

Ch 1 命题逻辑

iff: if and only iff (当且仅当)

2025年9月8日 16:13

数理逻辑 强调推理，不考虑特定语句正误

命题逻辑又称、命题演算，或 语句逻辑。

定义 1.1 能够确切判断其结论是真是假的陈述句称为 **命题**。该命题可以取一个“值”，称为 **真值**。 $\begin{cases} \text{真 } T \\ \text{假 } F \end{cases}$

根据现有信息。

eg. 这菜辣了, X 无法判断 今天是十月一日 V

$$|1+1|=1000 \times$$

| 非陈述语句都不是命题

| 不能判断真假的陈述句叫悖论

定义 1.2 用一个具体的命题代入命题逻辑符号 P 的过程，称为对 P 的 **解释** 或 **赋值**（指派）

确定：命题常元（是命题）
不确定：命题变元（不是命题）（简单命题）

定义 1.3 凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题称为 **原子命题**，反之称为 **复合命题**。与原子命题对应的命题称谓符叫做 **原子命题变元**。

① 否定连接词 \sim （非）

* 命题中有“不”“非”等有否定含义，一定要体现出 \sim

② 合取 \wedge （与）
逻辑乘 不是所有都 $\begin{cases} \text{既...又} \\ \text{不仅...而且} \\ \text{虽然...但是} \end{cases}$ 和

③ 演取 \vee （或） eg. 李明与王冬是同学；TA打开书并开始读
逻辑加 eg. 我上街去书店或去看电影

④ 排斥或 ∇ （不可兼或）
(异或) eg. 我坐第三排或第四排

· 教室里有 30 或 40 人，“大约”的意思

⑤ 条件 \rightarrow （则）

P 前件	Q 后件	$P \rightarrow Q$
0	0	$\begin{cases} P \text{ 是 } Q \text{ 必要条件} \\ Q \text{ 是 } P \text{ 充分条件} \end{cases}$
0	1	$\begin{cases} \text{可允许 } P, Q \text{ 之间} \\ \text{无因果关系} \end{cases}$
1	0	$\begin{cases} \text{如 } P \text{ 则 } Q \\ \text{只要 } P \text{ 就 } Q \\ P \text{ 仅当 } Q \\ \text{只有 } Q \text{ 才 } P \\ \text{除非 } Q \text{ 否则 } \sim P \end{cases}$
1	1	1

或 $\begin{cases} \text{可兼或 } \vee \\ \text{不可兼或 } \nabla \\ \text{近似或 } \approx \end{cases}$

$P \rightarrow Q$ $\begin{cases} Q \rightarrow P \text{ 逆命题} \\ \sim P \rightarrow \sim Q \text{ 反命题} \\ \sim Q \rightarrow \sim P \text{ 逆反命题} \end{cases}$

一个类似的比方：生活中大家希望的是既合理又合情。但机器不知道命题的文字含义，只能根据形式（即推理规则、公式描述规则等）来推理，只能够保证推理的过程正确即可，因此有可能得出人看起来很不合逻辑的结论（典型例子就是：我没有买到鱼，但我吃鱼），也就是说合理但不一定合情。

⑥ 双条件 \leftrightarrow

（同或）
充分必要

约定：优先级： $\sim > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$

小结：联结词是 **句子真值与句子真值** 之间的联结，与 **句子内容无关**

设命题 P：明天上午七点下雨； 3) 如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校。
Q：明天上午七点下雪；
R：我将去学校。
解：可符号化为： $(P \vee Q) \rightarrow \sim R$ 。

4) 明天上午我将雨雪无阻一定去学校。

设：可符号化为： $\sim(P \wedge Q) \rightarrow R$ 。
解：可符号化为： $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge R) \vee (\sim Q \wedge R)$ 。
或 $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$ 。
 $\sim(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge R)$ 。
不能写成 R 。（缺信息）

设命题 P：你陪伴我；
Q：你代我叫车子；
R：我将出去。

符号化下述语句：
(1). 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。
(2). 如果你陪伴我并且代我叫车子，则我将出去。
(3). 如果你不陪伴我或不代我叫车子，我将不出去。

