Ch 1 命题逻辑

iff：if and only if（当且仅当）

2025年9月8日　16:13

数理逻辑 强调推理，不考虑特定语句正误

命题逻辑又称、命题演算，或 语句逻辑．

定义 1.1 能够确切判断其结论是真是假的陈述句称为命题。该命题可以取一个"值"，称为真值。{ 真 1 (T)；假 0 (F) }

根据现有信息，

eg. 这菜辣了．✗ 无法判断　　今天是十月一日 ✓

$11 + 101 = 1000$ ✗

非陈述语句都不是命题

不能判断真假的陈述句叫悖论

定义 1.2 用一个具体的命题代入命题标识符 P 的过程，称为对 P 的解释或赋值（指派）

{ 确定：命题常元（是命题）；非确定：命题变元（不是命题） }

（简单命题）

定义 1.3 凡是不能用联结词分解出更简单的子命题的命题 称为原子命题，反之称为复合命题。与原子命题对应的命题标识符叫做原子命题变元．

① 否定连接词 ~（"非"）

★命题中有"不""非"等有否定含义，一定要体现出 ~

② 合取 ∧（"与"）

└ 逻辑乘　※不是所有与都为 ∧

{ 既…又；不仅…而且；虽然…但是 }　并且　和　与

eg. 李明与王冬是同学；TA打开书并开始读

③ 析取 ∨（"或"）

└ 逻辑加．　eg. 我上街去书店或去看电影

④ 排斥或 $\bar{\vee}$（"不可兼或"）

（异或）　eg. 我坐第三排或第四排

• 教室里有30或40人 → "大约"的意思

或 { 可兼或 ∨；不可兼或 $\bar{\vee}$；近似或 }

⑤ 条件 →（"则"）

P 前件/项　Q 后件/项　$P \to Q$ { P是Q充分条件；Q是P必要条件 }

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

[可允许 P、Q 之间无因果关系]

{ 如P则Q；只要P就Q；P仅当Q；只有Q才P；除非Q否则~P }

$P \to Q$ { $Q \to P$ 逆命题；$\sim P \to \sim Q$ 反命题；$\sim Q \to \sim P$ 逆反命题 }

{ 形式条件 命题；实质条件 命题 }

一个类似的比方：生活中大家希望的是既合理又合情。但机器不知道命题的文字含义，只能根据形式（即推理规则、公式描述规则等）来推理，只能够保证推理的过程正确即可，因此有可能得出人看起来很不合逻辑的结论（典型例子就是：我没有买到鱼，但我吃鱼），也就是说合理但不一定合情。

⑥ 双条件 ↔　{ 当且仅当；充分必要 }

（同或）

约定：优先级：$\sim > \wedge > \vee > \to > \leftrightarrow$

小结：联结词是句子真值与句子真值之间的联结，与句子内容无关

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校。

符号化下述语句：

1）如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校。

解：可符号化为：$\sim(P \wedge Q) \to R$。

2）如果明天上午七点不下雨并且不下雪，则我将去学校。

解：可符号化为：$(\sim P \wedge \sim Q) \to R$。

3）如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校。

解：可符号化为：$(P \vee Q) \to \sim R$。

4）明天上午我将雨雪无阻一定去学校。

解：可符号化为：

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee$

$(P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$。

或 $((P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$

$\vee (\sim P \wedge \sim Q)) \wedge R$。

★ 不能写成 R.（缺信息）

设命题 P：你陪伴我；

Q：你代我叫车子

R：我将出去。

符号化下述语句：

(1)．除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去。

(2)．如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去。

(3)．如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去。

解：句子(1)可符号化为：

$R \to (P \vee Q)$ 或 $\sim(P \vee Q) \to \sim R$。

句子(2)可符号化为：$(P \wedge Q) \to R$。

句子(3)可符号化为：$(\sim P \vee \sim Q) \to \sim R$。

定义 1-2.1 命题公式/公式　　合适公式：无歧义的公式

1) 命题变元（原子命题变元）本身是一个公式

2) 如 P、Q 是公式，$\sim P$、$P \wedge Q$、$P \vee Q$、$P \to Q$、$P \leftrightarrow Q$ 也是公式

