

## Ch 2 一阶谓词逻辑

2025年9月29日 15:54

$\forall \rightarrow$   
 $\exists \wedge$

★ 有数量关系：(命题 / 谓词逻辑)  
有动词：谓词 ~ P.S. 命题逻辑实则为谓词逻辑特例。

### 2.1 量词化逻辑

#### 一. 谓词

基本命题  $\langle$  客体(个体) 小写字母表示  
谓词 一般用大写字母(串)表示

$P(x)$ :  $x$  是一个四川大学的学生  
命题 函数 ↓  
↓ 客体词  
谓词

描述 n 个个体性质的谓词叫“n 元谓词”

0 元谓词就是命题

#### 二. 量词

$\{ \forall x$  全称 ~  
 $\exists x$  存在 ~

#### 三. 全总个体域

个人理解是将个体域也化为一函数，交起来

#### 四. 自由变元 & 约束变元

$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$   
约束变元  
自由变元  
指派作用凌元  
 $\exists x P(x, y)$   
约变元  
自由变元  
 $\exists x$  的辖域  
代入  
禁名

Q: 如何判断句子真假? A: 转化成自然语言再判断



#### 例1.7:

- 设  $P(x)$ :  $x$  是素数
  - $I(x)$ :  $x$  是整数
  - $Q(x, y)$ :  $x+y=0$
  - 用语句描述下述句子，并判断其真假值。
- 1)  $(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$   
 2)  $(\exists x)(I(x) \wedge P(x))$   
 3)  $(\forall x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$   
 4)  $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge Q(x, y)))$   
 5)  $(\exists x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$

量词次序不可随意改变

### 2.2&2.3 谓词公式的解释、等价与范式

符号：  
 常量 ~  $a, b, c \dots$   
 变量 ~  $x, y, z \dots$   
 函数 ~  $f(\dots), g, h \dots$  不含变元的函数是常量  
 谓词 ~  $P(\dots), Q, R \dots$  不含客体变元的谓词是命题

定义：[项] 任意的常/变量；若  $t_1, \dots, t_n$  是项，则  $f(t_1, \dots, t_n)$  是项

定义：[原子公式] 设  $P(x_1, \dots, x_n)$  是 n 元谓词， $t_1, \dots, t_n$  是项，则  $P(t_1, \dots, t_n)$  是原子谓词公式

定义：[公式] 原子公式； $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ； $\forall G, \exists G$  ( $G$ : 公式,  $x$ : 个体变元) 特例： $\exists x P(y) \quad \forall x P(u, v)$

定义：[解释(指派)] 对每个常量称次序赋予 D 中一个元素；

对每个(n 元)函数称次序指定一个具体的函数；

对每个(n 元)谓词符号，指定一个具体的命题函数。

真公式(重言式) 假公式(矛盾式、不可满足公式) 可满足公式

重要例题：设公式  $\exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$ 。在如下给定的解释下，判断该公式真值

- ① 个体域为  $N^+$
- ②  $P(x, y)$  指定为  $y \geq x$

- 1) ① 个体域为  $N^+$   
 ②  $P(x, y)$  指定为  $y \geq x$   
 ③  $Q(x, y) \sim y \geq 1$

真。存在一个正整数  $x$ , 使对任意正整数  $y$ , 如  $y \geq x$ , 则  $y \geq 1$

2)  $N$ ;  $xy=0$ ;  $x=y$

假。

3)  $N$ ;  $x+y=0$ ;  $x>y$

真。

### 定理 2.2

$$E_{25}: \neg \forall_x (P(x)) \Leftrightarrow \exists_x (\neg P(x))$$

$$E_{26}: \neg \exists_x (P(x)) \Leftrightarrow \forall_x (\neg P(x))$$

量词的转换可推广到含多个量词的谓词公式

$$\neg \exists_x \exists_y \exists_z P(x, y, z) \Leftrightarrow \forall_x \neg \forall_y \forall_z P(x, y, z) \Leftrightarrow \forall_x \forall_y \neg \forall_z P(x, y, z) \Leftrightarrow \forall_x \forall_y \forall_z \neg P(x, y, z)$$

