateur
    - Nombre d'états = degré du dénominateur

  - En discret (système monovariable) :

    $$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

    où *N* et *D* sont des polynômes en puissance décroissante de *z* (i.e on retrouve un terme au numérateur et/ou au dénominateur en z^0, et aucun terme en z^{-i} ($i > 0$).

    - Nombre d'état = *n* = degré de *D*.
    - Nombre de périodes du retard = degré de *D* – degré de *N*
    - Transmission directe si le retard = 0.

- États :
  - En continu : sont les sorties d'un intégrateur 1/*s*.
  - En discret : sont les sorties d'un retard z^{-1}.
  - L'entrée du système n'a pas un effet instantané (au même moment) sur les états.
  - Les états caractérisent l'*état* du système :
    - Leurs valeurs à $t = 0$ sont les conditions initiales nécessaires pour calculer l'évolution du système.

  - Ce sont la mémoire minimale du système pour pouvoir le simuler.

- Pour un même système, il existe une infinité de représentations d'états .
  - Si possible, prendre la représentation dont les états ont une signification physique.
  - Voir les sections Changement de base et Représentation d'état et circuits.

- Les valeurs propres de la matrice A sont les pôles du système.

- Mêmes équations d'état en monovariable qu'en multivariable.

3. MATRICE DE TRANSITION

- Comment calculer $x(t)$ pour le système de $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ suite à l'application de l'entrée $u(t)$, avec les conditions initiales $x(t_0)=x_{t_0}$?

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \quad (1)$$

Multiplie Eq.(1) par e^{-At} :

$$e^{-At}\dot{x}(t)=e^{-At}\left(Ax(t)+Bu(t)\right)$$

$$e^{-At}\left(\dot{x}(t)-Ax(t)\right)=e^{-At}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right]=e^{-At}Bu(t)$$

Changement de variable $t \to \tau$

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]=e^{-A\tau}Bu(\tau) \quad (2)$$

Intègre Eq.(2) de t_0 à t

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}x(t)-e^{-At_0}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)&=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\ x(t)&=\Phi(t-t_0)\,x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau \end{aligned}}$$

où $\Phi(t)=e^{At}$ est la matrice de transition des états.

L'expression

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\substack{\text{réponse naturelle} \\ \text{(rép. aux c. i. avec } u=0\text{)} \\ \downarrow \\ \text{solution homogène}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\substack{\text{réponse forcée} \\ \downarrow \\ \text{solution particulière}}}$$

permet de calculer $x(t)$ pour une entrée $u(t)$ et les conditions initiales $x(t_0)$.

- Comment calculer e^{At} ?

Pour $u(t)=0$ et c. i. $x(t_0=0)=x(0)$,

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$sIX(s) - X(0) = AX(s)$$

$$X(s) = [sI-A]^{-1}X(0)$$

$$x(t) = x(0)\mathscr{L}^{-1}[sI-A]^{-1}$$

On sait que pour $u(t)=0$ et $x(0)$

$x(t) = e^{At}x(0)$

donc

$$\boxed{e^{At} = \mathscr{L}^{-1}[sI-A]^{-1}}$$

- Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+0.5 & 0 \\ 0.5 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$[sI-A]^{-1} = \frac{1}{(s+0.5)(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -0.5 & s+0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+0.5} & 0 \\ \underbrace{\dfrac{-0.5}{(s+0.5)(s+1)}}_{\substack{\text{décomposition en} \\ \text{fractions partielles}}} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+0.5} & 0 \\ \dfrac{-1}{s+0.5} + \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[sI-A]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ -e^{-0.5t} + e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = e^{At} = \Phi(t)$$

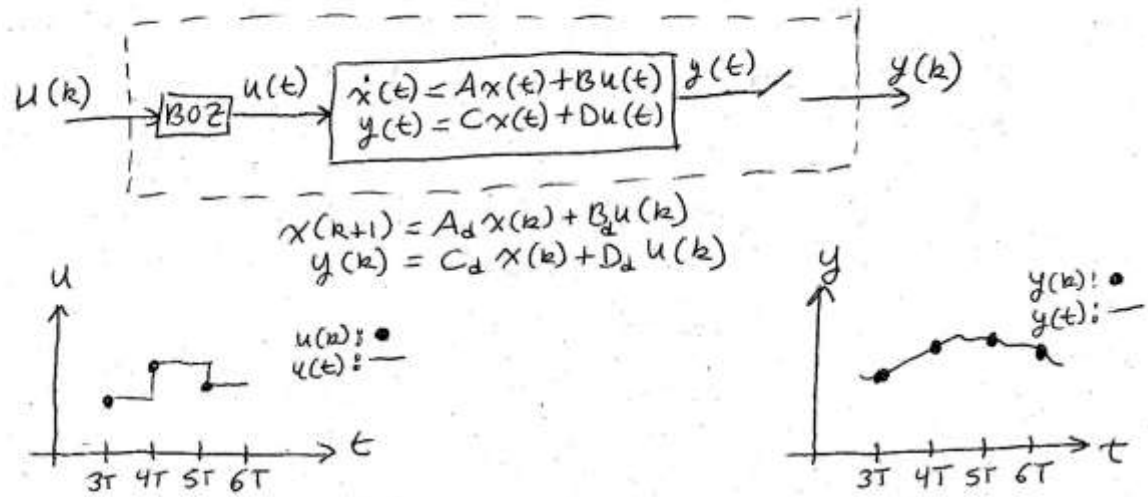
Matlab :

```
>> syms t;
>> expm([-0.5 0; -0.5 -1]*t)
```

