COMMANDE MODALE

A. Desbiens – Février 2020

- Système à commander:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{états}$$

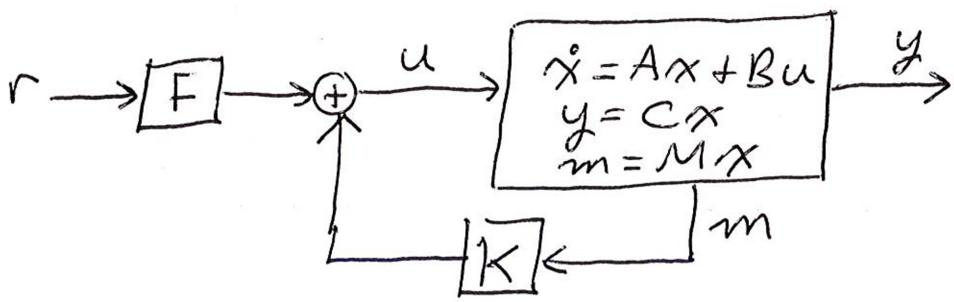
$$y = Cx \qquad \text{sorties à contrôler}$$

$$m = Mx \qquad \text{mesures disponibles pour le calcul de la commande}$$

- Loi de commande:

$$u = Km + Fr \qquad \text{où } r = \text{consignes}$$

- Hypothèse: Le système A, B est gouvernable.



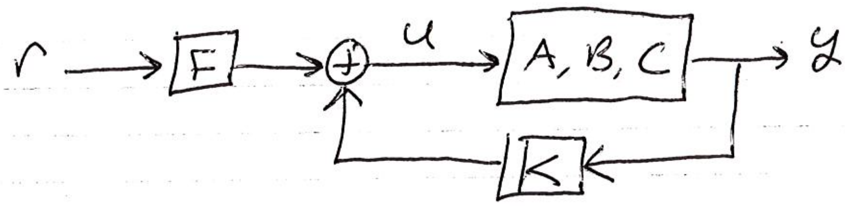
- Dimensions:

$x : n \times 1$	$A : n \times n$
$u : n_u \times 1$	$B : n \times n_u$
$y : n_y \times 1$	$C : n_y \times n$
$r : n_y \times 1$	$M : n_m \times n$
$m : n_m \times 1$	$K : n_u \times n_m$
	$F : n_u \times n_y$

- Deux cas particuliers :

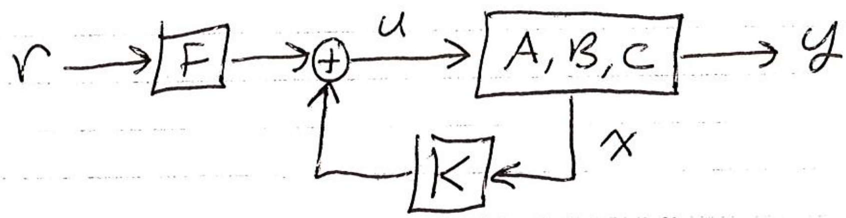
1) commande par retour de sortie

$$m = y \Rightarrow M = C \quad \text{et} \quad n_m = n_y$$



2) commande par retour complet d'état

$$m = x \Rightarrow M = I \quad \text{et} \quad n_m = n$$



Note : Les états sont très rarement tous mesurés. L'utilisation d'un observateur permet d'obtenir un estimé des états.

- Analyse du système en boucle fermée :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = Km + Fr$$

donc : $\dot{x} = Ax + BKm + BFr$

$$\boxed{\dot{x} = (A + BKM)x + BFr}$$

Les pôles en boucle fermée sont les n valeurs propres de $A+BKM$.

- Notation :

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: n valeurs propres de $A+BKM$

Hypothèse : Elles sont distinctes.

$d_1, \ldots, d_n$: vecteurs propres à droite

$$(A+BKM)d_i = \lambda_i d_i \qquad d_i : n \times 1$$

$w_1, \ldots, w_n$: directions d'entrées associées aux d_i

$$A d_i + B\underbrace{KM d_i}_{w_i} = \lambda_i d_i$$

$$w_i = KM d_i \qquad w_i : n_u \times 1$$

$g_1, \ldots g_n$: vecteurs propres à gauche

$$g_i (A+BKM) = \lambda_i g_i \qquad g_i : 1 \times n$$

$t_1, \ldots, t_n$: directions de sorties associées aux g_i

$$g_i A + \underbrace{g_i BK}_{t_i} M = \lambda_i g_i$$

$$t_i = g_i BK \qquad t_i : 1 \times n_m$$

- Propriétés des vecteurs propres :

