



Number Theory I

關於這堂課

- 先備知識
 - 基本語法
- 學習重點
 - 進位制
 - 質數測試
 - 因數分解
 - 篩法
 - 最大公因數
 - 模運算



進位制



Zerojudge a034: 二進位制轉換

- 題目敘述
 - 給定一個數字，請輸出他的二進位表示法

Input

12
19
3

Output

1100
10011
11



Zerojudge a414: 位元運算之進位篇

- 題目敘述
 - 給定數字 n , 請輸出二進位計算 $n+1$ 的進位次數
 - 最後一行的 0 代表輸入結束
- 測資範圍
 - $1 \leq n \leq 2147483647$

Input	Output
1	1
4	0
7	3
17	1
0	



題單 - 進位制

- 二進位
 - Zerojudge f672-數字轉二進位(問某數字二進位的第M位的值)
 - Zerojudge a034: 二進位制轉換
 - Zerojudge a414: 位元運算之進位篇
- 多進位
 - UVa 343 - What Base Is This?(給定兩個相同的數, 輸出他們的進位制)
 - CodeForces 49B - Sum(問兩數相加最大可能是幾位數)



質數測試 (Primality Test)



質數測試

```
bool isPrime(int n) {  
    if (n == 1) return false;  
    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {  
        if (n % i == 0) return false;  
    }  
    return true;  
}
```

$i * i \leq n$ 取代 $i \leq \sqrt{n}$, 更快且更準確



Zerojudge a121: 質數又來囉

- 題目敘述
 - 給定兩個數字 a, b 請問 a 到 b 中有多少質數?
- 測資範圍
 - $1 \leq a, b \leq 10^8$
 - $b - a \leq 1000$

Input

3 7
6 6
30 50

Output

3
0
5



題單 - 質數測試

- 判斷質數
 - Zerojudge a121: 質數又來囉
 - Zerojudge b513: 判斷質數-商競103
 - Zerojudge a007: 判斷質數
 - Zerojudge b552: 3.找質數
 - Zerojudge d438: 10533 - Digit Primes
- 計算質數
 - CodeForces 26A(計算質數)



因數分解 (Factorization)



質因數分解

- 枚舉 $i = 2 \sim \sqrt{n}$,
如果 n / i 可以整除,
則持續 $n /= i$ 將 n 中的質因數 i 都消掉
- 只有 1 個質因數會大於等於 \sqrt{n}
- $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

```
vector<int> prime_factors(int n) {  
    vector<int> ret;  
    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {  
        if (n % i == 0) {  
            while (n % i == 0) {  
                ret.push_back(i);  
                n /= i;  
            }  
        }  
    }  
    if (n > 1) ret.push_back(n);  
    return ret;  
}
```



Zerojudge a010: 因數分解

- 題目敘述
 - 給定數字 n , 請輸出因數分解後的結果
- 測資範圍
 - $1 \leq n \leq 10^9$

Input

36

Output

$2^2 * 3^3$



找到所有因數

- 枚舉前 \sqrt{n} 的正整數
- i
- n / i

```
vector<int> factors(int n) {  
    vector<int> ret;  
    for (int i = 1; i * i <= n; i++) {  
        if (n % i == 0) {  
            if (i * i == n) {  
                ret.push_back(i);  
            } else {  
                ret.push_back(i);  
                ret.push_back(n / i);  
            }  
        }  
    }  
    // if needed  
    sort(ret.begin(), ret.end());  
    return ret;  
}
```



LeetCode 1492. The kth Factor of n

- 題目敘述
 - 輸出第 k 小的因數
 - 找不到的話則輸出-1
- 測資範圍
 - $1 \leq k \leq n \leq 1000$

Input	Output
12 3	3



計算因數個數

- 枚舉 $i = 1 \sim \sqrt{n}$
- if $i = \sqrt{n}$:
因數增加 1 個
- if $i \neq \sqrt{n}$:
則會收集到 i 和 n/i 兩個不同的因數



計算因數個數

- $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
 $= 2^2 \times 3^2 \times 5^1$
- 因數個數 =
 $(2+1) * (2+1) * (1+1)$
 $= 18$