解：句子(1)可符号化为：

$R \rightarrow (P \vee Q) \text{ 或 } \sim(P \vee Q) \rightarrow \sim R$ 。

句子(2)可符号化为： $(P \wedge Q) \rightarrow R$ 。

句子(3)可符号化为： $(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow R$ 。

定义 1-2-1 命题公式 / 公式 合适公式：无歧义的公式

1) 命题变元（原子命题变元）本身是一个公式

2) 如 P, Q 是公式， $\sim P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$ 也是公式

定义 1-2-1 命题公式 / 公式

后边公入：无意义的公式

1) 命题变元（原子命题变元）本身是一个公式

2) 如 $P \cdot Q$ 是公式, $\sim P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ 也是公式

3) 命题公式 仅由 有限步 使用 1-2 后产生的结果

定义 1-2-2 子公式

定义 1-2-3 命题变元的真值 \rightarrow 公式的解释 I

n^t

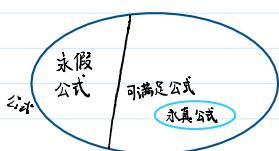
2^n

定义 1-2-4 公式 G 在解释 I 下 $\begin{cases} \text{真} & I \text{ 满足 } G \\ \text{假} & I \text{ 不满足 } G \end{cases}$

将公式 G 在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为真值表

定义 1-2-5 永真公式 / 真言式

永假公式 / 矛盾式 / 不可满足公式



判断永真式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{置换/代换/代入法则} \\ \text{公式推演法} \end{array} \right.$

置换定理：永真的任何置换实例仍是一个永真式

定义 1-3-1 在任意 I 下, $G \Leftrightarrow H$ 真值相同 $\Rightarrow G \Leftrightarrow H$ 等价, 记作 $G \Leftrightarrow H$

定理 1-3-2 公式 G, H 等价的充要条件是公式 $G \Leftrightarrow H$ 是永真公式

用计算机证明：充分性： \because 公式 $G \Leftrightarrow H$ 等价

计算真值表

$\therefore G \Leftrightarrow H$

\therefore 由定义, 对任何解释公式 G 和 H 取相同的真值

$\therefore G \Leftrightarrow H$ 恒取真值 1.

$\therefore G \Leftrightarrow H$ 是永真式

必要性： $\because G \Leftrightarrow H$ 是永真式

\therefore 对任何解释 G, H 必取相同的真值

$\therefore G \Leftrightarrow H$ 成立



基本等价式—命题定律 Equivalence:

设 G, H, S 是任何的公式, 则:

- 1) $E_1: (G \Leftrightarrow H) \Leftrightarrow (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ (等价)
- 2) $E_2: (G \rightarrow H) \Leftrightarrow (\sim G \vee H)$ (蕴涵)
- 3) $E_3: G \vee G \Leftrightarrow G$ (幂等律)
- 4) $E_4: G \wedge G \Leftrightarrow G$
- 5) $E_5: G \vee (H \wedge S) \Leftrightarrow (G \vee H) \wedge S$ (结合律)
- 6) $E_6: G \wedge (H \vee S) \Leftrightarrow (G \wedge H) \vee S$
- 7) $E_7: G \wedge (H \wedge S) \Leftrightarrow G \wedge (H \wedge S)$ (吸收律)
- 8) $E_8: G \wedge (G \wedge S) \Leftrightarrow G$



基本等价式 (续) :

- 9) $E_{11}: G \vee (H \wedge S) \Leftrightarrow (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ (分配律)
- 10) $E_{12}: G \wedge (H \vee S) \Leftrightarrow (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$
- 11) $E_{13}: G \vee F \Leftrightarrow G$ (同一律)
- 12) $E_{14}: G \wedge T \Leftrightarrow G$
- 13) $E_{15}: G \vee T \Leftrightarrow T$ (零律)
- 14) $E_{16}: G \wedge F \Leftrightarrow F$
- 15) $E_{17}: G \vee \sim G \Leftrightarrow T$ (矛盾律)
- 16) $E_{18}: G \wedge \sim G \Leftrightarrow F$
- 17) $E_{19}: \sim (\sim G) \Leftrightarrow G$ (双重否定律)
- 18) $E_{20}: (G \wedge H) \wedge S \Leftrightarrow G \wedge (H \rightarrow S)$ (输出律) ✓ “没有条件, 便创造条件” “万事俱备”
- 19) $E_{21}: (G \vee H) \Leftrightarrow (\sim G \wedge H) \vee (G \wedge \sim H)$ (排中律)
- 20) $E_{22}: P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$ (逆反律) ✓
- 21) $E_{23}: \sim (G \vee H) \Leftrightarrow \sim G \wedge \sim H$ (De Morgan 定律)
- 22) $E_{24}: \sim (G \wedge H) \Leftrightarrow \sim G \vee \sim H$

