Ch 4 二元关系 关系就是集合

2025年10月23日 17:36

定义4.1 R是A到B一个确定的二元关系，那么R是A×B的一个子集 $R=\{(x,y)\in A\times B\}$ 的子集合

$$\begin{cases} xRy \Leftrightarrow (x,y)\in R \\ x\not R y \Leftrightarrow (x,y)\notin R \end{cases}$$

"模3同余"：?%3 = same

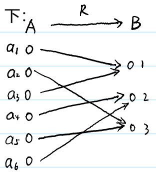
例3：设A和B是两个集合，那么A×B的子集Φ和A×B自身是A到B的两个二元关系，分别称为空关系和全关系。

关系的表示法

1. 集合表示法 $\begin{cases}\text{枚举法}\\ \text{叙述法}\end{cases}$

2. 关系图法（有向图表示法）

2)设A = {a1,a2,a3,...,a6} 是六个人，B = {1，2，3} 是三套房间，考虑A到B之间的一种住宿关系R，如ai住房间j,则有(ai,j)∈R,现假设：R = {(a1,1),(a2,3),(a3,1),(a4,2),(a5,3),(a6,2)} 则此关系R的关系图如下:



3. 关系矩阵表示法

$M_R=(r_{ij})_{n\times m}$ 为关系R的关系矩阵/邻接矩阵（布尔矩阵）

$$r_{ij}=\begin{cases}1,(a_i,b_j)\in R\\ 0,(a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

关系的性质

定义4.2 设R是A上二元关系

1) $\forall x\in A,(x,x)\in R$，则R自反/自反性

$\forall x((x\in A)\to((x,x)\in R))=1$

P.S. 即都不满足

2) $\forall x((x\in A)\to((x,x)\notin R))=1$，则R反自反/反自反性

自反

结论

任何不是自反的关系未必一定是反自反的关系，反之亦然。即存在既不是自反的也不是反自反的关系。

表现在关系图上：关系R是自反的，当且仅当其关系图中每个结点都有环；关系R是反自反的，当且仅当其关系图中每个结点都无环。

表现在关系矩阵上：关系R是自反的，当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为1；关系R是反自反的当且仅当其关系矩阵的主对角线上全为0。

定义4.3 设R是A上的二元关系

对称

1) R在A上对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge((x,y)\in R)\to((y,x)\in R))=1$

2) R在A上反对称 $\Leftrightarrow \forall x\forall y((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(((x,y)\in R)\wedge((y,x)\in R))\to(x=y))=1$

结论

任何不是对称的关系未必一定是反对称的关系，反之亦然。即存在既不是对称的也不是反对称的关系，也存在既是对称的也是反对称的关系。

表现在关系图上：关系R是对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无任何边；关系R是反对称的当且仅当其关系图中，任何一对结点之间，至多有一条边。

表现在关系矩阵上：关系R是对称的当且仅当其关系矩阵为对称矩阵，即rij=rji，i,j=1,2, ...,n；关系R是反对称的当且仅当其关系矩阵为反对称矩阵，即rij·rji=0，i,j=1,2,...,n，i≠j。

定义4.4 $\forall x,y,z\in A$，如果 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，那么 $(x,z)\in R$，则称关系R是传递的

R在A上传递 $\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z((x\in A)\wedge(y\in A)\wedge(z\in A)\wedge(((x,y)\in R)\wedge((y,z)\in R)\to((x,z)\in R)))=1$

传递

mod

n mod d = j：n模d余j

$n\equiv m \pmod d$：m和n（关于模d）是同余的

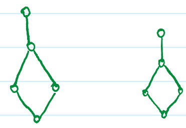
xRy 等价 x≡y(mod m) m为确定的整数

R是对称的、自反的、传递的关系，但不是反自反的和反对称的

表现在关系图上：关系R是传递的当且仅当其关系图中，任何三个结点x,y,z（可以相同）

之间，若从x到y有一条边存在，从y到z有一条边存在，则从x到z一定有一条边存在。

表现在关系矩阵上：关系R是传递的当且仅当其关系矩阵中，对任意i、j和k∈{1,2,3,...,n}，若rij=1且rjk=1，必有rik=1。



√ $R_1=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

× $R_2=\{(1,2),(2,3)\}$

√ $R_3=\{(1,2)\}$

$R_4=\{(1,1),(2,2)\}$

$R_5=\{(1,1),(1,2)\}$

※ 判断是否具有传递性：

求TA的传递闭包，若与TA相同，则具有传递性。

定义4.5 $R: A\to B$，$S: B\to C$，则 $R\circ S$ 是从A到C关系

（R与S的复合/合成关系）

$R\circ S=\{(x,z)\mid (x\in A)\land(z\in C)\land\exists y((y\in B)\land(xRy)\land(ySz))\}$