定义 1-2.1 命题公式/公式　　合适公式：无歧义的公式

1) 命题变元(原子命题变元)本身是一个公式

2) 如 P、Q 是公式，~P、P∧Q、P∨Q、P→Q、P↔Q 也是公式

3) 命题公式仅由有限步使用 1-2 后产生的结果

定义 1-2.2 子公式

定义 1-2.3　命题变元的真值 → 公式的解释 I

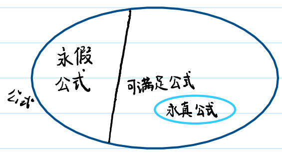
n个　　2^n个

定义 1-2.4　公式 G 在解释 I 下 {真　I 满足 G / 假　I 弄假 G

将公式 G 在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为真值表

定义 1-2.5　永真公式/重言式

永假公式/矛盾式/不可满足公式



判断永真式 {真值表法 / 置换/代换/代入法则 / 公式推演法.

置换定理：永真式的任何置换实例仍是一个永真式

定义 1-3.1　在任意 I 下，G 与 H 真值相同 ⇒ G、H 等价，记作 G⇔H

定理 1-3.2　公式 G、H 等价的充要条件是 公式 G↔H 是永真公式

用计算机证明：计算真值表

充分性：∵ 公式 G、H 等价

∴ G⇔H

∴ 由定义，对任何解释公式 G 和 H 取相同的真值

∴ G↔H 恒取真值 1.

∴ G↔H 是永真式

必要性：∵ G↔H 是永真式

∴ 对任何解释 G、H 必取相同的真值

∴ G⇔H 成立

基本等价式—命题定律 Equivalence：

设 G，H，S 是任何的公式，则：

1) E_1:(G↔H)⇔(G→H)∧(H→G)（等价）

2) E_2: (G→H) ⇔(~G∨H)　（蕴涵）

3) E_3: G∨G ⇔ G　（幂等律）

E_4: G∧G ⇔ G

4) E_5: G∨H ⇔ H∨G　（交换律）

E_6: G∧H ⇔ H∧G

5) E_7: G∨(H∨S) ⇔(G∨H)∨S　（结合律）

E_8: G∧(H∧S) ⇔(G∧H)∧S

6) E_9: G∨(G∧H) ⇔ G　（吸收律）

E_{10}: G∧(G∨H) ⇔ G

基本等价式（续）：

7) E_{11}: G∨(H∧S) ⇔(G∨H)∧(G∨S)　（分配律）

E_{12}: G∧(H∨S) ⇔(G∧H)∨(G∧S)

8) E_{13}: G∨F ⇔ G　（同一律）

E_{14}: G∧T⇔ G

9) E_{15}: G∨T⇔ T　（零律）

E_{16}: G∧F⇔ F

10) E_{17}: G∨~G ⇔ T　（矛盾律）

11) E_{18}: G∧~G ⇔ F

12) E_{19}: ~(~G) ⇔ G　（双重否定律）

13) E_{20}: (G∧H)→S ⇔ G→(H→S)　（输出律）✓ "没有条件，便创造条件" "万事俱备"

14) E_{21}: (G∇H) ⇔(~G∧H)∨(G∧~H)　（排中律）

15) E_{22}: P→Q ⇔ ~Q→~P　（逆反律）✓

16) E_{23}: ~(G∨H) ⇔ ~G∧~H　（De Morgan定律）

E_{24}: ~(G∧H) ⇔ ~G∨~H。

★重要例题（通常不使用真值表）

2）.公式推演（等价变换）

例3.1：试证 P→Q ⇔ ~Q→~P

证：P→Q ⇔ ~P∨Q　蕴涵 E_2

⇔ ~P∨~~Q　双重否定 E_{19}

⇔ ~~Q∨~P　交换律 E_5

⇔ ~Q→~P　E_2

证明 P∨~((P∨~Q)∧Q) 是永真公式。

证：原式 = P∨~(P∨~Q)∨~Q

= P∨~P∧Q∨~Q

= (P∨~P)∧(Q∨~Q)

= 1∧1

= 1

证明 P→(Q→R) ⇔(P∧Q)→R

P→(Q→R) ⇔ ~P∨(~Q∨R)

