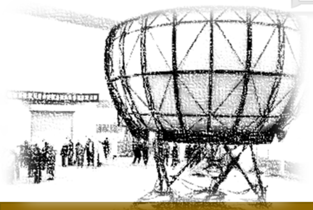
工程信号分析与处理

贾鑫 工学博士/副教授

吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室



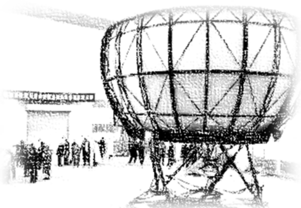
2022/4/19

本门课程内容

- §1 随机数据的统计特征 —— 随机过程
- §2 试验数据的离散化 —— 采样混叠
- §3 频谱分析技术 —— 有限泄漏
- §4 功率谱的估计 —— 窗函数周期图
- §5 相关函数的估计 —— 循环相关
- §6 频响函数的估计 —— 相干分析
- §7 有限带宽频率分析技术 —— 频率细化

重点概念：频率细化

§7 有限带宽频率分析技术



根据第二章数字频谱分析的理论，有限离散傅氏变换(DFT)总是获得$(0-f_N)$区间内的频率分量（f_N是Nyquisit折叠频率）。当随机过程的信号样本的采样点数为 **N** 时，在上述区间内的谱线数为 **N/2** 。则频率分辨率为

$$\Delta f=\frac{f_N}{N/2}=\frac{f_s}{N}$$

从上式可知，对于给定的采样点数 **N**，采样频率 f_s 越大时， Δf 就越大，亦即分辨率就越低。

另一方面，由上式可能直接想到，对于给定的采样频率 f_s ，可以通过增加采样点数 **N** ，提高频率分辨率。

但是，从第四章功率谱分析中我们知道，对于随机过程来说，功率谱的周期图估计方法的样本点数不宜过大，当 **N** 过大时，周期图沿频率轴振荡的现象将加重。

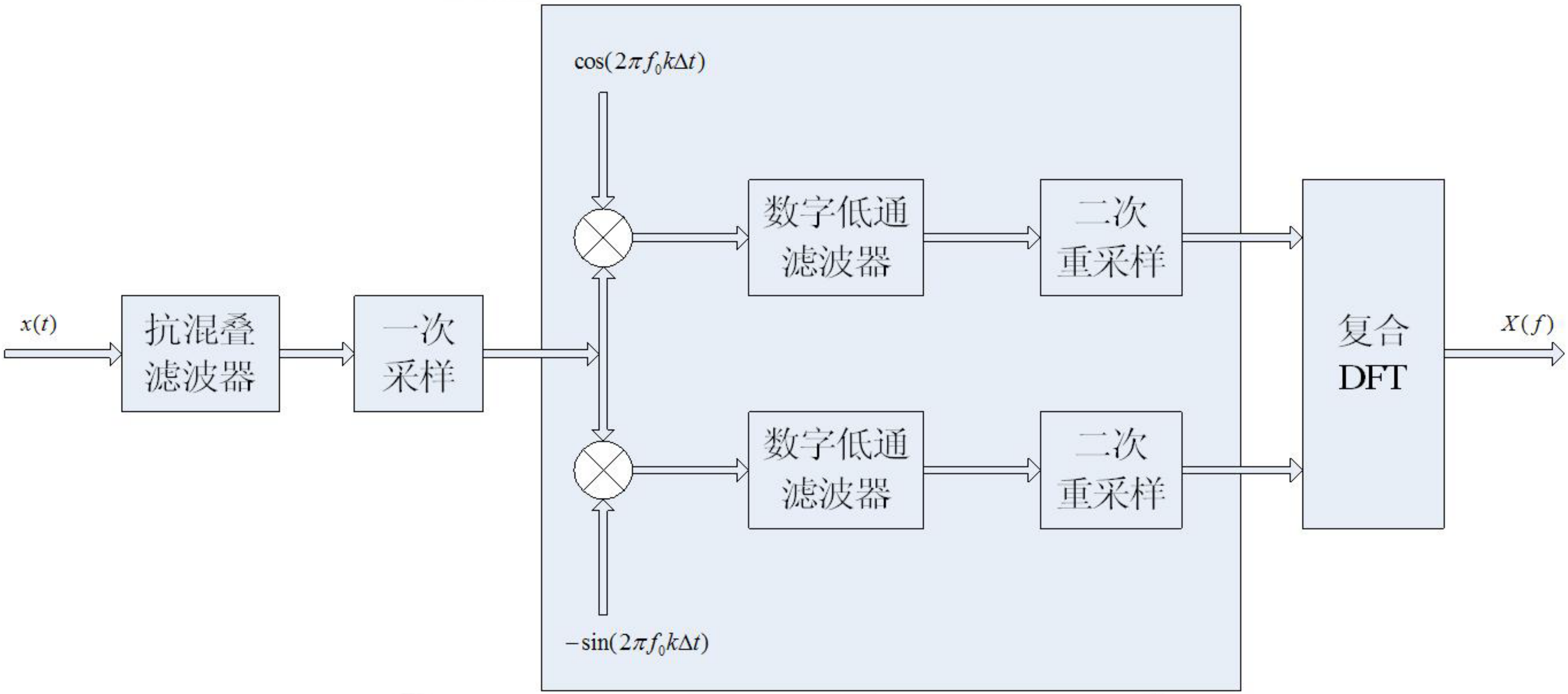
综上所述，为了对感兴趣的选定频段作详细的考察，必须将这个局部频段内的频谱图像进行“局部放大”。因此，这种选择带宽频谱分析技术（Band-Selected Fourier Analysis, BSFA）也称为频率细化（ZOOM）技术。

