数学笔记

Your Name

2023 年 8 月 2 日

1 引言

lemma 1. *Given $f(x)$ is convex and L-smooth then*

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(y)^T(y-x) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \tag{1}$$

proof. Because of the convexity of $f(x)$,

$$f(z) \geq f(y) + \nabla f(y)^T(z-y) \Longleftrightarrow f(y) - f(z) \leq \nabla f(y)^T(y-z) \tag{2}$$

Because f is L smooth:

$$f(z) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(z-x) + \frac{L}{2}\|z-x\|_2^2 \Longleftrightarrow$$

$$f(z) - f(x) \leq \nabla f(x)^T(z-x) + \frac{L}{2}\|z-x\|_2^2 \tag{3}$$

Using (2) and (3) we have:

$$f(y) - f(x) = f(y) - f(z) + f(z) - f(x) \leq \nabla f(y)^T(y-z) + \nabla f(x)^T(z-x) + \frac{L}{2}\|z-x\|_2^2 \tag{4}$$

let $z = x - \frac{1}{L}(\nabla f(x) - \nabla f(y))$:

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(y)^T(y-x) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \tag{5}$$

□

lemma 2. *Suppose F_k is L-smooth with global minimum at $\boldsymbol{w}_k^*$,then for any $\boldsymbol{w}_k$ in the domain of F_k,we have that*

$$l = \|\nabla F_k(\boldsymbol{w}_k)\|_2^2 \leq 2L(F_k(\boldsymbol{w}_k) - F_k(\boldsymbol{w}_k^*)) \tag{6}$$

proof. Let $y = \boldsymbol{w}_k^*$ and $x = \boldsymbol{w}_k$ in (1), and $\nabla f(\boldsymbol{w}_k^*) = 0$ □

2 重要定理

这里列举一些重要的定理，并附上其证明。

2.1 勾股定理

勾股定理给出了直角三角形的边之间的关系。它可以用以下公式表示：

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{7}$$

其中，a 和 b 是直角三角形的两条直角边的长度，c 是斜边的长度。

证明：（略）

2.2 欧拉公式

欧拉公式是数学中一条重要的公式，连接了五个基本数学常数：e（自然对数的底）、π（圆周率）、i（虚数单位）、1（单位元）和无穷远处的 0。它可以表示为：

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{8}$$

证明：（略）

3 结论

在这篇笔记中，我们总结了一些重要的数学定理和公式。