⇔ (~P∨~Q)∨R

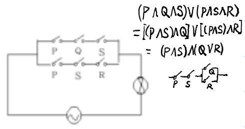
⇔ ~(P∧Q)∨R ⇔ (P∧Q)→R

试证明(P∧(Q∨R))∨(P∧~Q∧~R) ⇔P

证明：

⇔(P∧(Q∨R))∨(P∧~(Q∨R)) ⇔ P∧T ⇔ P

试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。

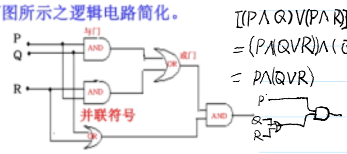


(P∧Q∧S)∨(P∧S∧R)

= [(P∧S)∧Q]∨[(P∧S)∧R]

= (P∧S)∧(Q∨R)

试将下图所示之逻辑电路简化。



[(P∧Q)∨(P∧R)]∧(Q∨R)

= (P∧(Q∨R))∧(Q∨R)

= P∧(Q∨R)

试证明：

(~P∧(~Q∧R))∨((Q∧R)∨(P∧R))⇔R

⇔((~P∧~Q)∧R)∨((Q∨P)∧R)

⇔ (~(Q∨P)∧R)∨((Q∨P)∧R)

⇔ T∧R ⇔ R

将下面一段程序简化：

```
If A∧B then
  If B∨C then
    X
  Else
    Y
End
```

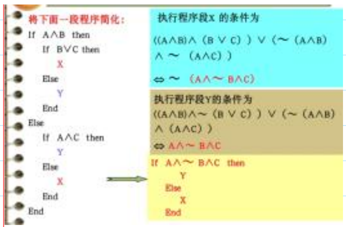
执行程序段X 的条件为

((A∧B)∧(B∨C)) ∨ (~(A∧B) ∧~ (A∧C))

⇔ ~ (A∧~B∧C)

执行程序段Y的条件为

((A∧B)∧~(B∨C)) ∨ (~(A∧B)



对偶式： A中的"∨"与"∧"，"T"与"F" 互换，得 A对偶式 A^*

引理（定理1-3.3） $\sim A(P_1,\cdots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

证明： De Morgan： $\sim(P\vee Q)\Leftrightarrow \sim P\wedge\sim Q$，$\sim(P\wedge Q)\Leftrightarrow \sim P\vee\sim Q$

又： $\sim T\Leftrightarrow F$，$\sim F\Leftrightarrow T$

∴对公式的否定可以直接作用到原子本身.

∴ $\sim A(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

对偶定理：$(A\Leftrightarrow B) \rightarrow (A^*\Leftrightarrow B^*)$

证明： 设 $A(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow B(P_1,\cdots,P_n)$. 于是 $A(P_1,\cdots,P_n)\leftrightarrow B(P_1,\cdots,P_n)$ 是永真式

∴ $A(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)\Leftrightarrow B(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

∴ $A(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)\Leftrightarrow B(\sim P_1,\cdots,\sim P_n)$

∴ $A^*(P_1,\cdots,P_n)\Leftrightarrow B^*(P_1,\cdots,P_n)$

定义1-4.1 $P\uparrow Q$：与非 $\sim(P\wedge Q)$； $P\downarrow Q$：或非 $\sim(P\vee Q)$ $P \overset{c}{\nrightarrow} Q$ 条件否定 $\sim(P\rightarrow Q)$

①$P\uparrow P\Leftrightarrow\sim(P\wedge P)\Leftrightarrow\sim P$
②$(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\sim(P\uparrow Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$
③$(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Leftrightarrow\sim P\uparrow\sim Q\Leftrightarrow\sim(\sim P\wedge\sim Q)\Leftrightarrow P\vee Q$
④$P\downarrow P\Leftrightarrow\sim(P\vee P)\Leftrightarrow\sim P$
⑤$(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)\Leftrightarrow\sim(P\downarrow Q)\Leftrightarrow P\vee Q$
⑥$(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)\Leftrightarrow\sim P\downarrow\sim Q\Leftrightarrow\sim(\sim P\vee\sim Q)\Leftrightarrow P\wedge Q$

定义1-4.2 功能完备集， 最小功能完备集 $\{\uparrow\}$ $\{\downarrow\}$ $\{\sim,\vee\}$ $\{\sim,\wedge\}$ $\{\sim,\rightarrow\}$