1) $\lambda_i g_i d_j = g_i (A+BKM) d_j = g_i \lambda_j d_j$

$(\lambda_i - \lambda_j) g_i d_j = 0$

Selon l'hypothèse des valeurs propres distinctes : $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$

donc $\boxed{g_i d_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j}$

2) $(A+BKM) d_i = \lambda_i d_i$

$(A+BKM) \beta d_i = \lambda_i \beta d_i$

donc βd_i $(\beta \neq 0)$ est également un vecteur propre

choix : (normalisation) $\boxed{g_i d_i = 1}$

- Notation matricielle :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad n \times n$$

$D_r = [d_1 \; \cdots \; d_n] \qquad n \times n$

$W = [w_1 \; \cdots \; w_n] \qquad n_u \times n$

$$G_a = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \qquad n \times n$$

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \qquad n \times n_m$$

$$\boxed{G_a \cdot D_r = I}$$

Selon les deux propriétés des vecteurs propres de la page précédente,

$$G_a^{-1} G_a D_r = G_a^{-1} I \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_r = G_a^{-1}}$$

$$D_r \cdot G_a = G_a^{-1} \cdot G_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_r \cdot G_a = I}$$

$$(A + BKM) D_r = D_r \cdot \Lambda$$

$$G_a (A + BKM) = \Lambda \cdot G_a$$

$$G_a \cdot (A + BKM) D_r = \Lambda \, G_a \cdot D_r$$

$$\boxed{G_a (A + BKM) D_r = \Lambda}$$

$$(A + BKM) D_r \cdot G_a = D_r \cdot \Lambda \cdot G_a$$

$$\boxed{A + BKM = D_r \cdot \Lambda \cdot G_a}$$

$$\boxed{W = K \cdot M \cdot D_r} \Rightarrow \boxed{K = W\,(M \cdot D_r)^{-1}}$$

$$\boxed{T = G_a \cdot B \cdot K}$$

- Modes :

$$\dot{x} = (A + BKM)\,x + BFr$$
$$= D_r \cdot \Lambda \cdot G_a\, x + BFr$$
$$G_a \cdot \dot{x} = G_a \cdot D_r \cdot \Lambda \cdot G_a\, x + G_a \cdot BFr$$
$$= \Lambda\, G_a \cdot x + G_a \cdot BFr$$

Modes du système : $\boxed{\xi = G_a \cdot x}$

$$x = G_a^{-1}\,\xi \Rightarrow \boxed{x = D_r \cdot \xi}$$

$$\boxed{\dot{\xi} = \Lambda\,\xi + G_a \cdot BFr}$$

$$s\,\xi(s) = \Lambda\,\xi(s) + G_a \cdot BF\,r(s)$$

$$\boxed{\xi(s) = (sI - \Lambda)^{-1}\, G_a\, BF\, r(s)}$$

Λ est diagonale $\Rightarrow$ $(sI - \Lambda)$ est diagonale

$$(sI - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{s-\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$BFr(t) \longrightarrow \boxed{G_a} \longrightarrow \boxed{(sI-\Lambda)^{-1}} \xrightarrow{\xi(t)} \boxed{D_r} \xrightarrow{x(t)}$$

$$\frac{1}{s-\lambda_i} = \frac{-1/\lambda_i}{\frac{-1}{\lambda_i}s+1}$$

Les constantes de temps du système diagonal sont $-1/\lambda_i$.

$$\begin{aligned} u &= Km + Fr \\ &= KMx + Fr \\ &= KMD_r \cdot \xi + Fr \end{aligned}$$

$$\boxed{u = W\xi + Fr}$$

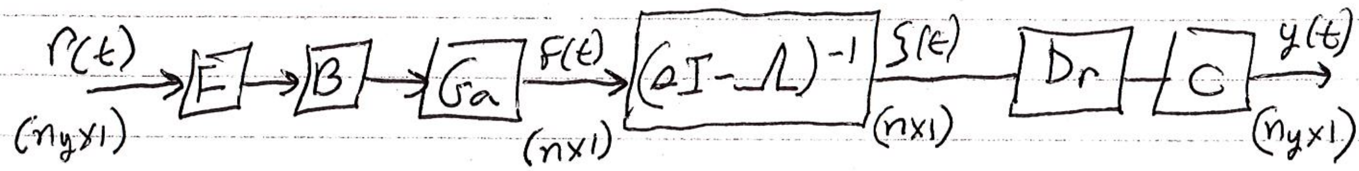
$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r] & \boxed{G_a} \arrow[r, "\xi(t)"] & \boxed{W} \arrow[r] & \oplus \arrow[r, "u(t)"] & {} \\ & & & Fr(t) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$y = Cx$$

