

Ch 5 特殊关系

2025年11月3日 15:11

5.1 等价关系

(核心思想: 归类分析)

定义5.1 设 R 是定义在非空集合 A 上的一个二元关系, 当 R 同时具有自反、对称和传递性质时, 称 R 是 A 上的一个等价关系。

例5.1:

- 1) 在全体中国人所组成的集合上定义的“同姓”关系, 就是具备自反的、对称的、传递的性质, 因此, 就是一个等价关系;
- 2) 对任何集合 A , 考虑 $R = A \times A$, 则 R 是 A 上的等价关系;
- 3) 三角形的“相似关系”、“全等关系”等都是等价关系;
- 4) 直线的“平行关系”不是等价关系, 因为它们不是自反的。
- 5) 集合上定义的“ \subseteq ”, 整数集上定义的“ \leq ”都不是等价关系, 因为它们不是对称的。
- 6) “朋友”关系, 则不是等价关系, 因它不是传递的。

例5.2:

设 m 为正整数, 考虑整数集合 Z 上的关系如下:

$$R = \{(x, y) | (x, y \in Z) \wedge (m | (x-y))\}$$

证明 R 是一个等价关系。

- 证明: 1) 对任意 $x \in Z$, 有 $m | (x-x)$, 所以 $(x, x) \in R$, 即 R 是自反的。
2) 对任意 $x, y \in Z$, 若 $(x, y) \in R$, 即 $m | (x-y)$, 所以 $m | (y-x)$, 因此, $(y, x) \in R$, 即 R 是对称的。
3) 对任意 $x, y, z \in Z$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 有 $m | (x-y)$ 且 $m | (y-z)$, 所以由 $(x-z) = (x-y) + (y-z)$ 得 $m | (x-z)$, 所以 $(x, z) \in R$ 。即 R 是传递的。

以 m 为模的同余关系 ★

■ 上例中 R 称为 Z 上以 m 为模的同余关系, 一般记 xRy 为:

$$x = y \pmod{m}$$

称为同余式。

此时, R 将 Z 分成了如下 m 个子集:

$$\{\cdots, -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \cdots\}$$

$$\{\cdots, -3m+1, -2m+1, -m+1, m, m+1, 2m+1, 3m+1, \cdots\}$$

$$\{\cdots, -3m+2, -2m+2, -m+2, 2m+2, 2m+2, 3m+2, \cdots\}$$

...

$$\{\cdots, -2m-1, -m-1, -1, m-1, 2m-1, 3m-1, 4m-1, \cdots\}$$

每个元素以 m 为模
其余数均为0

每个元素以 m 为模
其余数均为1

m 整除 $(x-y)$, 即 $(x-y)$ 是 m 的倍数

若证明关系 $R = \{(x, y) | x, y \in Z \wedge (m | (x-y))\}$ 是等价关系, 只要证明等价关系的定义——同时满足自反性、对称性和传递性, 逐一验证即可。

先阅读关键概念

• 整数环 \mathbb{Z} : 所有整数 $\{-\infty, 0, 1, -1, \dots\}$ 的集合。

• $m | (x-y)$, 读作“ m 整除 $(x-y)$ ”, 意思是存在整数 k , 使得 $x-y = m \cdot k$ (即 x 和 y 能被 m 的整数整除, 也叫“ x 与 y 同余”);

• 等价关系定义: 若关系 R 满足以下3个性质, 则为等价关系:

1. 自反性: 对任意 $x \in \mathbb{Z}$, $(x, x) \in R$;

2. 对称性: 对任意 $x, y \in \mathbb{Z}$, 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$;

3. 传递性: 对任意 $x, y, z \in \mathbb{Z}$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 则 $(x, z) \in R$ 。

逐一验证3条性质 (依次证明过程)

1. 验证自反性: 对任意 $x \in \mathbb{Z}$, $(x, x) \in R$

若证 $(x, x) \in R$, 要证 $m | (x-x)$,

因 $x-x=0$, 有 m 能整除0 (即整数 $k=0$, 使得 $0=m \cdot 0$), 故 $m | (x-x)$,

因此, $(x, x) \in R$, 自反性成立。

2. 验证对称性: 若 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R$

已知 $(x, y) \in R$, 根据 R 的定义, 得 $m | (x-y)$,

由“整除的性质”, 看 $m | (y-x)$:

