

COMMANDE MULTIVARIABLE

Représentation d'état

Extrait des notes du
cours Commande multivariable
d'André Pomerleau

4.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de développer les outils nécessaires pour réaliser de la commande par retour d'état numérique et de l'observation de variables non mesurées. En commande, étant donné que l'on s'intéresse aux sorties du procédé aux instants d'échantillonnage et que l'algorithme de commande réalisé dans l'ordinateur est discret, on étudie la discrétisation du procédé incluant le bloqueur d'ordre zéro. Il existe différentes méthodes pour obtenir une représentation d'état discrète du procédé multivariable. La fonction de transfert continue de chacun des sous-systèmes représentant le procédé peut, dans une première étape, être transformée en fonction de transfert discrète ($G_p(z)$) par l'application de la définition en incluant le bloqueur d'ordre zéro et en utilisant les tables. La représentation d'état discrète globale du système est alors obtenue en transformant chacune des fonctions de transfert discrète en représentation d'état, en faisant le diagramme d'état global et finalement en écrivant l'équation d'état de l'ensemble si le système est multivariable. Un autre moyen est de faire la représentation d'état continue de chacune des fonctions de transfert en excluant les retards puis dans une seconde étape, passer de la représentation d'état continue de chacun des sous-systèmes à la représentation d'état discrète et finalement à introduire les retards. Dans ce dernier cas, les retards doivent être des multiples de la période d'échantillonnage.

Lors de la représentation d'état discrète, il est montré comment on obtient les différentes formes canoniques à partir des fonctions de transfert. L'accent est mis sur l'utilisation des diagrammes pour les différentes transformations de façon à mettre en évidence le sens physique de la représentation d'état et ainsi éviter la lourdeur mathématique. À l'aide d'exemples, on met en évidence la manière de tenir compte de conditions initiales, de perturbations de type impulsionnelles ou en échelons.

La discrétisation de l'équation d'état continue est par la suite abordée à partir de la solution d'une équation différentielle de 1^{er} ordre. Différentes propriétés de la

représentation d'état sont étudiées: pluralité des représentations, valeurs propres, équation caractéristique, changement de base, gouvernabilité et observabilité.

4.2. Représentation d'état continue

Il existe plusieurs modèles pour représenter un système. Ils peuvent être caractérisés entre autres par une représentation entrées-sorties (ex. fonction de transfert) ou par une représentation interne (représentation d'état). Très souvent dans la littérature on dénotera cette représentation ainsi que la commande qui lui est associée par « Méthodes modernes de commande » par opposition aux méthodes entrées-sorties (ex. réponses en fréquences) par « Méthodes classiques ». Ces premières méthodes permettent non seulement de voir l'évolution temporelle de l'entrée et de la sortie mais également des états internes.

L'élément de base lors d'une représentation d'état est l'intégrateur et les états du système sont les sorties de ces intégrateurs. L'avantage majeur de la représentation d'état provient de l'obtention d'une représentation unifiée pour les systèmes multivariables.

Exemple 4.1.

Soit le diagramme fonctionnel d'un système multivariable à deux entrées et une sortie montrée à la figure 4.1.

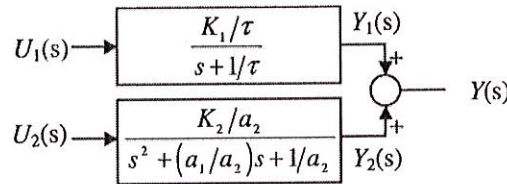


Figure 4.1. Système multivariable (2 entrées, 1 sortie)

En réarrangeant les fonctions de transfert, on obtient:

$$sY_1(s) = -\frac{1}{\tau}Y_1(s) + \frac{K_1}{\tau}U_1(s)$$

$$s^2Y_2(s) = -\frac{a_1}{a_2}sY_2(s) - \frac{1}{a_2}Y_2(s) + \frac{K_2}{a_2}U_2(s)$$

La représentation sous forme de diagramme de chacun des sous-systèmes est donnée aux figure 4.2a et 4.2b :