### 定理 2.3 (量词辖域的收缩与扩张)

$$E_{27}: \forall_x (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \forall_x P(x) \vee Q$$

$$E_{28}: \forall_x \quad \wedge \quad \forall_x \quad \wedge$$

$$E_{29}: \exists_x (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \exists_x P(x) \vee Q$$

$$E_{30}: \exists_x \quad \wedge \quad \exists_x \quad \wedge$$

$$E_{31}: \forall_x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists_x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$E_{32}: \exists_x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \forall_x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$E_{33}: Q \rightarrow \forall_x P(x) \Leftrightarrow \forall_x (Q \rightarrow P(x))$$

$$E_{34}: Q \rightarrow \exists_x (P(x)) \Leftrightarrow \exists_x (Q \rightarrow P(x))$$

} 对 Q 约束:  
 不含指导变元 x

"对所有 x, 若 P(x) 成立则 Q 成立"  $\Leftrightarrow$  "若存在 x 使 P(x) 成立则 Q 成立"

\*  $\forall_x P(x) \rightarrow Q$  与  $\forall_x (P(x) \rightarrow Q)$  含义不同

"存在 x, 若 P(x) 成立则 Q 成立"  $\Leftrightarrow$  "若所有 x 都使 P(x) 成立, 那么 Q 成立"

E31 证: (其余同理).

$$\forall_x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg \forall_x (P(x)) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \exists_x (\neg P(x) \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \exists_x (P(x) \rightarrow Q)$$

### 定理 2.4

$$E_{35}: \forall_x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall_x (P(x)) \wedge \forall_x (Q(x))$$

eg. 厢里每个人都唱歌、跳舞

$$E_{36}: \forall_x \forall_y (P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow \forall_x (P(x)) \vee \forall_y (Q(y))$$

$$E_{37}: \exists_x \exists_y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow \exists_x (P(x)) \wedge \exists_y (Q(y))$$

$$E_{38}: \exists_x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists_x (P(x)) \vee \exists_x (Q(x))$$

$$E_{39}: \exists_x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall_x (P(x)) \rightarrow \exists_x (Q(x))$$

$$E_{39}': \forall_x \cdots \rightarrow$$

### 定理 2.5 (双量词公式的等价性)

$$E_{40}: \forall_x \forall_y A(x, y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x A(x, y)$$

$$E_{41}: \exists_x \exists_y A(x, y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x A(x, y)$$

注: 40、41 两个公式说明: 同性质的量词是可以交换顺序的。  
 例如,  $D = \{a, b\}$ ,  
 $(\forall x)(\forall y) A(x, y) = [(\forall y) A(a, y)] \wedge [(\forall y) A(b, y)]$   
 $= [(A(a, a) \wedge (A(a, b))] \wedge [A(b, a) \wedge (A(b, b))]$   
 $(\forall y)(\forall x) A(x, y) = [(\forall x) A(x, a)] \wedge [(\forall x) A(x, b)]$   
 $= [(A(a, a) \wedge (A(b, a))] \wedge [A(a, b) \wedge (A(b, b))]$   
 因此, 左=右。

### • 前束范式

所有量词非否定地出现在公式最前面, 且辖域延伸至公式之末

eg.  $\forall_x \exists_y \cdots (G)$

母式 前束合取/析取范式

例:  $(\forall_x (P(x)) \vee \exists_y (R(y))) \rightarrow \forall_x (F(x))$

解: 原式  $\Leftrightarrow \neg (\forall_x (P(x)) \vee \exists_y (R(y))) \vee \forall_x (F(x))$   
 $\Leftrightarrow (\exists_x (\neg P(x)) \wedge \forall_y (\neg R(y))) \vee \forall_x (F(x))$   
 $\Leftrightarrow (\exists_x (\neg P(x)) \wedge \forall_y (\neg R(y))) \vee \forall_z (F(z))$   
 $\Leftrightarrow \forall_x \forall_y \forall_z (\neg P(x) \wedge \neg R(y) \wedge F(z))$

拓: 前束析取范式?