此逆 $m | (x-y)$, 故 $m | ((x-y)-(-y+x))$, 即 $m | (y-x)$,

因此, $(y, x) \in R$, 对称性成立。

3. 验证传递性: 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 则 $(x, z) \in R$

已知 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 根据 R 的定义,

• $m | (x-y)$: 在整数 k_1 , 使得 $x-y = m \cdot k_1$;

• $m | (y-z)$: 在整数 k_2 , 使得 $y-z = m \cdot k_2$;

将两式相加: $(x-y)+(y-z) = m \cdot k_1 + m \cdot k_2$, 化简得

$x-z = m \cdot (k_1 + k_2)$ 。

因 k_1, k_2 是整数, 其和 k_1+k_2 也是整数, 故 $m | (x-z)$,

因此, $(x, z) \in R$, 传递性成立。

结论

关系 R 同时满足自反性、对称性和传递性, 因此 R 是整数集合 Z 上的等价关系。

这个关系其实就是数学中的“模 m 同余关系”, 我可以帮助进一步讲解它的等价类划分(比如 $m=2$ 时, 将整数分为奇数和偶数两类), 需要我展开说明吗?

这 m 个子集具有的特点: 在同一个子集中的元素之间都有关系 R , 而不同子集的元素之间无关系 R 。也就是说, 通过等价关系, 将集合分成若干子集, 使这些子集构成的集合就是 Z 的一个划分。

事实上, 对任意正整数 m , Z 的任意非空子集 A , 关系 $R = \{(x, y) | (x, y \in A) \wedge (m | (x-y))\}$ 都是 A 上的等价关系。

定义5.2 设 R 是集合 A 上的等价关系, 对任意 $a \in A$, 记

$$[a]_R = \{x | (x \in A) \wedge ((x, a) \in R)\},$$
 称 A 的子集合 $[a]_R$ 为关系 R 的一个等价类, 或叫

作由 a 生成的一个 R 等价类。其中 a 称为 $[a]_R$ 的生成元(或叫代表元, 或典型

元)。在不会引起混淆时, 简记为 $[a]$

eg. 5.4 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, 考虑 R 是 A 以3为模的同余关系, 求其等价类

解: 由eg. 5.4, R 为一个等价关系, 为此可求 $[1]_R, [2]_R$

$$[1]_R = \{1, 4\} = [4]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3\}$$



定理5.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

① 对任意 $a, b \in A$, 或者 $[a] = [b]$ 或者 $[a] \cap [b] = \emptyset$;

② $\bigcup [a] = A$

定理5.1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- ① 对任意 $a, b \in A$, 或者 $[a]=[b]$ 或者 $[a] \cap [b]=\emptyset$;
- ② $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

证明: ①任意给定 $a, b \in A$. 若 $[a] \cap [b]=\emptyset$, 则已得证. 若 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, 则存在 A 的元素

$x \in [a] \cap [b]$. 于是 $x \in [a]$ 且 $x \in [b]$, 故有 xRa 且 xRb ; 又由于 R 是对称的, 于是 aRx 且 xRb .

又 R 是传递的, 故 aRb . 因此, 对任意 $y \in [a]$ 必有 yRa 而 aRb , 故 yRb , 即 $y \in [b]$.

因此得到 $[a] \subseteq [b]$. 同理可证 $[a] \supseteq [b]$, 故 $[a]=[b]$.

②显然成立. ■

这个定理告诉我们, 集合 A 上一个等价关系决定了集合元素的一种聚类方式, 即分割集合的方式.

• 集合的划分



例: 设集合 $A=\{a,b,c\}$, 则: $S_1=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,

$S_2=\{\{a,b\}, \{c\}\}$,

$S_3=\{\{a\}, \{b,c\}\}$,

$S_4=\{\{b\}, \{a,c\}\}$,

$S_5=\{\{c\}, \{a,b\}\}$ 都是 A 的分划, 并且由 A 只能产生这5个不同的分划。

定理5.2 设非空集合 A 的每个等价关系都能决定 A 的一个分划, 而 A 的每个分划都能导出 A 上的一个等价关系。

定理5.2建立了集合上等价关系与分划的紧密联系

$$[a] \cap [b] = \emptyset$$

证明: 定理的第一部分结论由定理5.1就可以得到。

对于第二部分, 设 $S=\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_m\}$ 是 A 上的任意一个分划 (现在定义关系 R 如下)

即是说, $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 和 b 同属某个 A_i . 我们证明这样定义的关系 R 是一个等价关系。由于 S 是 A 的分划, 因此对任何 $a \in A$, 皆有 aRa , 即 R 是自反的。如果 aRb , 那么存在 A_i , 使 $(a, b) \in A_i$, 从而又有 bRa , 这说明 R 是对称的。如果同时有 aRb 且 bRc , 且 $(a, b) \in A_i$, $(b, c) \in A_j$. 由于当 $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 所以必然 $A_i = A_j$, 即 $(a, c) \in A_i$, 也就是 aRc 成立。这说明 R 是传递的。因此, R 是由分划 S 导出的一个等价关系。■ (顺序关系) 集合上自反、可传递、反对称类!