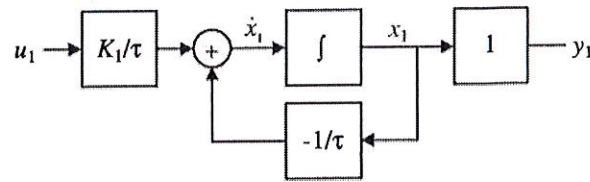


Figure 4.2a. Diagrammes d'état du premier sous-système

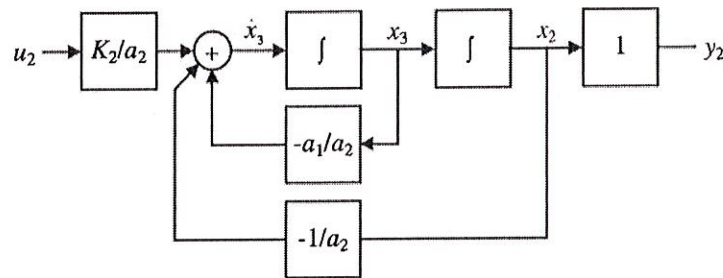


Figure 4.2b. Diagrammes d'état du deuxième sous-système

En prenant :

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = \dot{y}_2$$

Les équations d'états sont données par:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [-1/\tau]x_1 + [K_1/\tau]u_1 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_2/a_2 \end{bmatrix} u_2 \end{aligned}$$

Une équation d'état exprime donc la dérivée de l'état en fonction de l'état présent et des entrées. Une équation différentielle d'ordre « n » est représentée par « n » équations de 1^{er} ordre.

En combinant les deux sous-systèmes, on obtient:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1/\tau & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & K_2/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Une représentation générale et condensée par variables d'états d'un procédé multivariable est donnée à la figure 4.3. Les équations sont:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \quad [4.1]$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u} \quad [4.2]$$

La matrice **A** représente l'évolution du système, la matrice **B** est la matrice de commande, la matrice **C** est la matrice d'observation et la matrice **D** est la matrice de transmission directe. À l'aide de la matrice **C**, on peut donc observer non seulement les sorties mais également les états.

Pour un système à n états, r entrées et m sorties, les dimensions des matrices sont:

$$\mathbf{A}: n \times n$$

$$\mathbf{B}: n \times r$$

$$\mathbf{C}: m \times n$$

$$\mathbf{D}: m \times r$$

Dans le cas d'un procédé physique, la matrice **D** est nulle car il ne peut y avoir de transmission directe. Par contre, un régulateur possède habituellement une transmission directe.

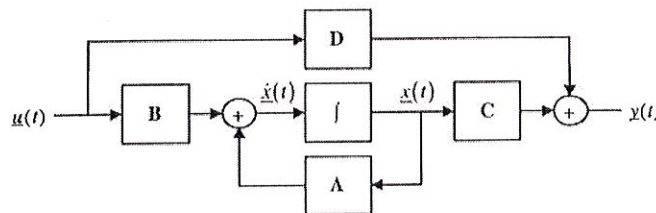


Figure 4.3. Représentation d'état générale d'un système multivariable

Exemple 4.2

Soit un procédé d'ordre 2 monovariante et le contrôleur PI associé tel que donné à la figure 4.4. La représentation d'état du système global (procédé avec contrôleur) est donnée à la figure 4.5 et les équations d'états sont:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_2} - K \frac{K_c}{a_2} & -\frac{1}{a_2} & \frac{K}{a_2} \\ -K_c K_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{a_2} K_c \\ \frac{K}{K_c K_c} \end{bmatrix} R(s)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -K_c & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_c \end{bmatrix} R(s)$$