思:  $\exists x \forall y \forall z$  能否换序?

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (\exists_x (\sim P(x)) \wedge \forall_y (\sim R(y))) \vee \forall_x (F(x)) \\
 &\Leftrightarrow (\exists_x (\sim P(x)) \wedge \forall_y (\sim R(y))) \vee \forall_z (F(z)) \\
 &\Leftrightarrow \exists_x \forall_y \forall_z ((\sim P(x) \wedge \sim R(y)) \vee F(z)) \\
 &\Leftrightarrow \exists_x \forall_y \forall_z ((\sim P(x) \vee F(z)) \wedge (\sim R(y) \vee F(z)))
 \end{aligned}$$

思:  $\exists_x \forall_y \forall_z$  能否换序?

### • 斯柯林 (Skolem) 范式

eg. 求  $\exists_x \forall_y \forall_z \exists_u \forall_v P(x, y, z, u, v, w)$  的 Skolem 范式.

解: 原式  $\forall_y \forall_z \exists_u \forall_v P(a, y, z, u, v, w)$   
 $\forall_y \forall_z \forall_v \exists_w P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$

\* 不等价, ...

eg.  $\forall_x \exists_y P(x, y)$  与  $\forall_x P(x, f(x))$  并不等值

$$D = \{1, 2\}$$

$$\forall x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$\forall x P(x, f(x)) \Leftrightarrow P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

消解 / 归结.

定理 2.7 设 A 的 Skolem 范式为 S, 则 A 为矛盾式 当且仅当 S 为矛盾式

### 2.4 谓词公式的蕴涵

· 公式 A 取 1 时 B 也取 1, 称 A 蕴涵 B, 记作  $A \Rightarrow B$

$$P(x) \Rightarrow \exists_x (P(x)) \quad \forall_x (P(x)) \Rightarrow P(x)$$

定理 2.8:  $A \Rightarrow B$  iff  $A \rightarrow B$  是永真式

#### 蕴涵定律

$$I_{11}: \forall x (P(x)) \vee \forall x (Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

$$E_{33}: \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

$$I_{12}: \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x)) \wedge \exists x (Q(x))$$

$$E_{37}: \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \Leftrightarrow$$

$$I_{13}: \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x)) \rightarrow \forall x (Q(x)) \quad \text{可由 } I_{11} \text{ 得到}$$

$$I_{14}: \exists x (P(x)) \rightarrow \forall x (Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$I_{15}: \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x)) \Leftrightarrow \forall x (Q(x))$$

$$I_{16}: \forall x \forall y (P(x, y)) \Rightarrow \exists y \forall x (P(x, y))$$

$$I_{17}: \exists y \forall x (P(x, y)) \Rightarrow \forall x \exists y (P(x, y))$$

$$I_{18}: \forall x \exists y (P(x, y)) \Rightarrow \exists y \forall x (P(x, y))$$

$$I_{19}: \forall x \forall y (P(x, y)) \Rightarrow \exists x \exists y (P(x, y))$$

$$I_{14} \text{ 证: } \exists x (P(x)) \rightarrow \forall x (Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \sim (\exists x (P(x))) \vee \forall x (Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\sim P(x)) \vee \forall x (Q(x))$$

$$\Rightarrow \forall x (\sim P(x) \vee Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

### 2.5 谓词逻辑的推理

#### ■ 推理演算过程:

- ① 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词  
加以形式化; ★
- ② 若不能直接使用基本推理公式则消去量词;
- ③ 在无量词的情形下使用推理规则和公式进行  
推理;
- ④ 最后再引入量词以求得结论。