定义 1-5.1 原子公式及其否定都称为句节（正/负句节）

有限个句节组成的析取式称为子句。有限个子句组成的合取式称为合取范式。 $(\vee)\wedge(\vee)$

有限个句节组成的合取式称为短语。有限个短语组成的合取式称为析取范式。 $(\wedge)\vee(\wedge)$

※ P. ~P 是 句节、子句、短语、合取范式、析取范式

$(P\vee Q\vee\sim R)$是 析取范式、子句 是合取范式、子句

$\sim(Q\vee R)$ 均不是，但 $\sim Q\wedge\sim R$ 是合取范式

定理 1-5.2（范式存在定理）任何命题公式都存在与之等价的合取范式与析取范式。

eg. 求$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$的合取范式

解： 原式$\Leftrightarrow\sim(P\wedge(\sim Q\vee R))\vee S$ $\vee\wedge\vee$

$\Leftrightarrow\sim(P\vee S)\wedge((Q\wedge\sim R)\vee S)$

$\Leftrightarrow\sim(P\vee S)\wedge(Q\vee S)\wedge(\sim R\vee S)$

易知一个公式的范式不唯一，因此要求公式的主范式

定义1.17(1)(2) 在n个变元的基本积（短语）（子句）中，若每一个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为极小项（极大项）

由有限个极小项（大）组成的析取式（合取式）称为主析取范式（主合取范式）

极小项与极大项的性质

①没有两个不同的极小项是等价的，且每个极小项只有一组真值指派，使该极小项的真值为真。

②没有两个不同的极大项是等价的，且每个极大项只有一组真值指派，使该极大项的真值为假。

③$\sim m_i\Leftrightarrow M_i$，$\sim M_i\Leftrightarrow m_i(i=0,1,2,\cdots,2^n-1)$。

④$M_i\vee M_j=T$，$m_i\wedge m_j=F(i\neq j;\ i,j\in\{0,1,2,\cdots,2^n-1\})$。

⑤$\vee_{i=0}^{2^n-1}m_i=T$，$\wedge_{i=0}^{2^n-1}M_i=F$。

⑥极大项取值0"当且仅当"：如果极大项中出现的是原子本身，则原子赋值为0；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为1。

⑦当一个极大项在一种解释下取值0时，其余极大项在同一解释下取值1。

⑧极小项取值1"当且仅当"：如果极小项中出现的是原子本身，则原子赋值为1；如果出现的是原子的否定，则原子赋值为0。

⑨当一个极小项在一种解释下取值1时，其余极小项在同一解释下取值0。

eg.求 $G=(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$ 主合（析）取范式 POS 最大和之积

解： P Q R $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow R$

eg. 求 $G=(P\to Q)\leftrightarrow R$ 主析取范式 POS 最大和之积

解:

P	Q	R	$(P\to Q)\leftrightarrow R$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$G=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\sim Q\vee R)\wedge(\sim P\vee Q\vee\sim R)\wedge(\sim P\vee\sim Q\vee R)$

$G=(\sim P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(\sim P\wedge Q\wedge\sim R)\vee(P\wedge\sim Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\sim R)$

公式转换法:

1）利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词～、∧、∨来取代;
2）利用德•摩根定律将否定号～移到各个命题变元的前端;
3）利用结合律、分配律、吸收律、幂等律、交换律等将公式化成其等价的析取范式和合取范式。
4）在析取范式的短语和合取范式的子句中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次。
5）去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真式的子句，即去掉短语中含有形如P∧～P的子公式和子句中含有形如P∨～P的子公式。
6）若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元P，则可用公式:
$(\sim P\vee P)\wedge Q=Q$
将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项。
7）若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元P，则可用公式:
$(\sim P\wedge P)\vee Q=Q$
将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项。
8）利用幂等律将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