复合运算

R与S的复合关系（合成关系）R∘S也可以用矩阵来表示。 设R，S都是集合A= {a1，a2，a3，...，an}上的二元关系，MR = (rij)， MS = (sij)，$M_{R\circ S}$ =(mij)则$M_{R\circ S}$=MR*MS 这里的“*”运算类似矩阵乘法运算，但须将元素间的乘法改成逻辑与，将加法改成逻辑或，即 mij=(ri1∧s1j)∨(ri2∧s2j)∨...∨ (rin∧snj)

例12:

设 R={(1,2),(3,4),(2,2)}

S={(4,2),(2,3),(3,1)}，

分别是定义为从A→B和从B→C的关系，其中A=B=C={1,2,3,4}。

1）用集合方法求R∘S，S∘R，R∘R，S∘S。则：

R∘S={(1,3),(3,2),(2,3)}；

S∘R={(4,2),(2,4),(3,2)}；

R∘R={(1,2),(2,2)}；

S∘S={(4,3),(2,1)}。

2）用关系图（略）

3）用关系矩阵

$M_{R\circ S}=M_R * M_S$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

※ 不具交换性，具可结合性

例4.13

设A = {a,b,c,d},B = {1,2,3},R是从A到B的一个关系，

R = {(a,1),(b,3),(c,2),(d,2)}，

则： R^{-1} = {(1,a),(2,c),(2,d),(3,b)}

$\bar{R}$ = {(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(c,1),(c,3),(d,1),(d,3)}。

- **如用关系图表示逆关系，则仅将关系图中的有向边的方向改变成相反方向。**
- **如用关系矩阵表示逆关系，则$M_{R^{-1}}=M_R^T$。**

关系的幂

$R^0=I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$

$R^1=R$

$R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n$ ！不代表满足交换律

易证，$R^m\circ R^n=R^{m+n}$，$(R^m)^n=R^{mn}$

关系的逆运算

定义4.6 设R是一个从集合A到集合B的二元关系，则从B到A的关系R-1 = {(b,a) | (a,b)∈R}称为R的逆关系,运算“-1”称为逆运算。注意：关系是一种集合，逆关系也是一种集合，因此，如果R是一个关系，则R-1和$\bar{R}$都是关系，但R-1和$\bar{R}$是完全不同的两种关系，千万不要混淆。

★ 关系运算的性质

定理4.1 $R: A\to B$ $S: B\to C$ $T: C\to D$，则：

1) $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

2) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

证：1) 设 $(a,d)\in(R\circ S)\circ T$，则知至少存在 $c\in C$，使 $(a,c)\in R\circ S$，$(c,d)\in T$

又对 $(a,c)\in R\circ S$，知至少存在 $b\in B$，使 $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$

∵ $(b,c)\in S$，$(c,d)\in T$

∴ $(b,d)\in S\circ T$

∵ $(a,b)\in R$，$(b,d)\in S\circ T$

∴ $(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$

同理，设 $(a,d)\in R\circ(S\circ T)$，则知至少存在 $b\in B$，使 $(a,b)\in R$，$(b,d)\in S\circ T$

又对 $(b,d)\in S\circ T$，知至少存在 $c\in C$ 使 $(b,c)\in S$，$(c,d)\in T$

∵ $(a,b)\in R$，$(b,c)\in S$

∴ $(a,c)\in R\circ S$

∵ $(a,c)\in R\circ S$，$(c,d)\in T$

∴ $R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$

综上，$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

2) 采用谓词公式的等价式进行证明.

∵ $(c,a)\in(R\circ S)^{-1}\Leftrightarrow(a,c)\in R\circ S$

任取c,a,使

$\Leftrightarrow(\exists b\in B)((a,b)\in R\land(b,c)\in S)$

2) 采用谓词公式的等价式进行证明.