## 推理规则

1. US 规则 (每一个均成立，则其中任一个也必成立) 全称指定规则

$$\forall_x (G(x)) \Rightarrow G(y)$$

成立条件：y不受约束；但y应在范围内

2. UG 规则 (全称推广规则，~量词附加规则)

$$G(y) \Rightarrow \forall_x (G(x))$$

成立条件：y在 G(x) 中自由出现；G(y) =

取代 y 的 x 不能在 G(y) 出现

\* UG 不是 US 的逆。

3. ES 规则 (存在指定规则、存在量词消去规则)

$$\exists_x (G(x)) \Rightarrow G(c)$$

成立条件：c 是使 G(x) 为真的指定个体常项；

c 不曾在 G(x) 中出现；

G(x) 中自由变项 仅为 x

eg. 反例：

$G(x)$ : x 为男生。 c: 王芳

则  $\exists_x (G(x)) \Rightarrow G(c)$  是错误的推论

4. EG 规则 (存在推广规则、存在量词附加规则)

$$G(c) \Rightarrow \exists_x (G(x))$$

成立条件：取代 c 的 x 不能在 G(c) 中出现过

c 是论域内的一个个体

eg. 反例：

$G(x)$ : x 在看手机 c: 教室外的张三。

## 例题

eg5-1 证明论断“人都要死，苏格拉底是人，所以苏要死”正确性。

证：设  $M(x)$ : x 是人，  $D(x)$ : x 要死， s: 苏格拉底

$$\text{则 } \forall_x (M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(s) \Rightarrow D(s)$$

①  $\forall_x (M(x) \rightarrow D(x))$  P

②  $M(s) \rightarrow D(s)$  US ① US:  $\forall_x (G(x)) \Rightarrow G(y)$

③  $M(s)$  P

④  $D(s)$  T ② ③ I

“省”变量

eg5-2 试证  $\forall_x (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)) \wedge \exists_x (C(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists_x (Q(x) \wedge R(x))$

分析：

前提:  $\forall_x (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$ ,  $\exists_x (C(x) \wedge Q(x))$

结论:  $\exists_x (Q(x) \wedge R(x))$

思路:

在使用前提时，尽量先使用已前提

因为  $\exists$  成立，即有一个特定的个体 c 存在，并且 c 对  $\forall$  前提中每个个体均成立，但反之不一定成立。

证：

因为  $\exists$  成立，即有一个特定的个体  $c$  存在，并且  $c$  对  $\forall$  前提中每个个体均成立，但反之不一定成立。

证：

- ①  $\exists_x (C(x) \wedge Q(x))$  P
  - ②  $C(a) \wedge Q(a)$  ES ① ES:  $\exists_x (G(x)) \Rightarrow G(a)$  此处  $a$  特定
  - ③  $\forall_x (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x))$  P
  - ④  $C(a) \rightarrow W(a) \wedge R(a)$  US ③ US:  $\forall_x (G(x)) \Rightarrow G(y)$  y 任意
  - ⑤  $C(a)$  T ② I
  - ⑥  $W(a) \wedge R(a)$  T ⑤ I
  - ⑦  $R(a)$  T ⑥ I
  - ⑧  $Q(a)$  T ② I
  - ⑨  $Q(a) \wedge R(a)$  T ⑦⑧ I
  - ⑩  $\exists_x (Q(x) \wedge R(x))$  EG ⑨ EG:  $G(a) \Rightarrow \exists_x (G(x))$
- 证毕

eg. 5-3 试证：前提： $\sim \exists_x (F(x) \wedge H(x))$ ,  $\forall_x (G(x) \rightarrow H(x))$

结论： $\forall_x (G(x) \rightarrow \sim F(x))$

分析：均为全称量词，可考虑将  $\sim$  放于之后。（或制造  $\sim$ ）

证明：

- ①  $\sim \exists_x (F(x) \wedge H(x))$  P
  - ②  $\forall_x (\sim F(x) \vee \sim H(x))$  TDE
  - \* ③  $\forall_x (H(x) \rightarrow \sim F(x))$  TDE
  - ④  $H(y) \rightarrow \sim F(y)$  US ③ US:  $\forall_x (G(x)) \Rightarrow G(y)$
  - ⑤  $\forall_x (G(x) \rightarrow H(x))$  P
  - ⑥  $G(y) \rightarrow H(y)$  US ⑤
  - ⑦  $G(y) \rightarrow \sim F(y)$  T ④⑥ I
  - ⑧  $\forall_x (G(x) \rightarrow \sim F(x))$  UG ⑦ UG:  $G(y) \Rightarrow \forall_x (G(x))$
- 证毕

