

定义 4.1 R 是 A 到 B 一个确定的二元关系，那么 R 是 $A \times B$ 的一个子集 $R = \{(x, y) \in A \times B\}$ 的子集

$$\begin{cases} xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \\ xRy \Leftrightarrow (x, y) \notin R \end{cases}$$

“模 3 同余”： $\%3 = \text{same}$

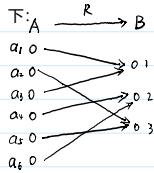
例 3：设 A 和 B 是两个集合，那么 $A \times B$ 的子集 \emptyset 和 $A \times B$ 自身是 A 到 B 的两个二元关系，分别称为空关系和全关系。

关系的表示法

1. 集合表示法 {枚举法 | 叙述法}

2. 关系图法(有向图表示法)

2) 设 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_6\}$ 是六个人， $B = \{1, 2, 3\}$ 是三套房间，考虑 A 到 B 之间的一种住宿关系 R ，如 a_i 住房间 j ，则有 $(a_i, j) \in R$ ，现假设： $R = \{(a_1, 1), (a_2, 3), (a_3, 1), (a_4, 2), (a_5, 3), (a_6, 2)\}$ 则此关系 R 的关系图如



3. 关系矩阵表示法

$M_R = (r_{ij})_{n \times m}$ 为关系 R 的关系矩阵/邻接矩阵 (布尔矩阵)

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

关系的性质

定义 4.2 设 R 是 A 上二元关系

1) $\forall x \in A \quad (x, x) \in R$ ，则 R 自反/自反性。

自反

$$\forall x ((x \in A) \rightarrow (x, x) \in R) = 1$$

P.S. 严谨不严谨
2) $\forall x ((x \in A) \rightarrow ((x, x) \in R)) = 1$ ，则 R 反自反/反自反性

结论

任何不是自反的关系未必一定是反自反的关系，反之亦然。即存在既不是自反的也不是反自反的关系。

表现在关系图上：关系 R 是自反的，当且仅当其关系图中每个结点都有环；关系 R 是反自反的，当且仅当其关系图中每个结点都无环。

表现在关系矩阵上：关系 R 是自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为 1；关系 R 是反自反的当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为 0。

定义 4.3 设 R 是 A 上的二元关系

$$1) R \text{ 在 } A \text{ 上对称} \Leftrightarrow \forall x ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (x, y) \in R) \rightarrow ((y, x) \in R) = 1$$

对称

$$2) R \text{ 在 } A \text{ 上反对称} \Leftrightarrow \forall x ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge ((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R) \rightarrow (x = y)) = 1$$

↑

结论

任何不是对称的关系未必一定是反对称的关系，反之亦然。即存在既不是对称的也不是反对称的关系，也存在既是对称的也是反对称的关系。

表现在关系图上：关系 R 是对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；关系 R 是反对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，至多有一条边。

表现在关系矩阵上：关系 R 是对称的当且仅当其关系矩阵为对称矩阵，即 $r_{ij} = r_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ；关系 R 是反对称的当且仅当其关系矩阵为反对称矩阵，即 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ 。

定义 4.4 $\forall x, y, z \in A$ ，如果 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ ，那么 $(x, z) \in R$ ，则称关系 R 是传递的
 R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A) \wedge ((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \rightarrow ((x, z) \in R)) = 1$

传递

mod

$n \bmod d = j$: n 模 d 余 j

xRy 等价 $x \equiv y \pmod{m}$ m 为确定的整数

$n \not\equiv m \pmod{d}$: m 和 n (关于模 d) 是同余的

R 是对称的、自反的、传递的关系，但不是反自反的和反对称的

表现在关系图上：关系 R 是传递的当且仅当其关系图中，任何三个结点 x, y, z (可以相同)

之间，若从x到y有一条边存在，从y到z有一条边存在，则从x到z一定有一条边存在。

表现在关系矩阵上：关系R是传递的当且仅当其关系矩阵中，对任意i,j和k $\in\{1,2,3,\dots,n\}$ ，

若 $r_{ij}=1$ 且 $r_{jk}=1$ ，必有 $r_{ik}=1$ 。

$$\checkmark R_1 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$$

$$X R_2 = \{(1,2), (2,3)\}$$

$$\checkmark R_3 = \{(1,2)\}$$

$$R_4 = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2)\}$$

4. 判断是否具有传递性：

求TA的传递闭包，若与TA相同，则具有传递性。



定义4.5 $R: A \rightarrow B, S: B \rightarrow C$, 则 $R \circ S$ 是从A到C的关系

(R 与 S 的复合/合成关系)

$$R \circ S = \{(x,z) | (x \in A) \wedge (z \in C) \wedge \exists y ((x \in B) \wedge (y \in C) \wedge (y \in S z))\}$$