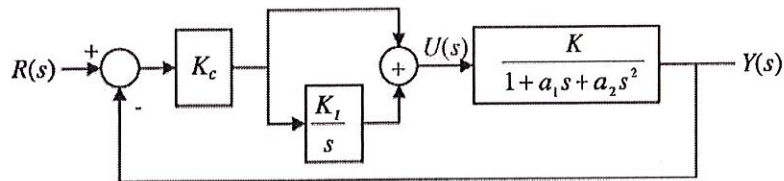


Figure 4.4. Procédé et contrôleur PI

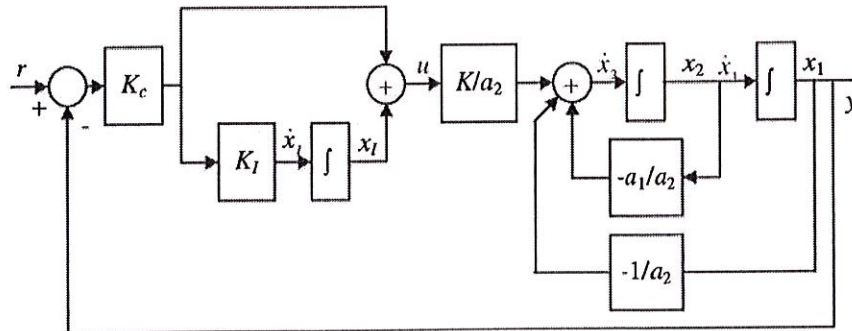


Figure 4.5. Représentation d'état (procédé avec contrôleur PI)

4.3. Systèmes discrets, équations récurrentes et représentation d'état discrète

4.3.1. Introduction

Dans les systèmes continus, l'élément de base est l'intégrateur. Dans les systèmes discrets, l'élément de base est le retard d'une période d'échantillonnage. Dans cette section, le lien entre l'équation récurrente, la transformée en « z » et la représentation d'état discrète est fait. De plus, les différentes formes canoniques d'équations d'états discrètes sont étudiées.

Exemple 4.3.

Soit les transformée en « z » du procédé suivant:

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Par manipulation algébrique, on obtient:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1)$$

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) + b_1 z^{-1} U(z)$$

Le diagramme d'état est montré à la figure 4.6 en prenant $x_1(k) = y(k)$.

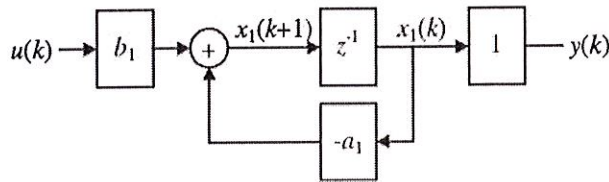


Figure 4.6. Représentation d'un système de 1^{er} ordre

L'équation d'état est:

$$x_1(k+1) = -a_1 x_1(k) + b_1 u(k)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Cette équation est de la forme:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}u(k) \quad [4.3]$$

$$y(k) = \underline{C}\underline{x}(k) + \underline{D}u(k) \quad [4.4]$$

4.3.2. Forme canonique observable (polynôme en z^{-1})

La fonction de transfert qui amène à une représentation d'état sous forme canonique observable est donnée par:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \quad [4.5]$$

Par manipulation algébrique on obtient:

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) - \dots + b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots \quad [4.6]$$

Le diagramme de cette équation est donné à la figure 4.7

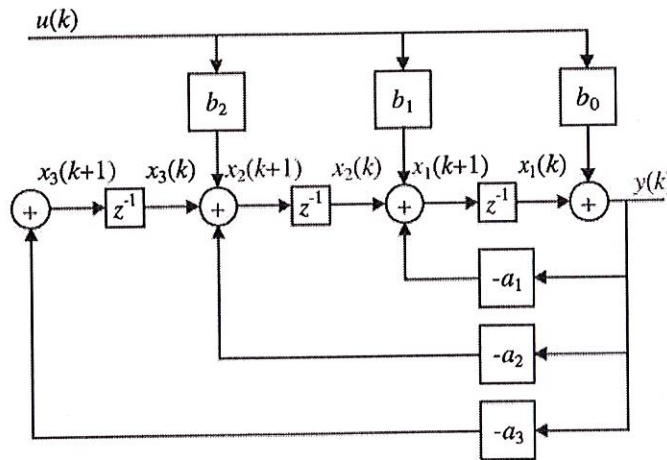


Figure 4.7. Représentation d'état sous forme canonique observable

En définissant les variables d'états tel que montré à la figure 4.7, on obtient l'équation suivante:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ -a_3 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad [4.7]$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad [4.8]$$

Cette équation est la représentation sous forme canonique observable d'un système. Les retours d'états proviennent tous de la sortie et sont ramenés à chacune des variables d'états. La matrice d'observation est unitaire et la matrice A est constituée d'une colonne provenant des paramètres de l'équation caractéristique d'une matrice unitaire d'ordre $n-1$ et d'une ligne d'ordre $n-1$ avec éléments nuls.