例5-4：“有些病人相信所有的医生，而病人都不相信江湖骗子”。试证明“医生不是骗子”。

符号化：R(x):x是病人

D(x):x是医生

S(x):x是江湖骗子

L(x,y):x相信y

分析：

前提： $\exists_x (R(x) \wedge \forall_y (D(y) \rightarrow L(x,y)))$ ,  $\forall_x (R(x) \rightarrow \forall_y (S(y) \rightarrow \sim L(x,y)))$

结论： $\forall_x (D(x) \rightarrow \sim S(x))$

思路：

先  $\exists$  再  $\forall$ ，特殊  $\rightarrow$  一般

证明：

- ①  $\exists_x (R(x) \wedge \forall_y (D(y) \rightarrow L(x,y)))$  P
- ②  $R(a) \wedge \forall_y (D(y) \rightarrow L(a,y))$  ES ① a 是相信所有医生的人。
- ③  $\forall_y (D(y) \rightarrow L(a,y))$  T ② I
- ④  $D(b) \rightarrow L(a,b)$  US ③ b 为所有人（与 a 相异）
- ⑤  $\forall_x (R(x) \rightarrow \forall_y (S(y) \rightarrow \sim L(x,y)))$  P
- ⑥  $R(a) \rightarrow \forall_y (S(y) \rightarrow \sim L(a,y))$  US ⑤ 一定包含 a.
- ⑦  $R(a)$  T ② I
- ⑧  $\forall_y (S(y) \rightarrow \sim L(a,y))$  T ⑥⑦ I
- ⑨  $S(b) \rightarrow \sim L(a,b)$  US ⑧
- ⑩  $L(a,b) \rightarrow \sim S(b)$  T ⑨ E

按位置  
选变量

- ⑨  $S(b) \rightarrow \sim L(a, b)$  US ⑧  
 ⑩  $L(a, b) \rightarrow \sim S(b)$  T ⑨ E  
 ⑪  $D(b) \rightarrow \sim S(b)$  T ⑨ ⑩ I  
 ⑫  $\forall x(D(x) \rightarrow \sim S(x))$  UG ⑪

证毕.

## 消解(归结)法

$G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$

$G = \{G_1, G_2, \dots, G_n, \sim H\} \Rightarrow R \wedge \sim R$

建立子句集：1. 先将  $G$  化为等价的前束范式

2. 化为 Skolem 范式，得  $G^*$

3. 省略  $G^*$  中  $\forall$

4.  $G^*$  式的“ $\wedge$ ”以“,”表示，得  $S$ .

$\forall S$  归结：合一置换

(例如  $C1=P(x) \wedge Q(x)$   $C2=\sim P(a) \wedge R(y)$ )  
 $P(x)$  与  $\sim P(a)$  合一置换( $a/x$ ), 即将变元  $x$  替换  
 成  $a$ , 便为互补对, 可作归结了, 有归结式  
 $R(C1, C2)=Q(a) \wedge R(y))$   
 对子句集  $S$  的任意两个子句作归结(如果  
 可作归结)并将归结式仍放入  $S$ , 重复这一过  
 程。  
 (4) 直到归结出空子句  $\square$ , 证明结束。

## 例 5-5 利用消解法证明: (p42 例 2.22)

前提:  $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \sim R(x, y)))$ ,

$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(S(y) \rightarrow R(x, y)))$