重要例题 (通常不使用真值表)

2) 公式推演 (等价变换)

例 3.1: 试证 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$

证: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ 蕴涵 E_2

$\Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ 双重否定 E_{19}

$\Leftrightarrow \sim Q \vee \sim P$ 交换律 E_5

$\Leftrightarrow Q \rightarrow \sim P$ E_2

证明 $P \vee \sim ((P \vee \sim Q) \wedge Q)$ 是永真公式。

证: 原式 = $P \vee \sim (P \wedge \sim Q) \vee \sim Q$

= $P \vee P \wedge \sim Q \vee \sim Q$

= $(P \vee P) \wedge (Q \vee \sim Q)$

= $T \wedge I$

= 1

证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

证: 原式 = $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \sim P \vee (Q \rightarrow R)$

= $\sim P \vee \sim Q \vee R$

= $(\sim P \vee \sim Q) \vee R$

= $\sim (P \wedge Q) \vee R$

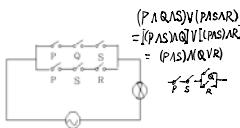
= $(P \wedge Q) \rightarrow R$

试证明 $(P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \Leftrightarrow P$

证明:

$\Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \sim (Q \vee R)) \Leftrightarrow P \wedge T \Leftrightarrow P$

试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。



试将下图所示之逻辑电路简化。



试证明:

$(\sim P \wedge (\sim Q \wedge R)) \vee ((Q \wedge R) \vee (P \wedge R)) \Leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow ((\sim P \wedge \sim Q) \wedge R) \vee ((Q \wedge P) \wedge R)$

$\Leftrightarrow ((\sim Q \wedge P) \wedge R) \vee ((Q \wedge P) \wedge R)$

$\Leftrightarrow T \wedge R \Leftrightarrow R$

将下面一段程序简化:

If A&B then

If C&V then

X

Else

Y

End

执行程序段 X 的条件为

$((A \wedge B) \wedge (B \vee C)) \vee (\sim (A \wedge B) \wedge \sim (A \wedge C))$

$\Leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B \wedge C)$

执行程序段 Y 的条件为

$((A \wedge B) \wedge \sim (B \vee C)) \vee (\sim (A \wedge B))$



对偶式：A中的“V与Λ”，“T与F”互换，得A对偶式A*

引理(定理1-3-3) $\sim A(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\sim P_1, \dots, \sim P_n)$

证明: De Morgan: $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

又: $\sim T \Leftrightarrow F, \sim F \Leftrightarrow T$

∴对公式的否定可以直接作用到原子本身。

$\therefore \sim A(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\sim P_1, \dots, \sim P_n)$

对偶定理: $(A \Leftrightarrow B) \rightarrow (A^* \Leftrightarrow B^*)$

证明: 设 $A(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, \dots, P_n)$. 于是 $A(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, \dots, P_n)$ 是永真式

$\therefore A(\sim P_1, \dots, \sim P_n) \Leftrightarrow B(\sim P_1, \dots, \sim P_n)$

$\therefore A(\sim P_1, \dots, \sim P_n) \Leftrightarrow B(\sim P_1, \dots, \sim P_n)$

$\therefore A^*(P_1, \dots, P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, \dots, P_n)$

定义1-4.1 $P \uparrow Q$: 与非; $P \downarrow Q$: 或非 $P \leftrightharpoons Q$: 条件否定

$\sim(P \wedge Q)$ $\sim(P \vee Q)$ $\sim(P \rightarrow Q)$

定义1-4.2 功能完备集, 最小功能完备集

$\{\uparrow\}$
 $\{\downarrow\}$
 $\{\sim, \vee\}$
 $\{\sim, \wedge\}$
 $\{\sim, \rightarrow\}$