4.3.3. Forme canonique gouvernable (polynôme en z^n)

La fonction de transfert qui amène à une représentation d'état sous forme canonique gouvernable est donnée par:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + \dots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + z^n} \quad [4.9]$$

En prenant la variable intermédiaire $Y_1(z)$ définit par:

$$Y_1(z) = \frac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + z^n} \cdot U(z) \quad [4.10]$$

on obtient:

$$z^n Y_1(z) = -a_0 Y_1(z) - a_1 z Y_1(z) - \dots + U(z) \quad [4.11]$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \cdot Y_1(z) \quad [4.12]$$

On obtient alors le diagramme de la figure 4.8. En définissant les variables d'états tel que montré à cette figure, on obtient l'équation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad [4.13]$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad [4.14]$$

Ceci est la représentation sous forme gouvernable. Les retours d'états sont tous ramenés à l'entrée du procédé et la matrice \mathbf{B} est unitaire. La matrice d'évolution \mathbf{A} est constituée d'une ligne provenant des paramètres de l'équation caractéristique d'une matrice unitaire d'ordre $n-1$ et d'une colonne d'ordre $n-1$ avec éléments nuls.

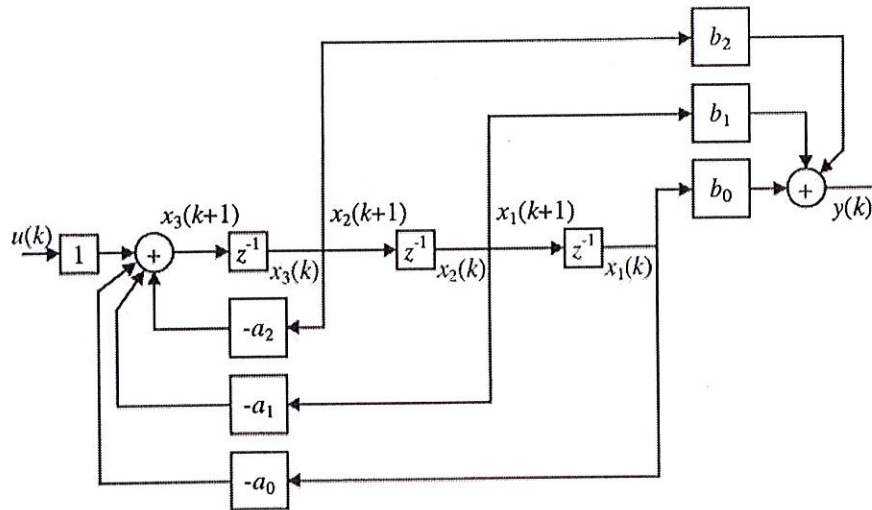


Figure 4.8. Représentation d'état sous forme canonique gouvernable

Exemple 4.4.

Lorsque des perturbations agissent sur le procédé, on obtient alors le diagramme d'état de la figure 4.9.

L'équation d'état du système multivariable est alors donnée par:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1(k) \\ P_2(k) \\ P_3(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

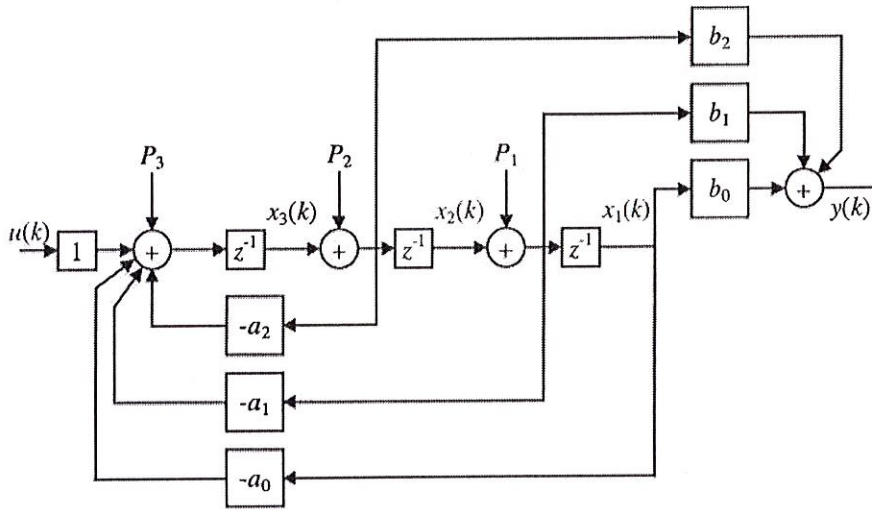


Figure 4.9. Représentation d'état d'un procédé avec perturbations sous forme canonique gouvernable

Ici, on a un système multivariable à 4 entrées dont une seule est manipulable et une sortie.