结论:  $(\forall x)(S(x) \rightarrow \sim Q(x))$

证明:  $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Qy \rightarrow \sim R(x, y))) \wedge \exists x(Px \wedge \forall y(Sy \rightarrow R(x, y))) \wedge \sim \forall x(Sx \rightarrow \sim Q(x))$   
 $\Leftrightarrow \forall x \forall y(\sim Px \vee \sim Qy) \vee \sim R(x, y) \wedge \exists u(Pu \wedge \forall z(\sim S(z) \vee R(u, z))) \wedge \exists v(Sv \wedge Q(v))$   
 $\Leftrightarrow \exists u \exists v \forall x \forall y \forall z((\sim Px \vee \sim Qy) \vee \sim R(x, y) \wedge Pu \wedge (\sim S(z) \vee R(u, z)) \wedge Sv \wedge Q(v))$   
 $\Rightarrow \forall x \forall y \forall z((\sim Px \vee \sim Qy) \vee \sim R(x, y) \wedge Pu \wedge (\sim S(z) \vee R(u, z)) \wedge Sb \wedge Qb)$

... 子句集:  $\{ \sim Px \vee \sim Qy \vee \sim R(x, y), Pa, \sim S(z) \vee R(a, z), Sb, Qb \}$

①  $\sim Px \vee \sim Qy \vee \sim R(x, y)$

②  $Pa$

③  $\sim Qy \vee \sim R(a, y)$

①②代换  $\frac{a}{x}$

④  $Qb$

⑤  $\sim R(ab)$

③④代换  $\frac{b}{y}$

⑥  $\sim S(z) \vee R(a, z)$

⑦  $\sim Sb$

⑤⑥代换  $\frac{b}{z}$

⑧  $Sb$

⑨  $\square$

证毕

一、基本推理方法 1、直接证明方法 2、间接证明方法(反证法) 3、利用 CP 规则二、推理中需注意的几个问题 1) 当所要求的结论可能被否定时, 此时可引用规则 UG 和规则 EG 将其量词加入。2) 在推导过程中, 如既要使用规则 US 又要使用规则 ES 消去公式中的量词(要先使用规则 ES, 再使用规则 US)。然后再使用命题演算中的推理规则, 最后使用规则 UG 或规则 EG 引入量词, 得到所要的结论。3) 如一个变量是用规则 ES 消去量词, 对该变量在添加量词时, 则只能使用规则 EG, 而不能使用规则 UG; 如使用规则 US 消去量词, 对该变量在添加量词时, 则可使用规则 EG 和规则 UG。4) 如有两个含有存在量词的公式, 当用规则 ES 消去量词时, 不能选用同样的一个常量符号来取代两个公

式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。5) 在用规则US和规则ES消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。6) 在添加量词( $\exists x$ )、( $\forall x$ )时，所选用的x不能在公式G(c)或G(y)中以任何约束出现。7) 在使用EG规则引入存在量词( $\exists x$ )，此x不得为G(c)或G(y)中的函数变元。在使用UG规则引入全称量词( $\forall x$ )时，此x不得为G(y)中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。

### 例 5-6

将下列三条自然公理翻译成谓词公式：

- ① 每个自然数有且仅有一个直接后继；
- ② 没有任何自然数以0为其直接后继；
- ③ 对0以外的任何自然数，有且仅有一个直接先行。

解：设个体域D为自然数

$P(x)$ :  $x$ 的直接先行

$S(x)$ :  $x$ 的直接后继

$EQUAL(x,y)$ :  $x=y$

①  $\forall x \exists y (\underline{EQUAL(y, s(x))} \wedge \forall z (\underline{EQUAL(z, s(x))} \rightarrow EQUAL(y, z)))$  再找一个与原来相同  
有 且仅有

②  $\sim \exists x (EQUAL(0, s(x)))$

③  $\forall x (\sim EQUAL(x, 0) \rightarrow \exists y (EQUAL(y, p_x) \wedge \forall z (EQUAL(z, p_x) \rightarrow EQUAL(z, p_y)))$



### 例 5-7

证明：“所有的人都要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的。”