定理5.4: 设 R 是集合 A 上的自反的、反对称的、传递的关系, 则称 R 是 A 上的偏序关系(记为 \leq , 读作“小于等于”). 序偶 $\langle A, R \rangle$ 称为偏序集。容易证明: 偏序 \leq 的逆关系 \geq 也是一个偏序, 我们用“ \geq ”表示, 读作“大于等于”。

集合 A 的幂集 2^A 上定义的“ \subseteq ”是偏序关系。 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 是偏序集。

实数集合 R 上定义的“ \leq ”是偏序关系, $\langle R, \leq \rangle$ 是偏序集。

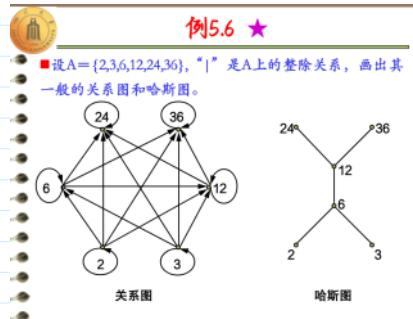
大于零的自然数集合 N^+ 上定义的“整除”关系“|”也是一个偏序关系, $\langle N^+, | \rangle$ 是偏序集。

偏序集的哈斯图

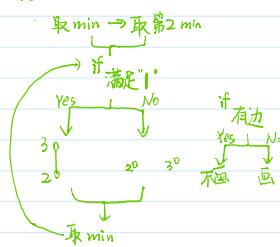
①略去环

② $x \leq y$ 则将 x 画在 y 下方

③ $i \rightarrow j, j \rightarrow k$, 有 $i \rightarrow k$.



※ 程序实现 哈斯图





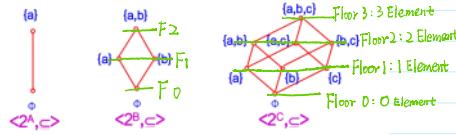
例5.7★

■设集合 $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$ 。分别画出集合A、B、C、D之幂集 2^A 、 2^B 、 2^C 上定义的“ \subseteq ”的哈斯图。

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$



定义5.5 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集, 对任意 $x, y \in A$, 如果 $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 之一成立, 则称 x 与 y 是可比较的。否则, x 与 y 是不可比较的。

沿着 Hasse 图向上走, 碰到就可比。

例5.24

集合 $A = \{a, b, c\}$, 偏序集 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 中, $\{a\}$ 与 $\{a, b\}$ 是可比的, $\{a\}$ 与 $\{b, c\}$ 不是可比的。

偏序集 $\langle R, \leq \rangle$ 中, 对任意 $x, y \in A$, x 与 y 都是可比的。

偏序集 $\langle Z, \leq \rangle$ 中, 对任意 $x, y \in A$, x 与 y 都是可比的。

偏序集 $\langle N, | \rangle$ 中, 2与3不是可比的; 2与6是可比的; 2与8是可比的; 对任意 $n \in N_+$, 0与 n 是可比的。

§ 5.3 全序集与良序集

定义5.6 如果偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 中任何两个元素都是可比较的, 则称 $\langle A, \leq \rangle$ 是全序集, 称 \leq 为 A 上的一个全序关系。

例: 实数集合上的“ \leq ”关系是全序关系。

定义5.7 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集, $B \subseteq A$ 。如果 $\langle B, \leq \rangle$ 是一个全序子集, 则称 B 为 A 中的一条链。链中元素数目减1称为该链的长度。

例: $\{36, 12, 6, 3\}$ 是偏序集: $\langle \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}, | \rangle$ 的一条长度为3的链。