- ① $P \uparrow P \Leftrightarrow \sim(P \wedge P) \Leftrightarrow \sim P$
- ② $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow \sim(P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$
- ③ $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow \sim P \uparrow \sim Q \Leftrightarrow \sim(\sim P \wedge \sim Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
- ④ $P \downarrow P \Leftrightarrow \sim(P \vee P) \Leftrightarrow \sim P$
- ⑤ $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \sim(P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
- ⑥ $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \sim P \downarrow \sim Q \Leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

定义1-5.1 原子公式及其否定都称为句节(正/负句节)

有限个句节组成的析取式称为子句。有限个子句组成的合取式称为合取范式: $(\vee)^n \wedge (\vee)^m$

有限个句节组成的合取式称为短语。有限个短语组成的合取式称为析取范式。 $(\wedge)^n \vee (\wedge)^m$

* $P, \sim P$ 是句节、子句、短语、合取范式、析取范式

$(P \vee Q \vee \sim R)$ 是析取范式、子句 是合取范式、子句

$\sim(Q \vee R)$ 均不是, 但 $\sim Q \wedge \sim R$ 是合取范式

定理1-5.2 (范式存在定理) 任何命题公式都存在与之等价的合取范式与析取范式。

eg. 求 $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$ 的合取范式

解: 原式 $\Leftrightarrow \sim(P \wedge (Q \wedge \sim R)) \vee S$
 $\Leftrightarrow \sim(P \vee S) \wedge (\sim Q \wedge \sim R) \vee S$
 $\Leftrightarrow \sim(P \vee S) \wedge (\sim Q \vee S) \wedge (\sim R \vee S)$

易知一个公式的范式不唯一, 因此要求公式的主范式

定理1-11(3) 在 n 个变元的基本积(短语)中, 若每一个变元与其否定并不同时存在, 且二者之一必出现且仅出现一次, 则称这种基本积为极小项。由有限个极小项组成的析取式称为主合取范式

极大项

极小项与极大项的性质

① 没有两个不同的极小项是等价的, 且每个极小项只有一组真值指派, 使该极小项的真值为真。

② 没有两个不同的极大项是等价的, 且每个极大项只有一组真值指派, 使该极大项的真值为假。

③ $\sim m_i \Leftrightarrow M_i, \sim M_i \Leftrightarrow m_i (i=0, 1, 2, \dots, 2^n - 1)$ 。

④ $M_i \vee M_j = T, m_i \wedge m_j = F (i \neq j; i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\})$ 。

⑤ $\bigvee_{i=0}^{2^n - 1} m_i = T, \bigwedge_{i=0}^{2^n - 1} M_i = F$ 。

⑥ 极大项取值 0 “当且仅当”: 如果极大项中出现的是原子本身, 则原子赋值为 0; 如果出现的是原子的否定, 则原子赋值为 1。

⑦ 当一个极大项在一种解释下取值 0 时, 其余极大项在同一解释下取值 1。

⑧ 极小项取值 1 “当且仅当”: 如果极小项中出现的是原子本身, 则原子赋值为 1; 如果出现的是原子的否定, 则原子赋值为 0。

⑨ 当一个极小项在一种解释下取值 1 时, 其余极小项在同一解释下取值 0。

eg. 求 $G = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 主合取范式 POS 最大和之积

解: $P \quad Q \quad R \quad (P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

eg. 求 $G = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 主合取范式 POS 最大和之积

解: P Q R $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$G = (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$G = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$$



公式转换法:

- 1) 利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的 \rightarrow 、 \leftrightarrow 用联结词 \sim 、 \wedge 、 \vee 来取代;
- 2) 利用德·摩根定律将否定号 \sim 移到各个命题变元的前端;
- 3) 利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。
- 4) 在析取范式的短语和合取范式的子句中, 如同一命题变元出现多次, 则将其化成只出现一次。
- 5) 去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真的子句, 即去掉短语中含有形如 $P \wedge \sim P$ 的子公式和子句中含有形如 $P \vee \sim P$ 的子公式。