$$\boxed{y = C \cdot D_r \cdot \xi}$$

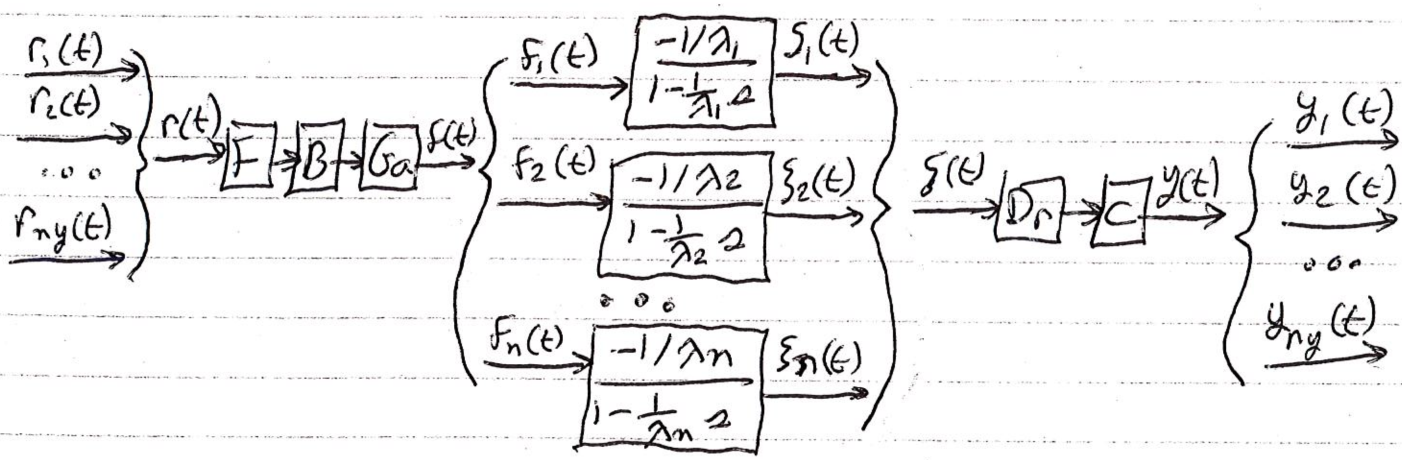
$$\xi(t) \longrightarrow \boxed{D_r} \xrightarrow{x(t)} \boxed{C} \xrightarrow{y(t)}$$

En joignant le 1^er et le 3^e diagramme de la page précédente, on obtient le système en boucle fermée, expliquant l'effet des consignes r sur les sorties y



si $r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \cdots \\ r_{ny}(t) \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$, $\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \cdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix}$, $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_{ny}(t) \end{bmatrix}$

alors



Le système en boucle fermée a été diagonalisé. Les seuls éléments dynamiques sont des systèmes du premier ordre en parallèle dont les constantes de temps sont $-1/\lambda_1, -1/\lambda_2, \ldots, -1/\lambda_n$.

Reprenons la dernière équation de la page 7, $y = C D r \xi$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$y_j = c_j d_1 \xi_1 + c_j d_2 \xi_2 + \cdots + c_j d_n \xi_n$$

Le mode ξ_i n'a pas d'effet sur y_j si $c_j d_i = 0$.

- Matrice de commande K:

  Les n valeurs propres de $A+BKM$ sont les pôles en boucle fermée.

  Objectifs de commande:

  Choisir K de façon à

  a) placer n_m valeurs propres de $A+BKM$

  b) annuler l'effet de certains ξ_i sur certains y_j

  Cas particuliers:

  1) commande par retour de sortie

  On choisit n_y valeurs propres de $A+BKM$. Si $n_y < n$, les $n - n_y$ autres valeurs propres ne seront pas aux mêmes endroits en boucle fermée qu'en boucle ouverte:

⇒ Elles ne seront pas gênantes si elles demeurent à partie réelle négative et si elles correspondent à une dynamique rapide.

⇒ Pour un procédé stable en boucle ouverte, il se peut que certaines d'entre elles deviennent à partie réelle positive en boucle fermée, déstabilisant le système.

⇒ Si le procédé est instable en boucle ouverte, il le demeurera fort probablement en boucle fermée.

2) commande par retour complet d'état

On choisit de placer toutes les n valeurs propres de $A+BKM$.

Il est donc possible de stabiliser un procédé qui est instable en boucle ouverte.

3) Le vecteur m des mesures disponibles peut également être une combinaison de certaines sorties y_i et de certains états x_j.

Dans tous les cas, il ne faut pas demander des dynamiques en boucle fermée trop rapides par rapport à celles en boucle ouverte, sinon des problèmes de robustesse sont fort probables.