$\because (c,a)\in(R\circ S)^{-1} \Leftrightarrow (a,c)\in R\circ S$

任取c,a,使

$\Leftrightarrow (\exists b\in B)((a,b)\in R\land(b,c)\in S)$

$\Leftrightarrow (\exists b\in B)((b,a)\in R^{-1}\land(c,b)\in S^{-1})$

$\Leftrightarrow (c,a)\in(S^{-1}\circ R^{-1})$

$\therefore (R\circ S)^{-1}\subseteq(S^{-1}\circ R^{-1})$, 同理可证 $(S^{-1}\circ R^{-1})\subseteq(R\circ S)^{-1}$

$\therefore (R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

☆定理4.2. 设R,S,T是集合A上的二元关系,则:

1) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

3) $(S\cup T)\circ R=(S\circ R)\cup(T\circ R)$

4) $(S\cap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\cap(T\circ R)$

证明: 1) 设任意 $(x,z)\in R\circ(S\cup T)$, 则知

必存在 $y\in A$ 使 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in(S\cup T)$.

即: $((x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in S)\lor((x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in T)$

也就是 $((x,z)\in(R\circ S))\lor((x,z)\in(R\circ T))$

则有 $(x,z)\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$

即 $R\circ(S\cup T)\subseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$

同理可证 $(R\circ S)\cup(R\circ T)\subseteq R\circ(S\cup T)$

故 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

2) 设任意 $(x,z)\in R\circ(S\cap T)$, 则知

必存在 $y\in A$ 使 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in(S\cap T)$

即 $((x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in S)\land((x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in T)$

也就是 $((x,z)\in(R\circ S))\land((x,z)\in(R\circ T))$

则有: $(x,z)\in((R\circ S)\cap(R\circ T))$

定理4.3 1) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

2) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

3) $(\overline{R})^{-1}=\overline{R^{-1}}$

4) $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$

5) $(R^{-1})^{-1}=R$.

二元关系的闭包 "缺啥补啥" "过犹不及"

定义4.7 设R是定义在A上的二元关系,如果另有A上的关系R′满足:

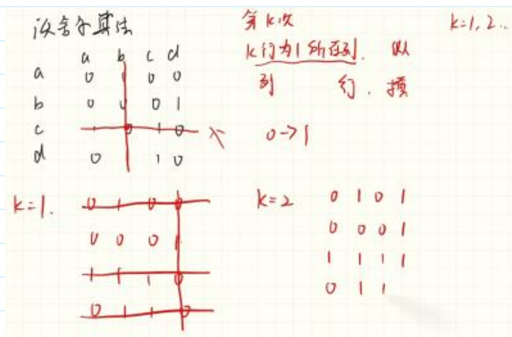
1)R′是自反的(或对称的、或可传递的),

2)R⊂R′,

3)对A上任何其它满足1)和2)的关系R″,则:

R′⊂R″。(表明R′的最小性)

则称R′为R的自反闭包(或对称闭包、或传递闭包),分别记为r(R)(s(R)或t(R))。



☆☆定理4.5 1) $r(R)=R\cup I_A$

2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

3) $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

求一个关系的自反闭包,

即将图中的所有无环的节点加上环;

关系矩阵中对角线上的值rij全变为"1"。

求一个关系的对称闭包,

则在图中,任何一对节点之间,若仅存在一条边,则加一条方向相反的另一条边;

关系矩阵中则为:若有rij = 1(i≠j),则令rji = 1(若rji≠1),即M_s(R) = M_RVM_R^-1。

求一个关系的传递闭包,

则在图中,对任意节点a,b,c,若a到b有一条边,同时b到c也有一条边,则从a到c必增加一条边(当a到c无边时);

在关系矩阵中,若rij = 1,rjk = 1,则令rik = 1(若 rik≠1)。

3) 证明 (数学归纳法)

令 $R'=R^+$, 先证 $R'\subseteq t(R)$

证:对 $\forall i$, $R^i\subseteq t(R)$

其次, $\because R'\circ R'=(R\cup R^2\cup\cdots)\circ(R\cup R^2\cup\cdots)=R^2\cup R^3\cup\cdots\subseteq R'$

3) 证明（数学归纳法）

令 $R'=R^+$，先证 $R'\subseteq t(R)$

证：对 $\forall i$，$R^i\subseteq t(R)$

① $i=1$ 时，$R\subseteq t(R)$ 显然成立

② $i=k$ 时，$R^k\subset t(R)$，则当 $i=k+1$ 时，$\forall(x,z)\in R^{k+1}=R^k\circ R$，必∃ $y\in A$ 使 $(x,y)\in R^k\subseteq t(R)$ 且 $(y,z)\in R\subseteq t(R)$，又 $t(R)$ 可传递

∴必 $(x,z)\in t(R)$

故得证.