解：设  $H(x)$ :  $x$ 是人；

$M(x)$ :  $x$ 是要死的；

s: 苏格拉底。

则符号化为： $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ ,  $H(s) \Rightarrow M(s)$

证明：(1)  $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$  P

(2)  $\cancel{H(x) \rightarrow M(x)}$  H(s) → M(s) US, (1)

(3)  $H(s)$

P

(4)  $M(s)$

T, (2), (3), I

(2) 错了！  
正确的为？



### 例 5-8

证明：

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ ,  $(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)$

请看推导：

(1)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$  P

US, (1)

顺序  
推导错了！  
应先用ES规  
则，再用US  
规则，正确的  
为？

(2)  $(P(c) \rightarrow Q(c))$

P

(3)  $(\exists x)P(x)$

ES, (3)

(4)  $P(c)$

T, (2), (4), I

(5)  $Q(c)$

EG, (5)

修正：①  $\exists x(P(x))$

P

②  $P(c)$

ES ①

ES:  $\exists x(G(x)) \Rightarrow G(c)$

③  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

P

④  $P(c) \rightarrow Q(c)$

US ③

US:  $\forall x(G(x)) \Rightarrow G(y)$

⑤  $Q(c)$

TO ④ I

⑥  $\exists x(Q(x))$

EG ⑤

EG:  $G(c) \Rightarrow \exists x(G(x))$



## 例 5-9

证明：

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 证明： 1)  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$  P  
 2)  $(P(c) \wedge Q(c))$  ES,1)  
 3)  $P(c)$  T,2),I  
 4)  $Q(c)$  T,2),I  
 5)  $(\exists x)P(x)$  EG,3)  
 6)  $(\exists x)Q(x)$  EG,4)  
 7)  $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$  T,5),6),I



## 例 5-9(续1)

请看上述推论的逆推导：

- 1)  $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$  P  
 2)  $(\exists x)P(x)$  T,1),I  
 3)  $P(c)$  ES,2)  
 4)  $(\exists x)Q(x)$  T,1),I  
 5)  $\cancel{Q(c)} \times Q(b)$  ES,4) ✓  
 6)  $(P(c) \wedge Q(c)) \cancel{P(c) \wedge Q(b)} \cancel{T,3),4),I} V$   
 7)  $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$   $\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$  EG,⑦



## 例 5-10

5推导错了！  
不一定是  
同一个，

这是错误的结论

证明下述论断的正确性：

所有的哺乳动物都是脊椎动物；

并非所有的哺乳动物都是胎生动物；

故有些脊椎动物不是胎生的。

证明 设谓词如下：

$P(x)$ :  $x$  是哺乳动物；

$Q(x)$ :  $x$  是脊椎动物；

$R(x)$ :  $x$  是胎生动物。

则有：  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), \sim (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

$\Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge \sim R(x))$

- 1)  $\sim (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$  P  
 2)  $\sim (P(x) \rightarrow R(x))$  US,1)  
 3)  $\sim (\sim P(x) \vee R(x))$  T,2), E  
 4)  $(P(x) \wedge \sim R(x))$  T,3), E  
 5)  $P(x)$  T,4), I  
 6)  $\sim R(x)$  T,4), I  
 7)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$  P  
 8)  $P(x) \rightarrow Q(x)$  US,7)  
 9)  $Q(x)$  T,(5),(8),I  
 10)  $Q(x) \wedge \sim R(x)$  T,(6),9),I  
 11)  $(\exists x)(Q(x) \wedge \sim R(x))$  EG,10)  
 12)  $(\forall x)(Q(x) \wedge \sim R(x))$  UG,10)

2) 错了！在用规则  
US 和 规则 ES 消去量  
词时，此量词必须位  
于整个公式的最前端，  
并且它的辖域为其后  
的整个公式。  
正确的为：