复合运算

R 与 S 的复合关系（合成关系） $R \circ S$ 也可以用矩阵来表示。设 R, S 都是集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 上的二元关系， $MR = (r_{ij})$, $MS = (s_{ij})$, $M_{RS} = (m_{ij})$ 则 $m_{ij} = MR * MS$ 这里的“*”运算类似矩阵乘法运算，但须将元素间的乘法改成逻辑与，将加法改成逻辑或，即 $m_{ij} = (r_{i1} \wedge s_{1j}) \vee (r_{i2} \wedge s_{2j}) \vee \dots \vee (r_{in} \wedge s_{nj})$

例12:

设 $R = \{(1,2), (3,4), (2,2)\}$
 $S = \{(4,2), (2,3), (3,1)\}$,
分别是定义为从 $A \rightarrow B$ 和从 $B \rightarrow C$ 的关系，
其中 $A = B = C = \{1,2,3,4\}$ 。

- 1) 用集合方法求 $R \circ S, S \circ R, R \circ R, S \circ S$ 。则：
- $R \circ S = \{(1,3), (3,2), (2,3)\};$
 - $S \circ R = \{(4,2), (2,4), (3,2)\};$
 - $R \circ R = \{(1,2), (2,2)\};$
 - $S \circ S = \{(4,3), (2,1)\}.$

2) 用关系图(略)

3) 用关系矩阵

$$M_{RS} = MR * MS$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* 不具交换性，具结合性

例4.13

设 $A = \{a,b,c,d\}, B = \{1,2,3\}$, R 是从 A 到 B 的一个关系，

$$R = \{(a,1), (b,3), (c,2), (d,2)\},$$

则：
 $R^{-1} = \{(1,a), (2,c), (2,d), (3,b)\}$
 $R = \{(a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (c,1), (c,3), (d,1), (d,3)\}.$

■ 如用关系图表示逆关系，则仅将关系图中的有向边的方向改变成相反方向。

■ 如用关系矩阵表示逆关系，则 $M_{R^{-1}} = M_R^T$ 。

关系运算的性质

$$R^0 = I_A = \{(a,a) | a \in A\}$$

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R \neq R \circ R^n \quad !\text{ 不代表满足交换律}$$

$$\text{易证, } R^n \circ R^m = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$$

关系的逆运算

定义4.6 设 R 是一个从集合 A 到集合 B 的二元关系，则从 B 到 A 的关系 $R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$ 称为 R 的逆关系。运算“ -1 ”称为逆运算。注意：关系是一种集合，逆关系也是一种集合，因此，如果 R 是一个关系，则 R^{-1} 和 \bar{R} 都是关系，但 R^{-1} 和 \bar{R} 是完全不同的两种关系，千万不要混淆。

关系运算的性质

定理4.1 $R: A \rightarrow B, S: B \rightarrow C, T: C \rightarrow D$, 则：

$$1) (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$2) (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

证：① 设 $(a,d) \in (R \circ S) \circ T$, 则知至少存在 $c \in C$, 使 $(a,c) \in R \circ S, (c,d) \in T$

又对 $(a,c) \in R \circ S$, 知至少存在 $b \in B$, 使 $(a,b) \in R, (b,c) \in S$

$$\therefore (b,c) \in S, (c,d) \in T$$

$$\therefore (b,d) \in S \circ T$$

$$\therefore (a,d) \in R \circ (S \circ T)$$

同理，设 $(a,d) \in R \circ (S \circ T)$, 则知至少存在 $b \in B$, 使 $(a,b) \in R, (b,d) \in S \circ T$

又对 $(b,d) \in S \circ T$, 知至少存在 $c \in C$ 使 $(b,c) \in S, (c,d) \in T$

$$\therefore (a,d) \in R \circ S, (a,c) \in S$$

$$\therefore (a,c) \in R \circ S, (c,d) \in T$$

$$\therefore R \circ (S \circ T) \subseteq R \circ S \circ T$$

综上， $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

② 采用谓词公式的等价式进行证明。

$$\because (c,a) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (a,c) \in R \circ S$$

任取 c, a , 使 $\Leftrightarrow (\exists b \in B) ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S)$

2) 采用谓词公式的等价式进行证明.

$$\begin{aligned} \because (c, a) \in (R \circ S)^{-1} &\Leftrightarrow (a, c) \in R \circ S \\ \text{任取 } c, a, \text{ 使} &\Leftrightarrow (\exists b \in B) ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S) \\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B) ((b, a) \in R^{-1} \wedge (c, b) \in S^{-1}) \\ \therefore (R \circ S)^{-1} \subseteq (S^{-1} \circ R^{-1}) &\Leftrightarrow (c, a) \in (S^{-1} \circ R^{-1}) \\ \text{同理可证 } (S^{-1} \circ R^{-1}) \subseteq (R \circ S)^{-1} & \\ \therefore (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} & \end{aligned}$$

定理 4.2 设 R, S, T 是集合 A 上的二元关系, 则:

1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

3) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

4) $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

证明: 1) 设任意 $(x, z) \in R \circ (S \cup T)$, 则知

必存在 $y \in A$ 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in (S \cup T)$.