Calcul de K :

① Pour $i = 1$ à n_m :

a) choisir λ_i

b) valeurs propres : $A d_i + BKM d_i = \lambda_i d_i$

$$(A - \lambda_i I) d_i + B w_i = 0$$

Il faut donc trouver d_i et w_i en résolvant :

$$\boxed{\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0}$$

On pourrait vouloir un effet nul de ξ_i (donc du système de premier ordre avec la constante de temps $-1/\lambda_i$) sur y_j :

$$c_j d_i = 0$$

Il faut alors trouver d_i et w_i en résolvant :

$$\boxed{\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ c_j & 0_{1 \times n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0}$$

On pourrait ajouter d'autres sorties.

qui ne subissent pas l'effet de ξ_i :

$$\boxed{\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \\ C_j & 0_{1\times n_u} \\ C_k & 0_{1\times n_u} \\ C_\ell & 0_{1\times n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0}$$

<u>Note</u> : Pour trouver $\begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix}$ (qui comporte $n_{inc} = n + n_u$ inconnues), il faut résoudre un système homogène d'équations du type

$$P \begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0$$

- Si le rang de $P = n_{inc}$, alors la seule solution est la solution triviale $\begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0_{n_{inc}\times 1}$

  Il faut alors réduire le nombre de sorties qui ne subissent pas l'effet de ξ_i.

- Si le rang de $P < n_{inc}$, alors il y a une $(n_{inc} - \text{rang}(P))$uple infinités de solutions.

② $W_{rm} = [w_1 \; ---- \; w_{rm}]$

$Dr_{rm} = [d_1 \; --- \; d_{rm}]$

$$\boxed{K = W_{rm} \left(M \cdot Dr_{mm}\right)^{-1}}$$

Calcul alternatif de K lorsque $M = I$ et qu'on n'annule pas l'effet de certains ξ_i sur certains y_j :

Sous ces conditions, on retrouve une commande classique de placement des pôles en boucle fermée. On calcule directement K afin que les valeurs propres de $A+BK$ soient celles désirées.

Les valeurs propres de $A+BK$ sont les valeurs de s telles que :

$$\det(sI - A - BK) = 0$$

Si on désire que les pôles en boucle fermée soient $\lambda_1, \lambda_2 \; --, \lambda_n$ alors il faut que :

$$\det(sI - A - BK) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$$

La résolution de l'équation précédente conduit à la solution K.

- Matrice de pré-commande F :

Objectif : On désire que $y = r$ en régime permanent (pour le modèle nominal, sans perturbations).

En régime permanent :

$$\dot{x} = 0 = (A + BKM)x + BFr$$

$$x = -(A + BKM)^{-1} BFr$$

$$y = Cx$$
$$= -C(A+BKM)^{-1}BFr$$
$$= r$$

Donc $\quad -C(A+BKM)^{-1}BF = I$

d'où

$$\boxed{F = -\left[C(A+BKM)^{-1}B\right]^{-1}}$$

- Commentaires sur les performances :

1) L'allure des réponses en boucle fermée dépend des pôles mais également des zéros du système. La commande modale ne gère pas les zéros.

2) Les erreurs $r - y$ ne sont pas intégrées. Il y aura donc des erreurs en régime permanent en pratique à cause des perturbations et des erreurs de modélisation.

3) Si on désire gérer les performances des sorties individuellement, il est recommandé d'annuler l'effet de certains ξ_i sur certains y_j. Par exemple, on peut annuler l'effet des ξ_i rapides sur les sorties y_j qu'on désire plus lentes, et annuler l'effet des ξ_i lents sur les sorties y_j qu'on désire rapides.

Si on ne le fait pas, on ne peut pas prévoir comment l'effet des modes vont se répartir sur les différentes sorties.

- Exemple:

Le procédé instable est $G(s) = \dfrac{2}{(1-2s)(1+2s)}$

Une représentation d'état est:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Les pôles désirés en boucle fermée sont $\lambda_1 = \frac{-1}{1}$ et $\lambda_2 = -1/3$ (constantes de temps : 1 et 3).

→ Solution 1 :

a) pour chaque λ_i, solutionner $[A - \lambda_i I \;\; B]\begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0$

$\lambda_1 = -1$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda_1 I \;\; B]\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ w_1 \end{bmatrix} = 0$$

2 équations et 3 inconnues $\Rightarrow$ posons $w_1 = 1$

$$\begin{aligned} d_{11} + 0,5 d_{21} &= -1 \\ 0,5 d_{11} + d_{21} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} d_{11} &= -1,333 \\ d_{21} &= 0,667 \end{aligned}$$

$\lambda_2 = -1/3$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 0,333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,5 \\ 0,5 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda_2 I \;\; B]\begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,333 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

Posons $w_2 = 1$:

$$\begin{aligned} 0,333 d_{12} + 0,5 d_{22} &= -1 \\ 0,5 d_{12} + 0,333 d_{22} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} d_{12} &= 2,4 \\ d_{22} &= -3,6 \end{aligned}$$

b) $W_{nm} = [w_1 \;\; w_2] = [1 \;\; 1]$

$$Dr_{nm} = [d_1 \;\; d_2] = \begin{bmatrix} -1,333 & 2,4 \\ 0,667 & -3,6 \end{bmatrix}$$