4.3.4. Forme canonique diagonale

La fonction de transfert qui amène à une représentation d'état sous forme canonique diagonale est donnée par:

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} + \frac{b_2 z^{-1}}{1 + a_2 z^{-1}} + \frac{b_3 z^{-1}}{1 + a_3 z^{-1}} \quad [4.15]$$

En prenant comme variables intermédiaires les sorties $Y_1(z)$, $Y_2(z)$ et $Y_3(z)$ des sous-systèmes, on obtient:

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y_1(z) - a_2 z^{-1} Y_2(z) - a_3 z^{-1} Y_3(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-1} U(z) + b_3 z^{-1} U(z) \quad [4.16]$$

On obtient alors le diagramme de la figure 4.10. En définissant les variables d'états tel que montré à cette figure, on obtient l'équation d'état suivante:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(k) \quad [4.17]$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad [4.18]$$

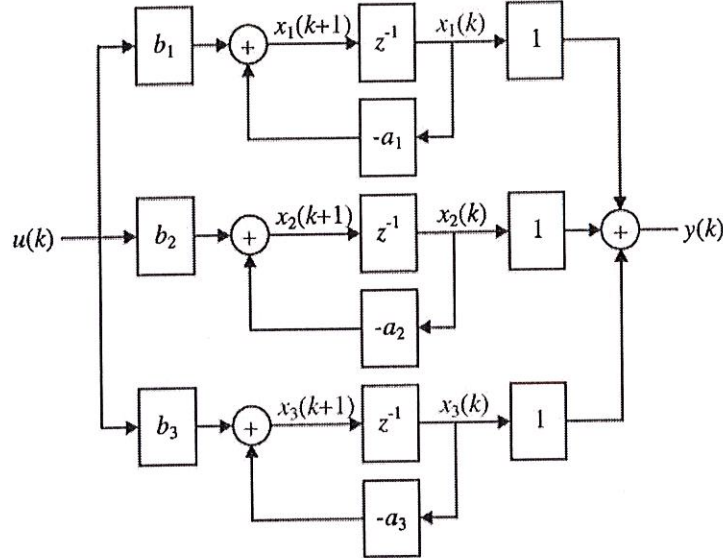


Figure 4.10. Représentation d'état sous forme diagonale

4.3.5. Procédés avec retard

Ici, l'étude porte sur le cas où le retard est un multiple de la période d'échantillonnage.

Exemple 4.5.

Soit le procédé suivant :

$$G(z) = \frac{(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

L'équation récurrente est:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-3) + b_2 u(k-4)$$

Une représentation d'état possible est donnée à la figure 4.11.

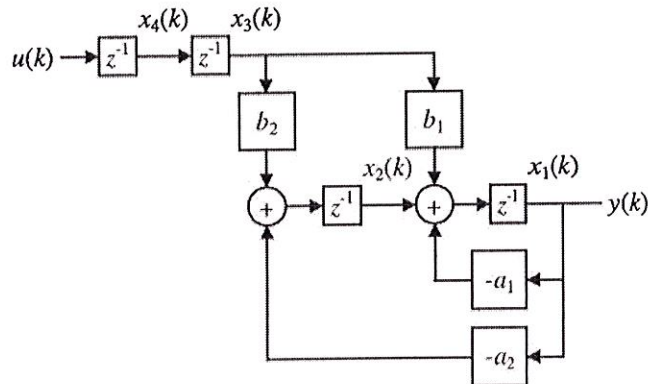


Figure 4.11. Diagramme d'état d'un procédé avec retard de 2 périodes d'échantillonnage

L'équation d'état du système est:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & b_1 & 0 \\ -a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

On constate que le nombre d'états augmente avec le nombre de retards multiple de la période d'échantillonnage et qu'un compromis doit être fait entre la période d'échantillonnage et la complexité de la représentation.