	2	3	5
factor_cnt	2	2	1



計算因數總和

- $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
 $= 2^2 \times 3^2 \times 5^1$
- 因數總和
 $= (1 + 2 + 4) * (1 + 3 + 9) * (1 + 5)$
 $= 546$



Zerojudge c184: 盈虧互補

- 題目敘述
 - 給定數字n, 請計算他的因數總和
 - 如果總和等於自己請輸出=n
 - 如果總和的數其因數總和等於自己請輸出因數總和
 - 否則輸出0
- 測資範圍
 - $2 \leq n \leq 10^7$, n=0代表結束

Input	Output
6	=6
220	284
12	0
0	



題單 - 因數分解

- 因數分解
 - CodeForces 230B (計算因數)
 - Zerojudge a010: 因數分解
 - Zerojudge a740: 質因數之和
 - Zerojudge c184: 盈虧互補 (因數總和)
 - LeetCode 1492. The kth Factor of n
 - 中女中d053: 2.質因數分解
- 變化題
 - Zerojudge b687: 7. 坐好坐滿
 - LeetCode 1390. Four Divisors



篩法 (Sieve)



Sieve 篩法

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50



Sieve 篩法

- 複雜度: $O(n \log n)$

```
bitset<maxn> p;  // bool p[maxn];

void sieve() {
    p.set();  // 全部設定成 true
    p[0] = p[1] = false;

    for (int i = 2; i < maxn; i++) {
        if (!p[i]) continue;
        for (int j = i + i; j < maxn; j += i) {
            p[j] = false;
        }
    }
}
```



Sieve 篩法

- 複雜度: $O(n)$

```
bitset<maxn> p; // bool p[maxn];
vector<int> prime;

void linear_sieve() {
    p.set(); // 全部設定成 true
    p[0] = p[1] = false;
    for (int i = 2; i < maxn; i++) {
        if (p[i]) prime.push_back(i);
        for (int j = 0; i * prime[j] < maxn; j++) {
            p[i * prime[j]] = false;
            if (i % prime[j] == 0) break;
        }
    }
}
```



LeetCode 204. Count Primes

- 題目敘述
 - 給定n 詢問1~n有多少質數？
- 測資範圍
 - $0 \leq n \leq 5 * 10^6$

Input

14

Output

6



Zerojudge e912: $n!$ 的因數分解

- 題目敘述
 - 輸入 n , 請對 $n!$ 質因數分解
 - 會有多行輸入, 以EOF當作結束
- 測資範圍
 - $0 \leq n \leq 10^4$

Input

```
6
9
```

Output

```
6! = 2^4 * 3^2 * 5^1
9! = 2^7 * 3^4 * 5^1 * 7^1
```



題單 - 篩法

- 篩法
 - CodeForces 26A(計算質數)
 - LeetCode 204. Count Primes
 - Zerojudge e912: $n!$ 的因數分解
 - Zerojudge a569: 2-絕對遞增的質數子數列
 - Zerojudge f426: 質數求和
 - CodeForces 102267B (需要線性篩法)
 - Zerojudge d237: 質數合



最大公因數 (Greatest Common Divisor)



一些 gcd 的性質

- 基本性質
 - $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$
 - $\gcd(a, b, c) = \gcd(\gcd(a, b), c) = \gcd(a, \gcd(b, c))$
- $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \% b)$ if $(b \neq 0)$
- $\text{lcm}(a, b) * \gcd(a, b) = a * b$



Zerojudge a024: 最大公因數(GCD)

- 題目敘述
 - 給定兩個數字 a, b, 輸出他們的最大公因數
 - 多筆輸入
- 測資範圍
 - $0 \leq a, b \leq 2^{31} - 1$

Input

```
12 15  
1 100
```

Output

```
3  
1
```



UVa 11417. GCD

- 題目敘述
 - 給定 n , 請計算 $0 \sim n$ 之間所有數字的gcd 總和
- 測資範圍
 - $1 < n < 501$



題單 - GCD

- 基礎

- Zerojudge a024: 最大公因數(GCD)
- CodeForces 664A Complicated GCD(考GCD性質)
- Zerojudge d693: 最小公倍數
- Zerojudge d256: 11388 - GCD LCM