- 6) 若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元 P , 则可用公式:

$$(\sim P \vee P) \wedge Q = Q$$

将命题变元 P 补进去, 并利用分配律展开, 然后合并相同的短语, 此时得到的短语将是标准的极小项。

- 7) 若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元 P , 则可用公式:

$$(\sim P \wedge P) \vee Q = Q$$

将命题变元 P 补进去, 并利用分配律展开, 然后合并相同的子句, 此时得到的子句将是标准的极大项。

- 8) 利用幂等律将相同的极小项和极大项合并, 同时利用交换律进行顺序调整, 由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

命题公式的蕴涵

设 A 和 B 是两个合式公式, 如果在任何解释下, A 取值1时 B 也取值1, 则称公式 A 蕴涵公式 B , 并记 $A \Rightarrow B$. (不考虑 A 为0情况)

$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$ 为永真式

蕴涵的性质: 1. 自反性 $A \Rightarrow A$

2. 反对称性 if $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$

3. $A \Rightarrow B$ 且 A 为永真式, 则 B 必为永真式

4. 传递性. if $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$

证: 由已知, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ 为永真式

$$\therefore (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$$

$\therefore A \rightarrow C$ 为永真式

$$\therefore A \Rightarrow C$$

5. if $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$ 反之亦然

证: 由已知, $A \rightarrow B$ 、 $A \rightarrow C$ 都为真

$$\therefore (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \text{ 为真}$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow A \rightarrow (B \wedge C) \text{ 永真}$$

$$\therefore A \Rightarrow B \wedge C$$

6. if $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$, 则 $A \vee B \Rightarrow C$

证: 由已知, $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ 为真

$$\therefore (A \vee B) \rightarrow C \text{ 为真} \dots$$

7. $A \wedge B \Rightarrow C$ 当且仅当 $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.

该性质是推理演算中 CP 规则的基础

证: $\vdash A \wedge B \Rightarrow C$

$\therefore A \wedge B \rightarrow C$ 为真

$$\therefore \neg A \vee \neg B \vee C \Leftrightarrow \neg A \vee (B \rightarrow C) \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) \text{ 为真} \dots$$

$$\therefore A \Rightarrow B \Rightarrow C$$

$$\therefore A \rightarrow (B \rightarrow C) \text{ 为真}$$

必要性

$$\because A \Rightarrow B \Rightarrow C$$

$$\therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \text{ 为真}$$

$$\therefore A \wedge B \Rightarrow C \text{ 为真}$$

$$\therefore A \wedge B \Rightarrow C.$$

8. $A \Rightarrow B$, iff $A \wedge \neg B$ 是矛盾式

定理 1.12:

基本蕴含(关系式)(蕴含定律):

$$I_1: P \Rightarrow P \vee Q, Q \Rightarrow P \vee Q$$

上界 上界 真值操作
扩充实则 $\neg P \Rightarrow P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P \Rightarrow Q$
 \wedge 前取引入律

$$I_2: P \wedge Q \Rightarrow P, P \wedge Q \Rightarrow Q$$

(上界) 前提 $\neg P \Rightarrow Q$ (下界) 后果
化简法则 $\neg(\neg P \vee Q) \Rightarrow P \Rightarrow Q$
 $\neg(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow Q$, $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

$$I_3: S \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

假言推论
 $S, (P \Rightarrow Q), P \Rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge Q) \Rightarrow Q$

$$I_4: \neg Q \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

否定式
假言证法

$$I_5: \neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

析取三段论

$$I_6: (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R$$



假言证法

$$I_7: (P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow R$$

二难推论

$$I_8: (P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)$$

$$I_9: (P \Leftarrow Q) \wedge (Q \Leftarrow R) \Rightarrow P \Leftarrow R$$



$$I_{10}: (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow Q \vee R \quad \text{归结原理}$$

命题逻辑的推理方法:

推理论规则: 1. P 规则 (前提引用规则)

2. T 规则 (逻辑(中间)结果引用规则) 依据 < 假言式 TE

3. CP 规则 (附加前提规则)

\neg 形如 $B \Rightarrow C$ eg. $\neg B \vee C$

① $\neg B \vee C$ P

② $B \Rightarrow C$ TDE

③ B PI(假言证法)

.....