4.3.6. Procédé multivariable

Exemple 4.6.

Soit le procédé multivariable suivant montré à la figure 4.12. :

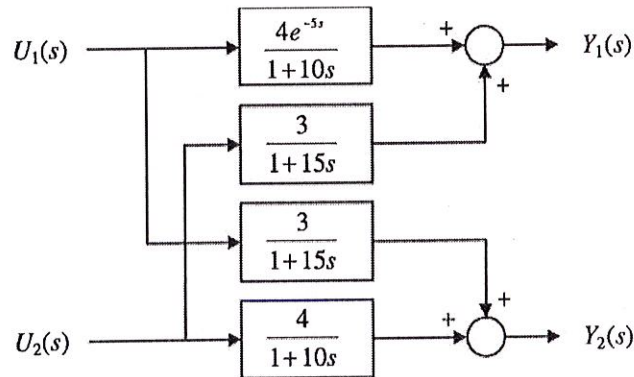


Figure 4.12. Système multivariable

Son équivalent en « z » incluant les bloqueurs d'ordre zéro et les retards pour une période d'échantillonnage de 2.5 s est montré à la figure 4.13. :

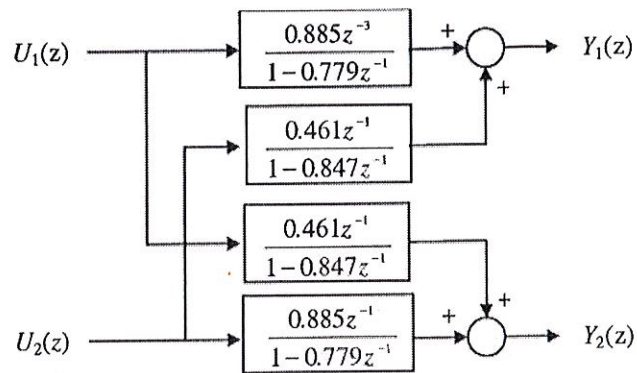


Figure 4.13. *Système multivariable sous représentation discrète*

Le diagramme d'état du système où chacune des fonctions monovariées est donnée sous forme canonique observable est montrée à la figure 4.14.