/16

$M = I$

$K = W_{nm}(M \cdot Dr_{nm})^{-1} = [-1{,}333 \quad -1{,}1667]$

c) $F = -[C(A+BKM)^{-1}B]^{-1}$

$= -0{,}667$

→ Solution 2 (pour le calcul de K) :

Aucune contrainte $c_j d_i = 0$ et $M = I$: on peut placer les pôles directement :

$\det(sI - A - BK) = (s+1)(s+1/3)$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & 0{,}5 + k_2 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A - BK = \begin{bmatrix} s - k_1 & -0{,}5 - k_2 \\ -0{,}5 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A - BK) = s^2 - k_1 s - 0{,}25 - 0{,}5k_2$$

$$= s^2 + 1{,}333s + 0{,}333$$

$$\left.\begin{array}{l} -k_1 = 1{,}333 \\ -0{,}25 - 0{,}5k_2 = 0{,}333 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = -1{,}333 \\ k_2 = -1{,}1667 \end{array}$$

$K = [-1{,}333 \quad -1{,}6667]$

Matlab:

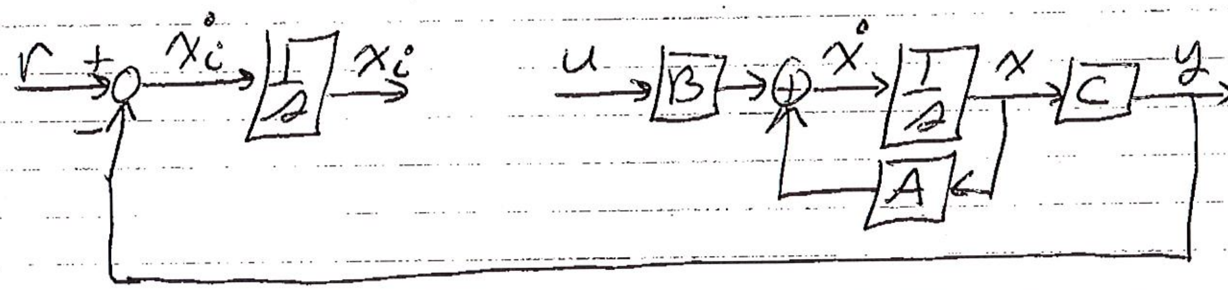
- modale1x1_retour_etat.m (exemple précédent)
- modale3x3_retour_etat.m
- modale3x3_retour_sortie.m

• Commande modale avec intégration des erreurs

Les sorties y doivent être mesurées pour calculer les erreurs r-y et les intégrer.

La pré-commande F ne sera plus nécessaire car la précision sera assurée par les intégrateurs.

Le nouveau "procédé" à commander est:



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x}_i = r - y$$

$$= -Cx + r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times n_y} \\ -C & 0_{n_y \times n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{ny \times nu} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{n \times ny} \\ I_{ny \times ny} \end{bmatrix} r$$

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a u + Pr$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0_{ny \times ny} \\ 0_{ny \times n} & I_{ny \times ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$y_a = C_a x_a$$

Ces équations sont celles du système augmenté.

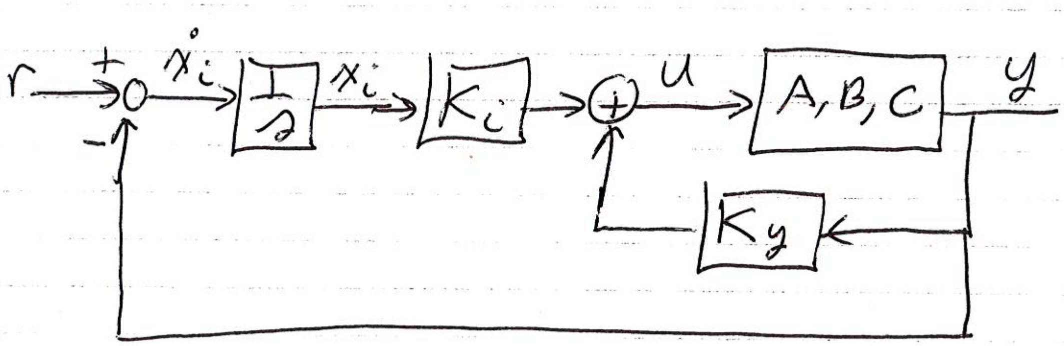
Le vecteur x_i fait partie des mesures disponibles pour le calcul de la commande car il provient de l'ordinateur de contrôle.