- 修正： ①  $\sim \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$  P  
 ②  $\exists x \sim (\sim P(x) \vee R(x))$  T①E  
 ③  $\sim (\sim P(c) \vee R(c))$  ES ②  
 ④  $P(c) \wedge \sim R(c)$  T③E  
 ⑤  $P(c)$  T④I  
 ⑥  $\sim R(c)$  T④I  
 ⑦  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  P  
 ⑧  $P(c) \rightarrow Q(c)$  US⑦  
 ⑨  $Q(c)$  T⑤⑧I  
 ⑩  $Q(c) \wedge \sim R(c)$  T⑥⑨I  
 ⑪  $\exists x (Q(x) \wedge \sim R(x))$  EG⑩

## 例 5-11

证明下述论断的正确性：

每个报考研究生的大学毕业生要么参加研究生的入学考试，要么被推荐为免试生；  
 每个报考研究生的大学毕业生当且仅当学习成绩优秀才被推荐为免试生；  
 有些报考研究生的大学毕业生学习成绩优秀，但并非所有报考研究生的大学毕业生学习成绩都优秀。

因此，有些报考研究生的大学毕业生要参加研究生的入学考试。

解：设  $P(x)$ :  $x$  是考研人     $Q(x)$ :  $x$  参加研考     $R(x)$ :  $x$  被推荐免     $S(x)$ :  $x$  成绩优秀

则原论断可符号化为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow R(x)))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \sim S(x))$$

$$\Rightarrow \exists x(R(x) \wedge Q(x))$$

证明：①  $\exists x(P(x) \wedge \sim S(x))$  P

②  $P(c) \wedge \sim S(c)$  ES ①

③  $P(c)$  T②I

④  $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$  P

⑤  $P(c) \rightarrow (Q(c) \vee R(c))$  US ④

⑥  $Q(c) \vee R(c)$  T③⑤I

⑦  $\forall x(P(x) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow R(x)))$  P

⑧  $P(c) \rightarrow (S(c) \leftrightarrow R(c))$  US ⑦

⑨  $S(c) \leftrightarrow R(c)$  T③⑧I

⑩  $\sim S(c)$  T②I

⑪  $\sim R(c)$  T⑩⑨I

⑫  $Q(c)$  T⑥⑪I

⑬  $P(c) \wedge Q(c)$  T③⑫I

⑭  $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$  EG ⑬

eg.5-12 证明： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$

△ 反证法：

①  $\sim \forall x(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$  P (假设前提)

②  $\exists x \sim (\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$  T①E

③  $\sim \forall y(P(y) \wedge R(c,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(c,y))$  ES ②

④  $\exists y(P(y) \wedge R(c,y)) \wedge \sim \exists y(Q(y) \wedge R(c,y))$  T③E

⑤  $\exists y(P(y) \wedge R(c,y))$  T④I

⑥  $P(d) \wedge R(c,d)$  ES ⑤

⑦  $P(d)$  T⑥I

⑧  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  P

⑨  $P(d) \rightarrow Q(d)$  US ⑧

⑩  $Q(d)$  T⑨⑦I

⑪  $R(c,d)$  T⑥I

⑫  $Q(d) \wedge R(c,d)$  T⑩⑪I

⑬  $\sim \exists y(Q(y) \wedge R(c,y))$  T④I

⑭  $\forall y \sim (Q(y) \wedge R(c,y))$  T③E

⑮  $\sim (Q(d) \wedge R(c,d))$  US ⑭

⑯  $\square$  T⑩⑮I

证毕

△ CP 法：

①  $\exists y(P(y) \wedge R(x,y))$  P (附加前提)

②  $P(fx) \wedge R(x,fx)$  ES ①

③  $P(fx)$  T②I

④  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  P

⑤  $P(fx) \rightarrow Q(fx)$  US ④

⑥  $Q(fx)$  T③⑤I

⑦  $R(x,fx)$  T②I

⑧  $Q(fx) \wedge R(x,fx)$  T⑥⑦I

⑨  $\exists y(Q(fx) \wedge R(x,fx))$  EG ⑧

⑩  $\exists y(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$  CP ①⑨

⑪  $\exists y(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$  EG ⑩