- 變化

- UVa 11827 - Maximum GCD
- Zerojudge e272: $\gcd(F_m, F_n)$



模運算

(Modular Arithmetic)



Modular Arithmetic

- $(a + b) \bmod m \equiv ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
- $(a * b) \bmod m \equiv ((a \bmod m) * (b \bmod m)) \bmod m$
- $(a - b) \bmod m \equiv ((a \bmod m) - (b \bmod m)) \bmod m$



很多程式在負數時 \bmod 的行為會不太一樣，
所以我們通常會把 $(a - b) \bmod m$ 寫成 $((a - b) \bmod m + m) \bmod m$
來保證在進行 $\bmod m$ 運算時是正數



輾轉相除法

- 求 $\gcd(276, 585)$
 - $\gcd(585, 276 \% 585) = \gcd(585, 276)$
 - $\gcd(276, 585 \% 276) = \gcd(276, 33)$
 - $\gcd(33, 276 \% 33) = \gcd(33, 12)$
 - $\gcd(12, 33 \% 12) = \gcd(12, 9)$
 - $\gcd(9, 12 \% 9) = \gcd(9, 3)$
 - $\gcd(3, 9 \% 3) = \gcd(3, 0) = 3$



Extended GCD

- Bézout's 定理
給 $a, b \in \mathbb{Z}$, 必存在整數 x, y 使得 $ax + by = \gcd(a, b)$
- 求 x, y



輾轉相除法

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \% b)$$



Extended GCD

- 給 $a, b \in \mathbb{Z}$, 已知必存在整數 x, y 使得 $ax + by = \gcd(a, b)$, 求 x, y

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

$$br + (a \% b)s = \gcd(b, a \% b) = \gcd(a, b)$$

$$\Rightarrow ax + by = br + (a - [a / b] * b)s$$

$$\Rightarrow ax + by = sa + (r - [a / b] * s)b$$

$$a \bmod b = a - [a / b] * b$$

$$\Rightarrow x = s, \quad y = (r - [a / b] * s)$$



Extended GCD

- $276x + 585y = 3$, 求 x, y



輾轉相除法

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \% b)$$



Extended GCD

- 給 $a, b \in \mathbb{Z}$, 已知必存在整數 x, y 使得 $ax + by = \gcd(a, b)$, 求 x, y

```
pair<int, int> extgcd(int a, int b) {  
    if (b == 0) {  
        return {1, 0};  
    }  
    pair<int, int> p = extgcd(b, a % b);  
    int r = p.first, s = p.second;  
    return {s, r - a / b * s};  
}
```



Zerojudge a289: Modular Multiplicative Inverse

- 題目敘述
 - 給定 a, n , 請輸出 a 對模數 n 的反元素
 - 如果反元素不存在
- 測資範圍
 - $0 \leq a, n \leq 10^8$

Input

```
79 62
96 47
49 28
```

Output

```
11
24
No
Inverse
```



Zerojudge b836: kevin戀愛攻略系列題-2

- 題目敘述
 - 給定兩個數字n, m
 - 請問 $1+(1+m)+(1+2m)+\dots+(1+km)$ 是否可以等於n?
 - 可以則輸出"Go Kevin!!", 否則"No Stop!!"
- 測資範圍
 - $0 < n \leq 2147483647$
 - $0 \leq m \leq 2147483647$

Input

6
9

Output

Go Kevin!!



題單 - 模運算

- 基礎題

- UVa 11417. GCD
- Zerojudge a058: MOD3
- Zerojudge b836: kevin戀愛攻略系列題2 說好的霸王花呢??

- 模逆元

- Zerojudge a289: Modular Multiplicative Inverse
- Kattis - Candy Distribution

- 變化題

- UVa 10229 - Modular Fibonacci
- Zerojudge d636: 大爆炸bomb