定义5.8

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, a 是 A 的一个元素。

- 1) 若对任意 $b \in A$, 都有 $b \leq a$, 则称 a 为 A 中的最大元。
- 2) 若对任意 $b \in A$, 都有 $a \leq b$, 则称 a 为 A 中的最小元。
- 3) 若对任意 $b \in A$, 或者 $b \leq a$, 或者 b 与 a 不可比较, 则称 a 为 A 中的极大元。
(称数闭区间)
- 4) 若对任意 $b \in A$, 或者 $a \leq b$, 或者 b 与 a 不可比较, 则称 a 为 A 中的极小元。

显然, 有限偏序集总存在极大元和极小元。

上下界在子集中取

最值

极值

定义5.9 设 $B \subseteq A$, $a \in A$

若对任意 $b \in B$, 都有 $b \leq a$, 则称 a 为 B 的上界。

若对任意 $b \in B$, 都有 $a \leq b$, 则称 a 为 B 的下界。

若元素 $c \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a \leq c$, 则称 a 为 B 的最小上界。

若元素 $c \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $c \leq a$, 则称 a 为 B 的最大下界。

回顾所学, 个人理解: 最大最小唯一, 如果不是, 那就“无”
极大极小不唯一, 一定存在, 只要在规定子集中
只要在头上(脚下), 都是上(下界), 只需看范围

■例5.25 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $|$ 是 A 上的整除关系, 则 $\langle A, | \rangle$ 是偏序集, 考虑 A 的子集: $B_1 = \{1, 2, 3, 6\}$, $B_2 = \{2, 3, 5, 7\}$, $B_3 = A$ 。

求出 B_1 , B_2 , B_3 的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。

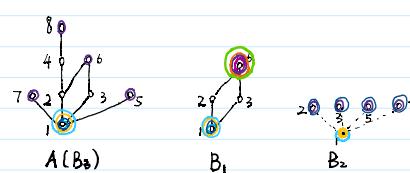
集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	6	1	6	1	6	1	6	1
B_2	无	无	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7	无	1	无	1
B_3	无	1	5, 6, 7, 8	1	无	1	无	1

■最大元(每条路的共同终点) 极大元(每条路的终点, “端点”)

■最小元(每条路的共同起点) 极小元(每条路的起点, “最左”)

■上界(连接所有下一级的终点) 最小上界

■下界(连接所有上一级的起点) 最大下界



■例5.26 设集合 $A = \{a, b, c\}$, 考虑 $P(A)$ 上的关系“ \subseteq ”, 则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是偏序集。求 2^A 的子集: $B_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $B_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$, $B_3 = 2^A$ 的最大(小)元、极大(小)元、最小上界、最大下界。

集合	最小元	极大元	下界	最小元	最大元
B_1	无	无	无	无	无
B_2	无	无	无	无	无
B_3	无	无	无	无	无

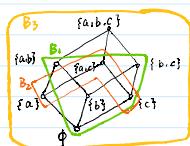
A1: PPT 中关于 B_2 的极大小元这些是正确的。

A2: 你的笔记非常好。按照你的这个思路可以这么理解: 最大元是哈斯图中每一条“路”的共同终点, 最小元是共同起点。但极大、极小就不宜这么解释了。

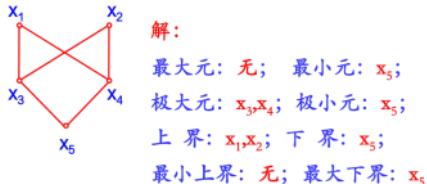
A3: 上界下界、最大下界和最小上界这些你的理解有误。不管是什界, 都是集合 A 中的元素。用我们课堂上说的“教学楼”那个例子来理解: 我们教室中的天花板及其以上的那些都是我们的上界, 显然最小上界就是大家头顶的天花板(在集合 A 中, 不在 B 中)。但是, 假如我们班上有个同学是站在桌子上的, 那么显然他比教室任何人都高, 那他就是最小上界了(这个同学在集合 B 中, 但他也是在集合 A 中)。这样解释你理解没? 下次课我把你这个问题讲一下。

$\{c\}, \Phi\}$, $B_2 = \{\{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$, $B_3 = 2^A$ 的最大(小)元、极大(小)元、最小上界、最大下界。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	最小上界	最大下界
B_1	无	Φ	$\{a,b\}, \{b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ
B_2	$\{a,c\}$	无	$\{a,c\}$	$\{a\}, \{c\}$	$\{a,c\}, \{a,b,c\}$	Φ	$\{a,c\}$	Φ
B_3	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ	$\{a,b,c\}$	Φ