4. **DISCRÉTISATION**

continu période d'échant. T discret

$A,B,C,D \quad \Leftrightarrow \quad A_d, B_d, C_d, D_d$



Discrétisation sur une période : temps initial → $t_0 = kT$, temps final → $t = (k+1)T$

- Pour les conditions initiales $x(t_0)$ et une entrée $u(t)$, le vecteur d'état à l'instant t est :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

- Le calcul des états sur une période, i.e. entre $t_0 = kT$ et $t = (k+1)T$ donne :

$$x((k+1)T) = e^{A((k+1)T-kT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Changement de variable : $\alpha = (k+1)T - \tau$ et donc $\tau = (k+1)T - \alpha$

pour $\tau = kT \rightarrow \alpha = T$

pour $\tau = (k+1)T \rightarrow \alpha = 0$

$d\tau = -d\alpha$

Sur la période on a $u(\tau) = u(kT) =$ cste

On obtient donc :

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{T}^{0} e^{A\alpha}Bu(\alpha)(-1)\,d\alpha$$

$$= e^{AT}x(kT) + \int_{0}^{T} e^{A\alpha}Bu(kT)\,d\alpha$$

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \left[\int_{0}^{T} e^{A\alpha}B\,d\alpha\right]u(k)$$

Donc,

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) & y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \\ A_d = e^{AT} = \Phi(T) & C_d = C \\ B_d = \int_0^T e^{A\alpha} B d\alpha & D_d = D \end{array}}$$

5. **CHANGEMENT DE BASE**

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$x(k) = Tz(k)$ $\quad \det(T) \neq 0$ → matrice non singulière

Même système car $x(k) = Tz(k)$

$$Tz(k+1) = ATz(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = CTz(k) + Du(k)$$

$$z(k+1) = \underbrace{T^{-1}AT}_{A_z} z(k) + \underbrace{T^{-1}B}_{B_z} u(k)$$
$$y(k) = \underbrace{CT}_{C_z} z(k) + \underbrace{D}_{D_z} u(k)$$

→ Infinité de représentations possibles pour le même syst.

Vous pouvez calculer la fonction de transfert des 2 systèmes et constater qu'elles sont identiques.

6. **UTILISATION DE MATLAB**

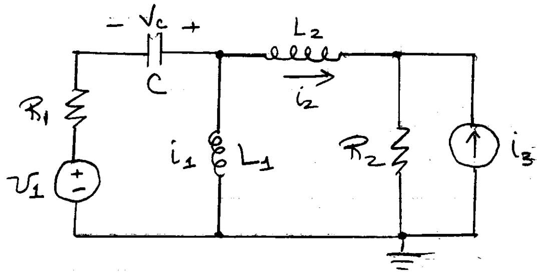
Discrétisation et simulation : *representation_d_etat.m*

7. **REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET CIRCUITS (pour information seulement)**

États ont un sens physique :
- Tension aux bornes des condensateurs
- Courant dans les inductances

➢ Variables dont les valeurs initiales doivent être connues pour résoudre le circuit.

Exemple :



états : v_c , i_1 , i_2

$$C\frac{dv_c}{dt}+i_1+i_2=0$$

$$-v_1+R_1\left(i_1+i_2\right)-v_c+L_1\frac{di_1}{dt}=0$$

$$-v_1+R_1\left(i_1+i_2\right)-v_c+L_2\frac{di_2}{dt}+R_2\left(i_2+i_3\right)=0$$

Sous forme d'état :

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dv_c}{dt}\\ \dfrac{di_1}{dt}\\ \dfrac{di_2}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1/c & -1/c\\ 1/L_1 & -R_1/L_1 & -R_1/L_1\\ 1/L_2 & -R_1/L_1 & -\left(R_1+R_2\right)/L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_c\\ i_1\\ i_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1/L_1 & 0\\ 1/L_2 & -R_2/L_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ i_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu$$