频率细化分析技术经常用于模态分析、特征分析，以及故障诊断中。

常用的频率细化处理方法有频率移位法和相位补偿法。

1. 频率移位法

频率细化的**频率移位法（频移法）**，也称为**复调制滤波法**。该方法的分辨率可以达到很高（一般可以达到 2^8 倍），计算精度好且计算速度快，其基本原理如图所示（下页）。


x(t)
抗混叠滤波器
一次采样
cos(2πf0kΔt)
数字低通滤波器
二次重采样
数字低通滤波器
二次重采样
−sin(2πf0kΔt)
复合DFT
X(f)

频移法细化技术的基本原理是DFT的频移性质。

被分析的信号经过抗混叠滤波后，进入A/D采样，然后送入高分辨率分析处理器中，进行频移、低通数字滤波和二次重采样。

1. 频率移位法

□1.1. 频移

为了将感兴趣频段的下限频率移到 **0** 频位置，以便有可能将感兴趣频段放大到整个DFT频率范围，首先需要对离散信号进行频率调制。

根据DFT的频移性质，如果欲将某一频率移到 **0** 频率处，则在时域数字信号上，应乘以复数信号 $e^{-j2\pi f_0 n\Delta t}$ 。通常，这种把时域信号移频的处理，也称之为对时域信号进行**复数调制**，或者**载波**。

经过调制后的信号是一个复数信号，实部为

$$x_n \cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{N\Delta f}\right) = x_n \cos\left(\frac{2\pi k_0 n}{N}\right)$$

虚部为

$$-x_n \sin\left(\frac{2\pi f_0 n}{N\Delta f}\right) = -x_n \sin\left(\frac{2\pi k_0 n}{N}\right)$$

式中，Δf 对应于第一次采样的DFT频率分辨率，而 $k_0 = f_0 / \Delta f$ 为对应的频率谱线序号。

经过进一步地转换，调制后的数字信号序列 x'_n 可以采用指数函数表达为

$$x'_n = x_n W_N^{k_0 n} = x_n e^{-j2\pi f_0 n\Delta t}$$

其中，在指数因子中，引入下标 **N** 是为了以后区分不同采样点数的情况。

$$W_N^{k_0 n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$$

根据DFT的频移性质，可知调制数字信号的频谱为

$$X'_k = X_{k+k_0}$$

由此可见，这种信号调制实现了将原有频谱中的谱线沿频率轴左移了 k_0 个 Δf，亦即将 f_0 移到了 **0** 频点处。

1. 频率移位法

□1.2. 数字低通滤波

数字低通滤波器的目的是将原信号中的频率带宽 f_0 — f_1 以外的频率成分滤除，或者是将移频后的数字信号进行低通滤波，保留调制信号 x_n' 中的 $f_B = f_1 - f_0$ 以内的频率成分。通常，f_B 取为原信号离散化采样时折叠频率 f_N 的 $1/2^m\ (m = 1,2,3,\ldots)$ 倍。其中，2^m 即为细化倍数，称为**细化因子**。