例5.27 设 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, A 上定义偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如下, 求 $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ 的最大(小)元、极大(小)元、上(下)界、最小上界、最大下界。



例5.28

- 集合 $A = \{a, b, c\}$ 上定义的关系
 $R = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, c>, <a, c>\}$
 是一个全序关系, $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如右图。
- 实数集合 R 上定义的“ \leq ”是全序关系, $\langle R, \leq \rangle$ 是全序集。
- 集合 $A = \{a\}$ 的幂集 2^A 上定义的“ \subseteq ”是全序关系, $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 是全序集。若 $|A| \geq 2$, 则 $\langle 2^A, \subseteq \rangle$ 不是全序集。因为分叉。
 $\text{eg. } \{a, b\} \subsetneq \{a\} \subsetneq \{a, b\}$ 不满足全序关系

*用哈斯图判断全偏序集

全序关系的哈斯图必须是线性链结构:

所有节点能按“上下顺序”排成一列, 没有分支, 没有并行节点 (即每个节点最多只有1个直接前驱和1个直接后继)

字典次序 (Lexographical Order) 是模仿字典排序规则的比较算法, 核心逻辑: 1. 从两个序列 (字符串、数组等) 的第一个元素开始逐位对比; 2. 若某位置元素不同, 元素值小的序列整体更小 (元素大小按预设规则定义, 如字符的ASCII码); 3. 若前面所有元素都相同, 长度短的序列整体更小; 4. 若元素完全相同且长度一致, 则两序列相等。

良序关系



定义5.10

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个偏序集, 若 A 的任何一个非空子集都有最小元, 则 “ \leq ” 称为良序关系, 简称良序。

此时 $\langle A, \leq \rangle$ 称为良序集。

由上述定义, 良序集的任何一个非空子集都有最小元, 所以, 对任意 $a, b \in A$, 集合 $\{a, b\}$ 有最小元, 所以有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$, 因此, “ \leq ”一定是全序关系。即:

“ \leq ”是良序关系 \Rightarrow “ \leq ”是全序关系 \Rightarrow “ \leq ”是偏序关系 \Rightarrow 有限全序集 \Rightarrow 良序集

有限偏序集到全(良)序集的转化

在实际问题中, 如程序控制流, 数据分析流中, 有时需要把一个不是全序集的有限偏序集转换为全序集, 或良序集, 这就涉及到由一种偏序关系转变成另一种偏序关系的问题。

定义5.11

设 \leq, \leq' 是集合 A 上的两个偏序关系。如果对 $\forall a, b \in A$, 当 $a \leq b$ 时必导致 $a \leq' b$, 则称关系 \leq, \leq' 是可比较的。

例: ‘整除’和‘小于等于’是自然数集上的两个偏序关系, 而且 ‘|’ 和 ‘≤’ 是可比较的,

对任何 $a, b \in \mathbb{N}$, 当 $a | b$ 时也有 $a \leq b$ 。

注意: 例中的 ‘|’ 是偏序而非全序, ‘≤’ 却是一个全序。

现在问:

对于任何一个有限偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 能否在 A 上定义一个全序 ‘|’ 使 ‘|’ 与 ‘≤’ 可比较?

答案是肯定的, 我们可以通过所谓“拓扑排序”的过程来达到目的。

定义5.12 设 ‘|’ 和 ‘≤’ 是集合 A 上的两个偏序关系, 如果 ‘|’ 和 ‘≤’ 是可比较的, 且 ‘|’ 是全序关系, 则称关系 ‘|’ 是关系 ‘≤’ 的一个拓扑排序。由一个给定的有限偏序集构造全序集的拓扑排序算法: 输入: 偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 输出: 全序集 $\langle A, | \rangle$

定义的全序为: 2 ' 3 ' 6 ' 12 ' 24 ' 36

由拓扑排序定义的全序关系是什么? 完全取决于极小元的选择方法。

如上例中也可以定义为: 3 ' 2 ' 6 ' 12 ' 36 ' 24, (因为在 $\{(2, 3, 6, 12, 24, 36)\}$, ‘|’ 中, 2和3是不可比的) 由此可知:

定理5.3:

任何有限偏序集都可以转变成全序集。

公理集合论中一个很重要的公理, 即关于整数的“良序公理”。

良序公理: 设 X 是 Z 的一个非空子集。如果存在 $a \in Z$, 使得对所有的 $b \in X$, 都有 $a \leq b$, 则 X

从 A 中任选极小元
排最下面
直到都选出来

中必有一个最小整数。