即: $((x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in S) \vee ((x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in T)$

也就是 $((x, z) \in (R \circ S)) \vee ((x, z) \in (R \circ T))$

则有 $(x, z) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$

即 $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$

同理可证 $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$

故 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

2) 设任意 $(x, z) \in R \circ (S \cap T)$, 则知

必存在 $y \in A$ 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in (S \cap T)$

即 $((x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in S) \wedge ((x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in T)$

也就是 $((x, z) \in (R \circ S)) \wedge ((x, z) \in (R \circ T))$

则有: $(x, z) \in ((R \circ S) \cap (R \circ T))$

定理 4.3 1) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

2) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

3) $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^T}$

4) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

5) $(R^{-1})^{-1} = R$.

二元关系的闭包 “缺啥补啥” “过犹不及”

定义 4.7 设 R 是定义在 A 上的二元关系, 如果另有 A 上

的关系 R' 满足:

1) R' 是自反的(或对称的、或可传递的),

2) $R \subseteq R'$,

3) 对 A 上任何其它满足1) 和2) 的关系 R'' , 则:

$R' \subseteq R''$. (表明 R' 的最小性)

则称 R' 为 R 的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包), 分

别记为 $r(R)$ ($s(R)$ 或 $t(R)$)。

定理 4.5 1) $r(R) = R \cup I_A$

2) $s(R) = R \cup R^T$

3) $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

求一个关系的自反闭包,

即将图中的所有无环的节点加上环;

关系矩阵中对角线上的值 r_{ii} 全变为“1”。

求一个关系的对称闭包,

则在图中, 任一对节点之间, 若仅存在一条边, 则加一条方向相反的另一条边;

关系矩阵中则为: 若 $r_{ij} = 1$ ($i \neq j$), 则令 $r_{ji} = 1$ (若 $r_{ji} \neq 1$), 即 $M_s(R) = M_R \cdot M_R^T - 1$.

求一个关系的传递闭包,

则在图中, 对任意节点 a, b, c , 若 a 到 b 有一条边, 同时 b 到 c 也有一条边, 则从 a 到 c 必增加一条边

(当 a 到 c 无边时);

在关系矩阵中, 若 $r_{ij} = 1$, $r_{jk} = 1$, 则令 $r_{ik} = 1$ (若 $r_{ik} \neq 1$).

3) 证明 (数学归纳法)

令 $R' = R^+$, 先证 $R' \subseteq t(R)$

证: 对 $\forall i$, $R^i \subseteq t(R)$

其次, $\because R' = (R \cup R^T)^+ = (R \cup R^T)^* = R^* \cup R^T \subseteq R^+ = R'$

关系闭包表				第 k 次	k=1, 2...
a	a	b	c	d	$\overrightarrow{a \rightarrow a}$
b	0	1	0	0	$\overrightarrow{b \rightarrow b}$
c	0	0	1	0	$\overrightarrow{c \rightarrow c}$
d	0	1	0	1	$\overrightarrow{d \rightarrow d}$

k=1	k=2
0 1 0 1	0 0 0 1
0 0 0 1	1 1 1 1
1 1 1 1	0 1 1 1
0 1 1 1	

3) 证明 (数学归纳法)

令 $R' = R^+$, 先证 $R' \subseteq t(R)$

证: 对 $\forall i, R^i \subseteq t(R)$

$\textcircled{1} i=1 \text{ 时, } R \subseteq t(R)$ 显然成立

$\textcircled{2} i=k \text{ 时, } R^k \subseteq t(R)$, 则当 $i=k+1$ 时, $\forall (x, z) \in R^{k+1} = R^k \circ R$

必须有 $\exists y_1 \in A$ 使 $(x, y_1) \in R^k$ 且 $(y_1, z) \in t(R)$, 又由 $t(R)$ 可传递

$\therefore (x, z) \in t(R)$

故得证.

其次, $\because R' = (RUR^2U\cdots) \circ (RUR^2U\cdots) = RUR^2U\cdots \subseteq R'$

$\therefore R'$ 传递且包含 R .