这里的数字滤波本质上也是抗混叠滤波，是为后续的二次重采样做准备。

值得说明的是，频率细化中采用的低通滤波，通常采用高截至特性的数字滤波器（FIR或者IIR卷积数字滤波），截至特性一般高达 **90dB/oct** 以上。而且，如果数字处理的目的是获得互功率谱，还必须进行正反向无相移滤波处理。

1. 频率移位法

1.3. 二次重采样

在相同的DFT分析点数的前提下，为了提高频率分辨率，必须将采样频率降至原始数字序列采样频率的 $1/2^m\,(m=1,2,3,\ldots)$ 倍。即

$$f_s' = f_s / 2^m$$

$$f_N' = f_N / 2^m = f_B$$

这样，二次采样信号经过 **N** 点DFT，频率谱的谱线间隔就是原有谱线间隔的 $1/2^m\,(m=1,2,3,\ldots)$ 倍，也就是，频率分辨率将提高 2^m 倍。

频率细化分析方法，每次分析的采样带宽 f_B 是原始信号分析带宽的 $1/2^m\,(m=1,2,3,\ldots)$ 倍，因此：

a) 一次分析只能获得选定频率带宽 $f_B = f_1 - f_0$ 内的谱分析。如想获得多频带上或者整个频带的谱，必须逐段细化处理。

b) 由于DFT样本点数N不变，所以每一次的ZOOM的处理时间只有少许增加。

c) 由于二次重采样时的采样频率降低了 2^m 倍，所以，时域信号的样本总长度需求，将增加 2^m 倍。

2. 相位补偿法

采用**相位补偿法**进行频率细化，可以对全部频率范围内的频谱同时分析，这就可以克服频移法细化的必须逐段重复的缺点。

设细化因子为 $D=2^m$，则总采样点数为

$$N'=N\cdot D=N\cdot 2^m=\frac{DT}{\Delta t}$$

式中，**T** 为正常DFT样本长度，Δt 为原始采样间隔。

从整个时间样本序列中，将相距 D 个时域采样间隔的样本抽出，可以构成 D 个子序列。即对于原始总采样样本序列 $\{x_0, x_1, \cdots, x_{DN-1}\}$，分解组成 D 个 N 点子序列：

子序列0: x_{0D+0} , x_{1D+0} , x_{2D+0} , ······ , $x_{(N-1)D+0}$;

子序列1: x_{0D+1} , x_{1D+1} , x_{2D+1} , ······ , $x_{(N-1)D+1}$;

子序列2: x_{0D+2} , x_{1D+2} , x_{2D+2} , ······ , $x_{(N-1)D+2}$;

······ , ······ , ······ , ······ , ······ ;

子序列D-1: x_{0D+D-1} , x_{1D+D-1} , x_{2D+D-1} , ······ , $x_{(N-1)D+D-1}$.

按照第三章DFT频谱分析理论可知，原始总体时间序列的有限离散傅立叶变换为

$$X_k = \sum_{n=0}^{DN-1} x_n W_{DN}^{nk}$$

指数因子

定义

$$W = e^{-j2\pi/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk} \qquad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W^{nk}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-nk} \qquad x_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W^{-nk}$$

性质

$$W^{k} = W^{kMod(N)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad kMod(N) = \begin{cases} k - \left|\frac{k}{N}\right| N, |k| \geq N \\ k, |k| < N \end{cases}$$

$$W^{N} = W^{0} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{kn} = \begin{cases} N, n = 0, \pm N \\ 0, n = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

$$X_k = X_{kMod(N)}$$

$$X_k = X^{*}_{N-k}$$

上式可以按照上述分解的D个子序列，改写成D个求和项，即

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+0} W_{DN}^{k(Dn+0)} + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+1} W_{DN}^{k(Dn+1)} + \cdots + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+D-1} W_{DN}^{k(Dn+D-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+0} W_{DN}^{k0} W_{DN}^{kDn} + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+1} W_{DN}^{k1} W_{DN}^{kDn} + \cdots + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+D-1} W_{DN}^{k(D-1)} W_{DN}^{kDn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+0} W_{DN}^{k0} W_{N}^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+1} W_{DN}^{k1} W_{N}^{kn} + \cdots + \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+D-1} W_{DN}^{k(D-1)} W_{N}^{kn} \\
&= \sum_{d=0}^{D-1} W_{DN}^{kd} \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+d} W_{N}^{kn}
\end{aligned}
$$