1) Commande par retour de sortie

$$m = \begin{bmatrix} y \\ x_i \end{bmatrix} = y_a = C_a x_a$$

$$\Rightarrow M = C_a$$

$$\begin{aligned} u &= K m \\ &= K \begin{bmatrix} y \\ x_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underset{n_u \times n_y}{\underset{\uparrow}{K_y}} & \underset{n_u \times n_y}{\underset{\uparrow}{K_i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_i \end{bmatrix} = K_y \cdot y + K_i \cdot x_i \end{aligned}$$



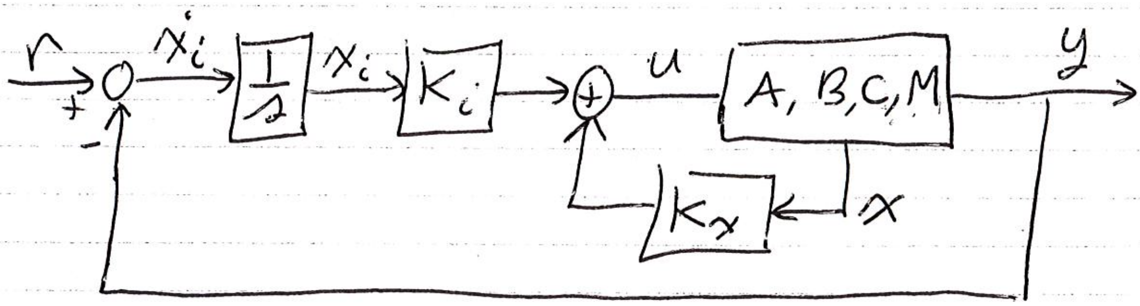
2) commande par retour complet d'état

$$m = \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = M x_a = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & O_{n \times n_y} \\ O_{n_y \times n} & I_{n_y, n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$u = K m$$

$$= K \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\uparrow \atop n_u \times n}{K_x} & \underset{\uparrow \atop n_u \times n_y}{K_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} = K_x \cdot x + K_i \cdot x_i$$



Le calcul de K se fait comme expliqué à la page 11 mais en utilisant le système augmenté plutôt que le système original.

Matlab :

- modale3x3_retour_sortie_integr.m
- modale3x3_retour_etat_integr.m

- Commande modale discrète

Système à commander :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad , \text{gouvernable}$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$m(k) = Mx(k)$$

Loi de commande :

$$u(k) = Km(k) + Fr(k)$$

Système en boucle fermée :

$$x(k+1) = Ax(k) + BKMx(k) + BFr(k)$$

$$\boxed{x(k+1) = \left(A + BKM\right)x(k) + BFr(k)}$$

⇒ Relation similaire au cas continu.

⇒ Pôles en boucle fermée : valeurs propres de $A+BKM$.

Modes :

$$G_a \cdot x(k+1) = \Lambda G_a \cdot x(k) + G_a \cdot BFr(k)$$

$$\xi(k) = G_a \cdot x(k)$$

$$\boxed{\xi(k+1) = \Lambda \xi(k) + G_a \cdot BFr(k)}$$

$$z\xi(k) = \Lambda\,\xi(k) + G_a \cdot BF\,r(k)$$

$$\boxed{\xi(k) = (zI - \Lambda)^{-1} G_a \cdot BF\,r(k)}$$

$$(zI - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{z-\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Rappel (discrétisation):

$$\frac{K}{1+\tau s} \xleftrightarrow{BOZ,\ T_s} \frac{K(1-e^{-T_s/\tau})}{z - e^{-T_s/\tau}}$$

pôle: $s = -\frac{1}{\tau}$ pôle: $z = e^{-T_s/\tau}$

Calcul de K:

Les équations sont similaires au cas continu. Donc:

$$\boxed{\begin{bmatrix} A-\lambda_i I & B \\ C_j & 0_{1\times nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \qquad K = W_{nm}\,(M \cdot D_{rnm})^{-1}}$$

Matrice de pré-commande F :

On veut $y(k) = r(k)$ en régime permanent.

En régime permanent on a $x(k+1) = x(k)$:

$$x(k) = (A + BKM)\,x(k) + BF\,r(k)$$

$$x(k) = (I - A - BKM)^{-1} BF\,r(k)$$

$$\begin{aligned} y(k) &= C\,x(k) \\ &= C(I-A-BKM)^{-1}BF\,r(k) \\ &= r(k) \end{aligned}$$

Donc $\quad C(I-A-BKM)^{-1}BF = I$

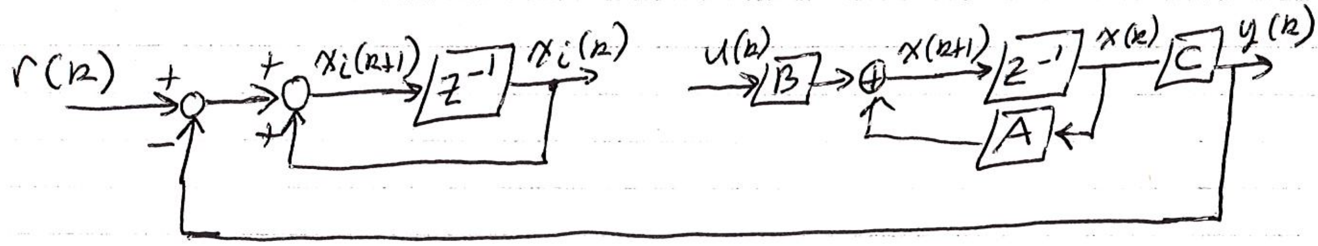
d'où $\quad \boxed{F = \left[C(I-A-BKM)^{-1}B\right]^{-1}}$