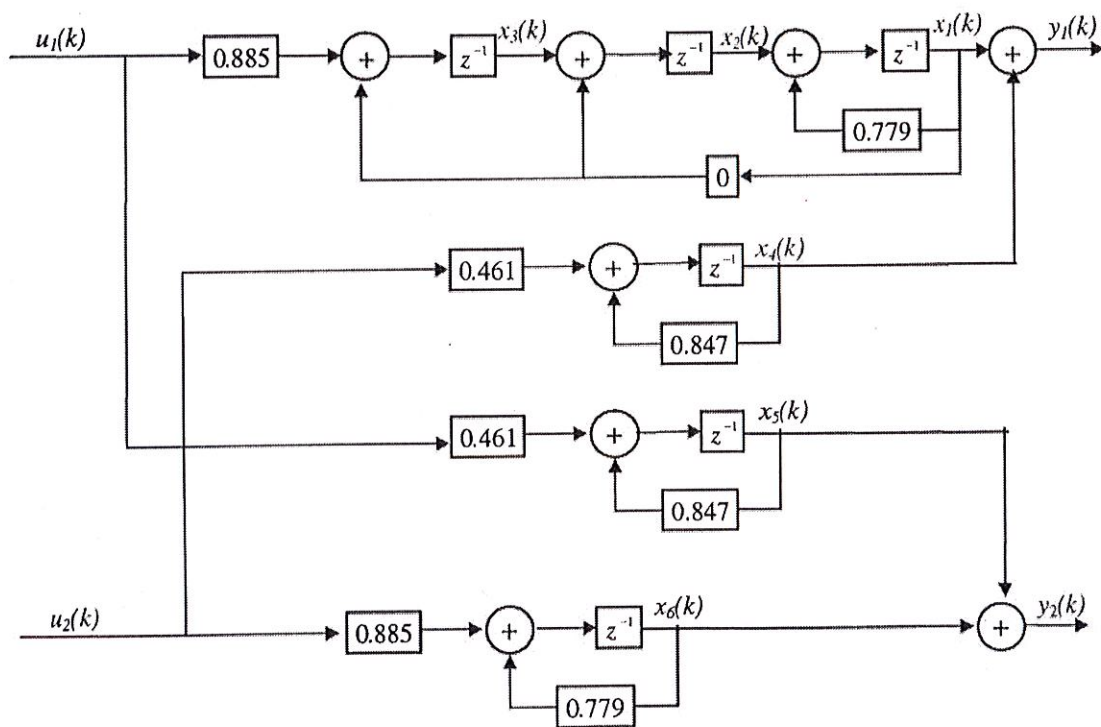


Figure 4.14. *Diagramme d'état d'un procédé multivariable*

L'équation d'état du système est donné par :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.779 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.846 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.779 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.885 & 0 \\ 0.461 & 0 \\ 0 & 0.461 \\ 0 & 0.885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

4.3.7. Réduction du nombre d'états

Pour les procédés multivariables, le nombre d'états peut souvent être réduit lorsqu'il y a des retards communs ou des constantes de temps communes à une entrée ou à une sortie. Des théorèmes mathématiques à partir du calcul matriciel existent pour réduire ce nombre d'états mais il est beaucoup plus simple de faire la réduction à partir de la manipulation de diagrammes fonctionnels. L'exemple suivant met en évidence cette approche.

Exemple 4.7.

Soit le procédé multivariable dont le diagramme est représenté à la figure 4.15a. On constate un retard commun et une constante de temps commune à l'entrée U_1 . Pour une période d'échantillonnage 25 s, on réduit alors le nombre d'états de 10 à 6 par la mise en évidence de facteurs communs tel que montré à la figure 4.15b.

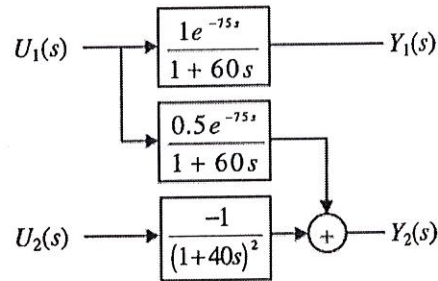


Figure 4.15a. Système multivariable

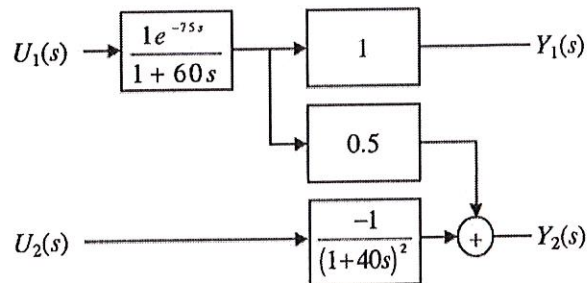


Figure 4.15b. Système multivariable (réduction du nombre d'états)

Le diagramme fonctionnel du système numérique incluant les bloqueurs d'ordre zéro et les retards sont donnés à la figure 4.16.

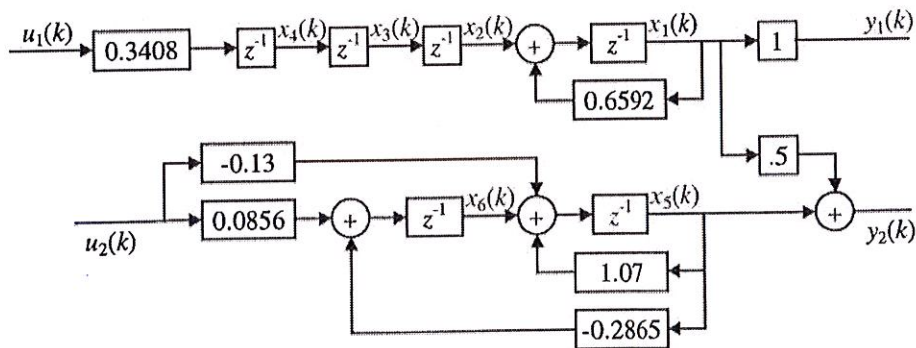


Figure 4.16. Diagramme d'état du procédé multivariable

L'équation d'état est donné par:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6592 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2865 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.3408 & 0 \\ 0 & -0.13 \\ 0 & 0.0856 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix}$$