命题公式的蕴涵

设A和B是两个合适公式，如果在任何解释下，A取值1时B也取值1，则称公式A蕴涵公式B，并记$A\Rightarrow B$.（不考虑A为0情况）

$A\Rightarrow B$ 当且仅当 $A\to B$ 为永真式

蕴涵的性质：1. 自反性 $A\Rightarrow A$

2. 反对称性 if $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，$A\Leftrightarrow B$
3. $A\Rightarrow B$ 且 A为永真式，则B必为永真式
4. 传递性. if $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow C$
   证：由已知，$(A\to B)\wedge(B\to C)$ 为永真式
   又 $(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow A\to C$
   ∴ $A\to C$ 为永真式
   ∴ $A\Rightarrow C$
5. if $A\Rightarrow B$，$A\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow B\wedge C$ 反之亦然
   证：由已知，$A\to B$、$A\to C$都永真
   ∴ $(A\to B)\wedge(A\to C)$永真
   $(A\to B)\wedge(A\to C)\Leftrightarrow(\sim A\vee B)\wedge(\sim A\vee C)\Leftrightarrow\sim A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow A\to(B\wedge C)$ 永真
   ∴ $A\Rightarrow B\wedge C$
6. if $A\Rightarrow C$，$B\Rightarrow C$，则$A\vee B\Rightarrow C$
   证：由已知，$(A\to C)\wedge(B\to C)$永真，
   ∴ $(A\vee B)\to C$ 永真 …
7. $A\wedge B\Rightarrow C$ 当且仅当 $A\Rightarrow B\to C$.
   该性质是推理演算中CP规则的基础
   证：充分性 ∵ $A\wedge B\Rightarrow C$
   ∴ $A\wedge B\to C$ 永真
   ∴ $\sim A\vee\sim B\vee C\Leftrightarrow\sim A\vee(B\to C)\Leftrightarrow A\to(B\to C)$ 永真 …
   必要性 ∵ $A\Rightarrow B\to C$
   ∴ $A\to(B\to C)$永真

必要性

∵ $A \Rightarrow B \to C$

∴ $A \to (B \to C)$ 永真

∴ $A \land B \to C$ 永真

∴ $A \land B \Rightarrow C$.

8. $A \Rightarrow B$, iff $A \land \sim B$ 是矛盾式

定理1.12：

基本蕴含(关系)式(蕴含定律)：

I_1：（上课）$P \Rightarrow P \lor Q$（上课 且 想点奶茶），$Q \Rightarrow P \lor Q$

扩充法则 <析取引入律>：$\sim P \Rightarrow \underbrace{P \to Q}_{}$ ($\sim P \lor Q$)，$Q \Rightarrow P \to Q$ ($Q \lor \sim P$)

I_2：(上课)知识1 知识2 (只学3)知识1

$P \land Q \Rightarrow P$，$P \land Q \Rightarrow Q$

化简法则 <合取消去律>：$\sim(P \to Q) \Rightarrow P$，$\sim(P \to Q) \Rightarrow \sim Q$

$\sim(\sim P \lor Q) \to P \land \sim Q$

I_3：$P \land (P \to Q) \Rightarrow Q$　($P \to Q$：$\sim P \lor Q$)

$(P \land \sim P) \lor (P \land Q) \to (P \land Q)$

假言推论 <分离规则>

I_4：$\sim Q \land (P \to Q) \Rightarrow \sim P$　($P \to Q$：$\sim P \lor Q$)

否定式假言推论

I_5：$\sim P \land (P \lor Q) \Rightarrow Q$

析取三段论

I_6：$(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

假言三段论

I_7：$(P \lor Q) \land (P \to R) \land (Q \to R) \Rightarrow R$

二难推论

I_8：$(P \to Q) \land (R \to S) \Rightarrow (P \land R) \to (Q \land S)$

I_9：$(P \leftrightarrow Q) \land (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$

I_{10}：$(P \lor Q) \land (\sim P \lor R) \Rightarrow Q \lor R$　归结原理

命题逻辑的推理方法

推理规则：
1. P规则（前提引用规则）
2. T规则（逻辑(中间)结果引用规则）　依据：等价式 TE；蕴涵式 TL
3. CP规则（附加前提规则）

└ 对"形如 $B \to C$" eg. $\sim B \lor C$

① $\sim B \lor C$　P
② $B \to C$　T①E
③ B　P(假设前提)
……
ⓝ C
ⓝ+1 $B \to C$　CP

【例 1.21】 证明 $R \to S$ 是 $\{P \to (Q \to S), \sim R \lor P, Q\}$ 的逻辑结果。

【证明一】 直接法

步骤	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\sim R \lor P$	P	5	$\sim R \lor \sim Q \lor S$	T④E
2	$R \to P$	T①E	6	$Q \to (R \to S)$	T⑤E
3	$P \to (Q \to S)$	P	7	Q	P
4	$R \to (Q \to S)$	T②，③I	8	$R \to S$	T⑥，⑦I