Matlab :

- modale3x3_retour_etat_discret.m
- modale3x3_retour_sortie_discret.m

- Commande modale discrète avec intégration des erreurs

Le "procédé" à commander est:



$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O_{nxny} \\ -C & I_{ny,ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ O_{ny,nu} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} O_{nxny} \\ I_{ny,ny} \end{bmatrix} r(k)$$

$$x_a(k+1) = A_a x_a(k) + B_a u(k) + P r(k)$$

$\Rightarrow$ La matrice A_a discrète est construite différemment de celle continue.

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C x(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & O_{ny,ny} \\ O_{ny,n} & I_{ny,ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix}$$

$$y_a(k) = C_a x_a(k)$$

Le calcul de K se fait de façon similaire au cas continu.

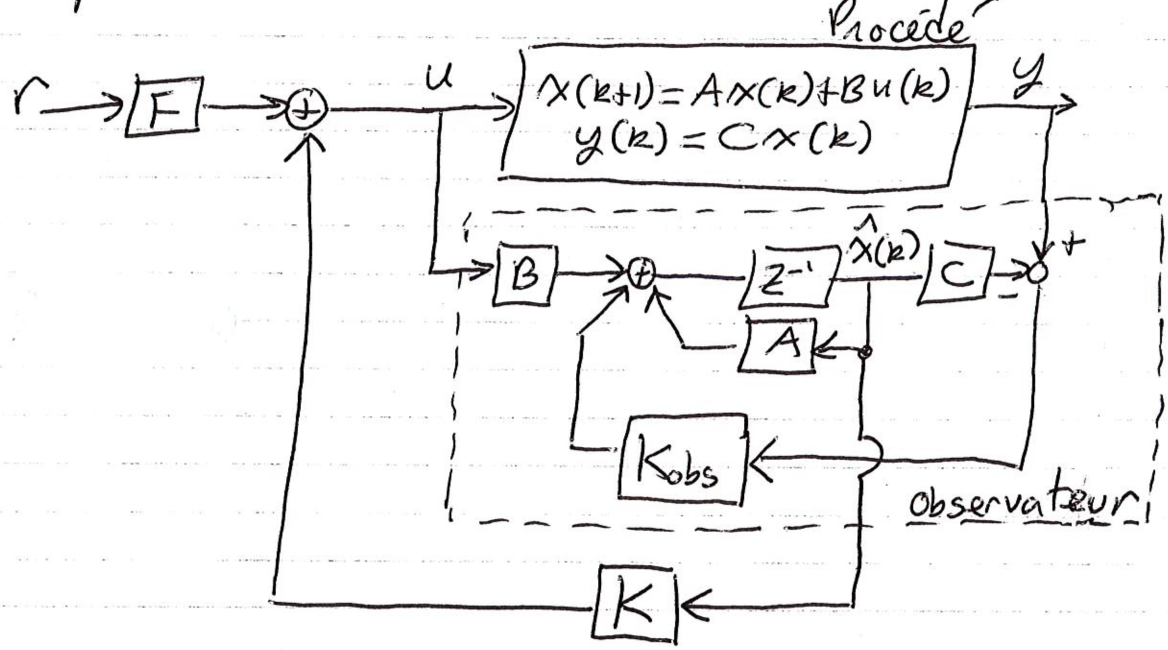
Matlab:

- modale3x3_retour_etat_integr_discret.m
- modale3x3_retour_sortie_integr_discret.m

Commande modale avec observateur

On peut utiliser un observateur pour estimer les états qui seront ensuite utilisés pour le calcul de la commande.

Exemple :



La loi de commande est :

$$u(k) = K\hat{x}(k) + Fr(k)$$

Principe de séparation :

La commande peut être conçue en supposant les états mesurés, en plaçant les n valeurs propres de $A+BK$: $p_{c1}, p_{c2}, \ldots, p_{cn}$

L'observateur peut être conçu pour le procédé en boucle ouverte en plaçant les n valeurs propres de $A-K_{obs}C$: $p_{o1}, p_{o2}, \ldots, p_{on}$

En combinant la commande avec l'observateur (i.e. la commande utilise $\hat{x}(k)$ plutôt que $x(k)$), les pôles du système complet sont : $p_{c1}, p_{c2}, \ldots p_{cn}, p_{o1}, p_{o2}, \ldots p_{on}$.