④ C

⑤ $B \Rightarrow C$ CP

【例 1.21】证明 $R \Rightarrow S$ 是 $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow S), \neg R \vee P, Q\}$ 的逻辑结果。

【证明一】直接法

步数	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\neg R \vee P$	P	5	$\neg R \vee \neg Q \vee S$	TDE
2	$R \Rightarrow P$	TDE	6	$Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)$	TDE
3	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow S)$	P	7	Q	P
4	$R \Rightarrow (Q \Rightarrow S)$	T \otimes , ③I	8	$R \Rightarrow S$	T \otimes , ③I

【证明二】利用 CP 规则法

步数	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\neg R \vee P$	P	5	$Q \Rightarrow S$	TDE
2	R	P (附加前提)	6	Q	P
3	P	T \otimes , ②I	7	S	T \otimes , ②I
4	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow S)$	P	8	$R \Rightarrow S$	CP②, ③I

【证明三】反证法

步数	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\neg(R \Rightarrow S)$	P (附加前提)	7	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow S)$	P
2	$R \wedge \neg S$	TDE	8	$Q \Rightarrow S$	T \otimes , ②I
3	R	T \otimes I	9	Q	P
4	$\neg S$	T \otimes I	10	S	T \otimes , ②I
5	$\neg R \vee P$	P	11	F(矛盾式)	T \otimes , ②E
6	P	T \otimes , ③I			

$P \cdot P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
为基础的方块，其实就由子句 P 和 $\neg P \vee Q$ 中消去互反的—对句节 (P 和 $\neg P$) 后得到 Q 的，一般有下述规则：

消解规则 设 C_1 和 C_2 是两个子句，如果 C_1 中有句节 P ， C_2 中有句节 $\neg P$ ，则从 C_1 中消去 P ，从 C_2 中消去 $\neg P$ 后，由剩下的全部句节构成的新取式作为新的子句，称为 C_1 和 C_2 的消解式。例如，设 $C_1 = \neg P \vee Q \vee \neg R$, $C_2 = \neg P \vee R \vee S$ ，它们有两对互反句节 ($\neg P$ 和 P , $\neg R$ 和 R)，消去后则得到消解式 $C_3 = Q \vee S$ 。

利用消解的方法构造证明，首先要将结论的否定作为附加前提，再把由这些前提组成的合取式转化为合取范式，然后以合取范式中的全部子句为对象集使用消解规则。如果在某个步骤导出了矛盾式（称为空子句，记为 \square ），则证明了原蕴涵关系的成立。所以，消解证明法是反证法的一种形式。

【例 1.23】利用消解法，证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow S) \wedge (\neg R \vee P) \wedge Q \wedge (\neg R \rightarrow S)$ 。

【解】首先把结论否定后加入前提中，并构造由前提组成的合取式，再把合取式化为合取范式。其过程如下：

步 数	公 式	使 用规 则	步 数	公 式	使 用规 则
1	$\neg P \vee \neg Q \vee S$		6	$\neg R \vee P$	引 入子句
2	Q	引 用子句	7	$\neg R$	S 和 6 中消除 $\neg P$ 和 P
3	$\neg P \vee S$	1 和 2 中消除 $\neg Q$ 和 Q	8	R	引 用子句
4	$\neg S$	引 用子句	9	\square	导出空子句
5	$\neg P$	3 和 4 中消除 $\neg S$ 和 S			



消解法（原理）（归结推理法）

为了证明 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ ，根据反证法，即只

需证明： $G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H \Rightarrow F$

利用消解规则进行推理，其推理过程为：

① 从 $(G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H)$ 出发。

② 将 $G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H$ 转化成合取范式，如：

$P \wedge (P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$ 的形式。

③ 将合取范式中的所有子句（析取式）构成子句集合 S ，如： $S = \{P, P \vee R, \neg P \vee Q, \neg P \vee R\}$

④ 对 S 使用消解规则：对 S 的子句作归结，即消除互补式（互反对），如子句 $P \vee R$ 与 $\neg P \vee Q$ 作归结，得归结式 $R \vee Q$ 并将这归结式仍放 S 中，重复这一过程。

⑤ 直至归结出矛盾式（称为空子句，记为 \square ）。

因此，其消解过程就是对 S 的子句求消解式的过程。