$\therefore R' \subseteq t(R)$

$\therefore R' = t(R)$

例 4.5 按定义求 $r(R), s(R), t(R)$

【例 4.14】令 R 是 $A=\{1, 2, 3\}$ 上的一个二元关系, $R=\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$, 则

$$r(R)=\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$$

$$s(R)=\{(1,2), (2,3), (3,1), (2,1), (3,2), (1,3)\}$$

求 $t(R)$ 就比较麻烦了, 要先求出 R^1, R^2, \dots , 再求并集. 在这个例子里

$$R^0=\{(1,3), (2,1), (3,2)\}$$

$$R^1=\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

$$R^2=R$$

$$R^3=R^2$$

\vdots

可见 $R^{n+1}=R$, $R^{n+1}=R^0$, $R^n=R^1$ ($n=1, 2, \dots$), 故

$$t(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 = A \times A$$

从这个例题中可以看出 R^* 的计算一般是相当麻烦的. 但在计算 R^* 时可以发现有一定的规律可循, 事实上存在着求 $t(R)$ 的有效方法.

一些约定:

$$R^+ = RUR^2UR^3U\cdots = t(R)$$

$$R^k = I_AUR^2UR^3U\cdots = I_A \cup t(R)$$

定理 4.6 设 A 是 n 个元素的集合, R 是 A 上的二元关系, 则存在正整数 $k (k \leq n)$,

$$\exists t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k$$

【证明】对任何 $(x, y) \in R^k = RUR^2UR^3U\cdots$, 必存在最小正整数 k , 使得 $(x, y) \in R^k$, 这表明存在 A 的元素序列 a_1, a_2, \dots, a_k , 使

$$xRa_1, a_1Ra_2, \dots, a_{k-1}Ra_k$$

不妨设 $x=a_i$, $y=a_k$. 如果 $k > n$, 那么序列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ 中必有元素 $a_i=a_j$, 而 $i < j$, 这就导致

$$a_0Ra_1, a_1Ra_2, \dots, a_{k-1}Ra_k, a_kRa_{j+1}, \dots, a_{k-1}Ra_k$$

这个序列比原有序列短了 $j-i$, 且同时又有 $(x, y) \in R^{j-i}$, 但 $k+i-j < k$, 与 k 的最小性矛盾, 表明只有 $k \leq n$. 因此

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k (k \leq n)$$

• 闭包运算的性质

定理 4.7 设 R_1, R_2 是集合 A 上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$,

则:

$$1) r(R_1) \subseteq r(R_2)$$

$$2) s(R_1) \subseteq s(R_2)$$

$$3) t(R_1) \subseteq t(R_2)$$

定理 4.8 设 R 是集合 A 上的关系, 则:

1) 若 R 是自反的, 则 $s(R), t(R)$ 也是自反的

2) 若 R 是对称的, 则 $r(R), t(R)$ 也是对称的

3) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 也是传递的

• 多重闭包

定义 4.8 1) 集合 A 上的关系的自反对称闭包定义为: $rs(R) = r(s(R))$

2) 集合 A 上的关系的自反传递闭包定义为: $rt(R) = r(t(R))$

3) 集合 A 上的关系的对称传递闭包定义为: $st(R) = s(t(R))$

同理, 我们还可定义 $sr(R), tr(R), ts(R), \dots$

定理 4.9 1) $rs(R) = sr(R)$ (对称闭包)

$$\Rightarrow rt(R) = tr(R)$$

$$3) st(R) \subseteq ts(R)$$

证: 1) $sr(R) = s(RUI_A) = (RUI_A)U(RUI_A)^2$

$$= RUI_AUR^2UI_A$$

$$= (RUR^2)UI_A$$

$$= SRUI_A$$

$$= rs(R)$$

2) $tr(R) = t(RUI_A) = (RUI_A)U(RUI_A)^2U\cdots$

$$= RUI_AUR^2UI_A$$

$$= (RUR^2)UI_A$$

$$= rt(R)$$

设 R, S 是集合 A 上的关系

$$R, S \text{ 是} \begin{cases} \text{自反} \Rightarrow R \circ S \text{ 自反} \\ \text{对称} \Rightarrow R \circ S \text{ 对称} \\ \text{传递} \Rightarrow R \circ S \text{ 传递} \end{cases}$$

可以这样考虑: $R \circ S$ 人为地使运算有了方向,
因此体现多点关系的很难全成立 (自反是整体)

3) $r(R) \subseteq s(R)$

$\because R \in s(R)$ 定理 4.7

$\therefore t(R) \subseteq ts(R)$

又 $ts(R)$ 是对称的

∴ $st(R) = ts(R)$ 定理 4.8

$\therefore st(R) \subseteq ts(R)$