Selon ce principe de séparation, on peut donc concevoir séparément la commande et l'observateur tout en réussissant à placer tous les pôles du système.

Preuve du principe de séparation :

Il s'agit de trouver les valeurs propres de la matrice d'évolution des états du système complet illustré à la figure précédente.

Les équations du système sont :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$u(k) = K\hat{x}(k) + Fr(k)$$
$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K_{obs}\left[y(k) - C\hat{x}(k)\right]$$

d'où

$$x(k+1) = Ax(k) + BK\hat{x}(k) + BFr(k)$$
$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= (A - K_{obs}C)\hat{x}(k) + BK\hat{x}(k) \\ &\qquad + BFr(k) + K_{obs}C\,x(k) \\ &= (A - K_{obs}C + BK)\hat{x}(k) + K_{obs}C\,x(k) + BFr(k)\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ K_{obs}C & A - K_{obs}C + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BF \\ BF \end{bmatrix} r(k)$$

$$x_{bf}(k+1) = A_{bf}\, x_{bf}(k) + B_{bf}\, r(k)$$

Pour mieux voir les valeurs propres de la matrice d'évolution des états A_{bf}, on effectue un changement de base:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$x_{bf}(k) = T\; z(k)$$

L'équation d'évolution des états est alors:

$$z(k+1) = T^{-1} A_{bf}\, T\, z(k) + T^{-1} B_{bf}\, r(k)$$

où

$$T^{-1} A_{bf} T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ K_{obs}C & A - K_{obs}C + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A - K_{obs}C \end{bmatrix}$$

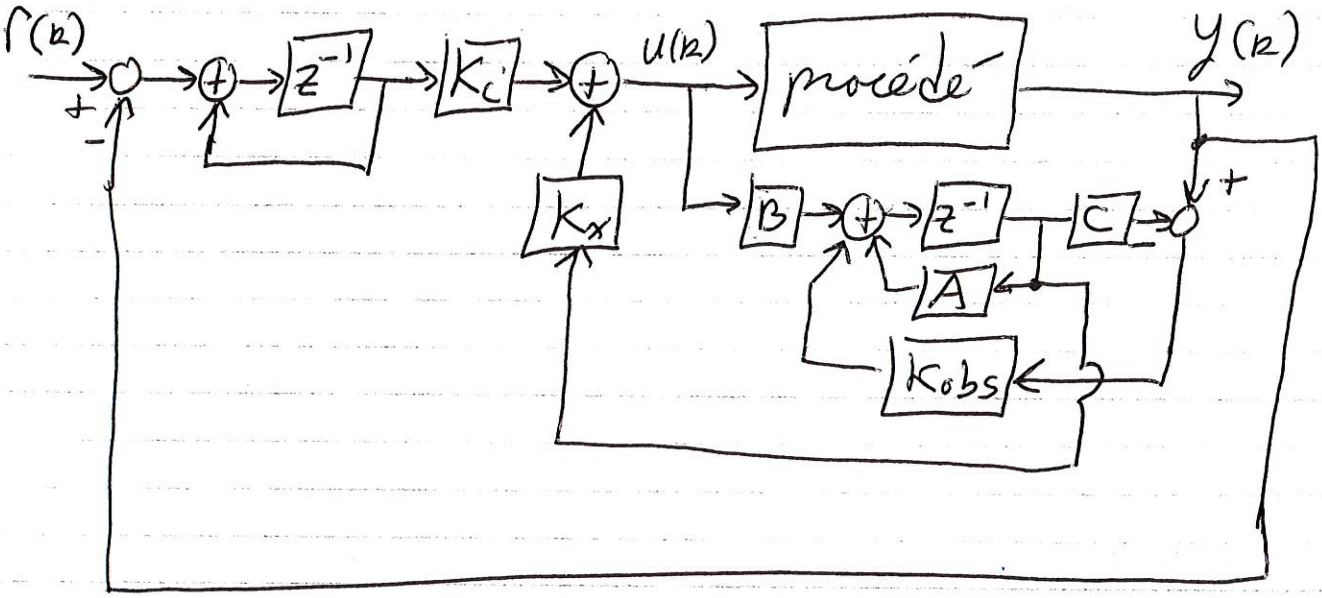
Les valeurs propres de cette matrice sont l'union de celles de $A+BK$ et de celle de $A - K_{obs}C$.

Coupler une commande modale avec intégration des erreurs à un observateur permet de:

- éliminer les erreurs statiques

causées par des erreurs de modélisation et les perturbations
- de placer toutes les valeurs propres du système.

On place généralement la dynamique de l'observateur 2 à 5 fois plus rapide que celle de la commande!



Matlab:

- modale2x2_retour_etat_integr_observ_discret.m
- modale3x3_retour_etat_integr_observ_discret.m