其次，∵ $R'\circ R'=(R\cup R^2\cup\cdots)\circ(R\cup R^2\cup\cdots)=R^2\cup R^3\cup\cdots\subseteq R'$

∴ R' 传递且包含 R.

∵ $R'\subseteq t(R)$

∴由传递性，$R'=t(R)$

eg. 按定理4.5求 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$

【例 4.14】 令 R 是 $A=\{1,2,3\}$ 上的一个二元关系，$R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，则

$$r(R)=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$$
$$s(R)=\{(1,2),(2,3),(3,1),(2,1),(3,2),(1,3)\}$$

求 $t(R)$ 就比较麻烦了，要先求出 R^2，R^3，…，再求并集。在这个例子里

$$R^2=\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$$
$$R^3=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$R^4=R$$
$$R^5=R^2$$
$$\vdots$$

可见 $R^{3n+1}=R$，$R^{3n+2}=R^2$，$R^{3n}=R^3(n=1,2,\cdots)$，故

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3=A\times A$$ ■

从这个例题中可以看出 R^i 的计算一般是相当麻烦的。但在计算 R^i 时可以发现有一定的规律可循，事实上存在着求 $t(R)$ 的有效方法。

一些约定：

$R^+=R^1\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=t(R)$

$R^*=I_A\cup R^1\cup R^2\cup\cdots=I_A\cup t(R)$

定理 4.6 设 A 是 n 个元素的集合，R 是 A 上的二元关系，则存在正整数 $k(k\leqslant n)$，

$$\exists t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^k$$

【证明】 对任何 $(x,y)\in R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup\cdots$，必存在最小正整数 k，使得 $(x,y)\in R^k$。这表明存在 A 的元素序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$ 使

$$xRa_1,a_1Ra_2,\cdots,a_{k-1}Ry$$

不妨设 $x=a_0$，$y=a_k$。如果 $k>n$，那么序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中必有元素 $a_i=a_j$ 而 $i<j$，这就导致

$$a_0Ra_1,a_1Ra_2,\cdots,a_{i-1}Ra_i,a_iRa_{j+1},\cdots,a_{k-1}Ra_k$$

这个序列比原有序列短了 $j-i$，且同时又有 $(x,y)\in R^{k+i-j}$，但 $k+i-j<k$，与 k 的最小性相矛盾，表明只有 $k\leqslant n$。因此

$$R^+=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^k(k\leqslant n)$$ ■

- 闭包运算的性质

定理4.7 设 R_1，R_2 是集合A上的关系，且 $R_1\subseteq R_2$，则：

1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$

2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$

3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$

定理4.8 设R是集合A上的关系，则：

1)若R是自反的，则s(R),t(R)也是自反的

2)若R是对称的，则r(R),t(R)也是对称的

3)若R是传递的，则r(R)也是传递的

- 多重闭包

定义4.8 1）集合A上的关系的自反对称闭包定义为： rs(R) = r(s(R))

2）集合A上的关系的自反传递闭包定义为： rt(R) = r(t(R))

3）集合A上的关系的对称传递闭包定义为： st(R) = s(t(R))

同理，我们还可定义sr(R),tr(R),ts(R),…

设 R.S是集合A上的关系

R.S是 { 自反 ⇒ $R\circ S$ 自反；对称 $\not\Rightarrow$ $R\circ S$ 对称；传递 $\not\Rightarrow$ $R\circ S$ 传递 }

可以这样考虑：$R\circ S$ 人为地使运算有3方向，因此体现多点关系的很难全成立（自反是整体关系）

定理4.9

1) $rs(R)=sr(R)$ 对称（穿鞋） 自反（戴帽子） 传递

2) $rt(R)=tr(R)$

3) $st(R)\subseteq ts(R)$

证：1) $sr(R)=s(R\cup I_A)=(R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^{-1}$
$=R\cup I_A\cup R^{-1}\cup I_A$
$=(R\cup R^{-1})\cup I_A$
$=s(R)\cup I_A$
$=rs(R)$

2) $tr(R)=t(R\cup I_A)=(R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^2\cup\cdots$
$=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots$
$=I_A\cup t(R)$
$=rt(R)$

3)
∵ $R\subseteq s(R)$

∴ $t(R)\subseteq ts(R)$ 定理4.7

∴ $st(R)\subseteq sts(R)$

又 $ts(R)$ 是对称的

I_A的对称闭包为I_A本身

∴ $sts(R)=ts(R)$ 定理4.8

∴ $st(R)\subseteq ts(R)$