【证明二】 利用 CP 规则法

步骤	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\sim R \lor P$	P	5	$Q \to S$	T③，④I
2	R	P（附加前提）	6	Q	P
3	P	T①，②I	7	S	T⑤，⑥I
4	$P \to (Q \to S)$	P	8	$R \to S$	CP②，⑦

【证明三】 反证法

步骤	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\sim(R \to S)$	P ~~(附加前提)~~ 假设前提	7	$P \to (Q \to S)$	P
2	$R \land \sim S$	T①E	8	$Q \to S$	T⑥，⑦I
3	R	T②I	9	Q	P
4	$\sim S$	T②I	10	S	T⑧，⑨I
5	$\sim R \lor P$	P	11	F(矛盾式)	T④，⑩E
6	P	T⑤，⑤I			

$$P, P \to Q \Rightarrow Q$$

为基础的方法，其实就是由子句 P 和 $\sim P \vee Q$ 中消去互反的一对句节（P 和 $\sim P$）后得到 Q 的，一般有下述规则：

消解规则 设 C_1 和 C_2 是两个子句，如果 C_1 中有句节 P，C_2 中有句节 $\sim P$，则从 C_1 中消去 P，从 C_2 中消去 $\sim P$ 后，由剩下的全部句节构成的析取式作为新的子句，称为 C_1 和 C_2 的消解式。例如，设 $C_1 = \sim P \vee Q \vee \sim R$，$C_2 = P \vee R \vee S$，它们有两对互反句节（$\sim P$ 和 P，$\sim R$ 和 R），消去后则得到消解式 $C_3 = Q \vee S$。

对每个已知条件分别求合取范式

利用消解的方法构造证明，首先要把结论的否定作为附加前提，再把由这些前提组成的合取式转化为合取范式，然后以合取范式中的全部子句为对象集使用消解规则。如果在某个步骤导出了矛盾式（称为空子句，记为□），则证明了原蕴涵关系的成立。所以，消解证明法是反证法的一种形式。

【例 1.23】 利用消解法，证明 $P \to (Q \to S)$，$\sim R \vee P$，$Q \Rightarrow R \to S$。

【解】 首先把结论否定后加入前提中，并构造由前提组成的合取式，再把合取式化为合取范式，其过程如下：

$$\begin{aligned}
&(P \to (Q \to S)) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge \sim (R \to S) \\
\Leftrightarrow &(\sim P \vee \sim Q \vee S) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge (R \wedge \sim S) \\
\Leftrightarrow &(\sim P \vee \sim Q \vee S) \wedge (\sim R \vee P) \wedge Q \wedge R \wedge \sim S
\end{aligned}$$

由此得到子句集 $\{\sim P \vee \sim Q \vee S, \sim R \vee P, Q, R, \sim S\}$。对这些子句应用消解方法，得到的消解式也要加入到子句集中，直至导出空子句。消解步骤如下：

步骤	公式	使用规则	步骤	公式	使用规则
1	$\sim P \vee \sim Q \vee S$	引用子句	6	$\sim R \vee P$	引用子句
2	Q	引用子句	7	$\sim R$	5 和 6 中消除 $\sim P$ 和 P
3	$\sim P \vee S$	1 和 2 中消除 $\sim Q$ 和 Q	8	R	引用子句
4	$\sim S$	引用子句	9	□	导出空子句
5	$\sim P$	3 和 4 中消除 $\sim S$ 和 S			

消解法（原理）（归结推理法）

- 为了证明 $G_1, G_2, \cdots, G_n \Rightarrow H$，根据反证法，即只需证明：$G_1, G_2, \cdots, G_n, \sim H \Rightarrow F$
- 利用消解规则进行推理，其推理过程为：

1）从 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n, \sim H\}$ 出发。

2）将 $G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_n \wedge \sim H$ 转化成合取范式，如：$P \wedge (P \vee R) \wedge (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$ 的形式。

3）将合取范式中的所有子句（析取式）构成子句集合S，如：$S=\{P, P \vee R, \sim P \vee Q, \sim P \vee R\}$

4）对S使用消解规则：对S的子句作归结，即消除互补式（互反对），如子句 $P \vee R$ 与 $\sim P \vee Q$ 作归结，得归结式 $R \vee Q$ 并将这归结式仍放S中，重复这一过程。

5）直至归结出矛盾式（称为空子句，记为□）

因此，其消解过程就是对S的子句求消解式的过程。