令

$$X_k^d = \sum_{n=0}^{N-1} x_{Dn+d} W_N^{kn} \ , (d = 0,1,\cdots D-1), (k = 0,1,\cdots N-1)$$

则上式可以简写成

$$X_k = \sum_{d=0}^{D-1} W_{DN}^{kd} X_k^d \ , (k = 0,1,\cdots DN-1)$$

由上式可以看出，总频谱是D次N点的DFT结果 X_k^d 相应乘以 W_{DN}^{kd} 后叠加的结果。根据复变函数理论，指数因子 W_{DN}^{kd} 在复平面上是一个幅值为一的单位圆上不同相位取值处的点，可以认为 W_{DN}^{kd} 是对谱值 X_k 的相位补偿修正。

综上所述，采用相位补偿法进行频率细化，只需将时间序列扩充D倍长，从中抽出D个N点序列作DFT变换，然后进行相应的相位补偿修正即可。

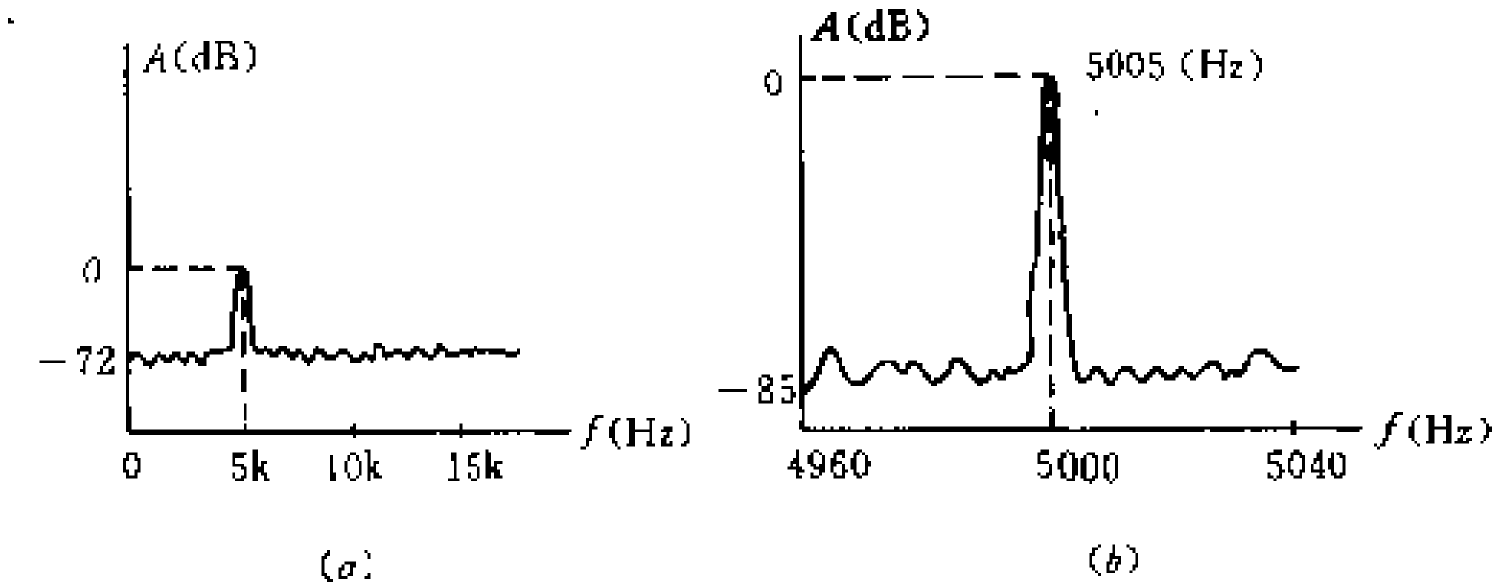
由于上述数学关系的推导，没有任何前提条件假设，所以没有频移法中二次重采样的混叠问题，更不存在由于数字滤波器特性不理想而引入的幅值和相位误差。

如果只需要一个指定水平的谱细化效果，也可以只进行相应的重新采样后进行频谱变换及相位修正计算，然后插入到原频谱之内即可。

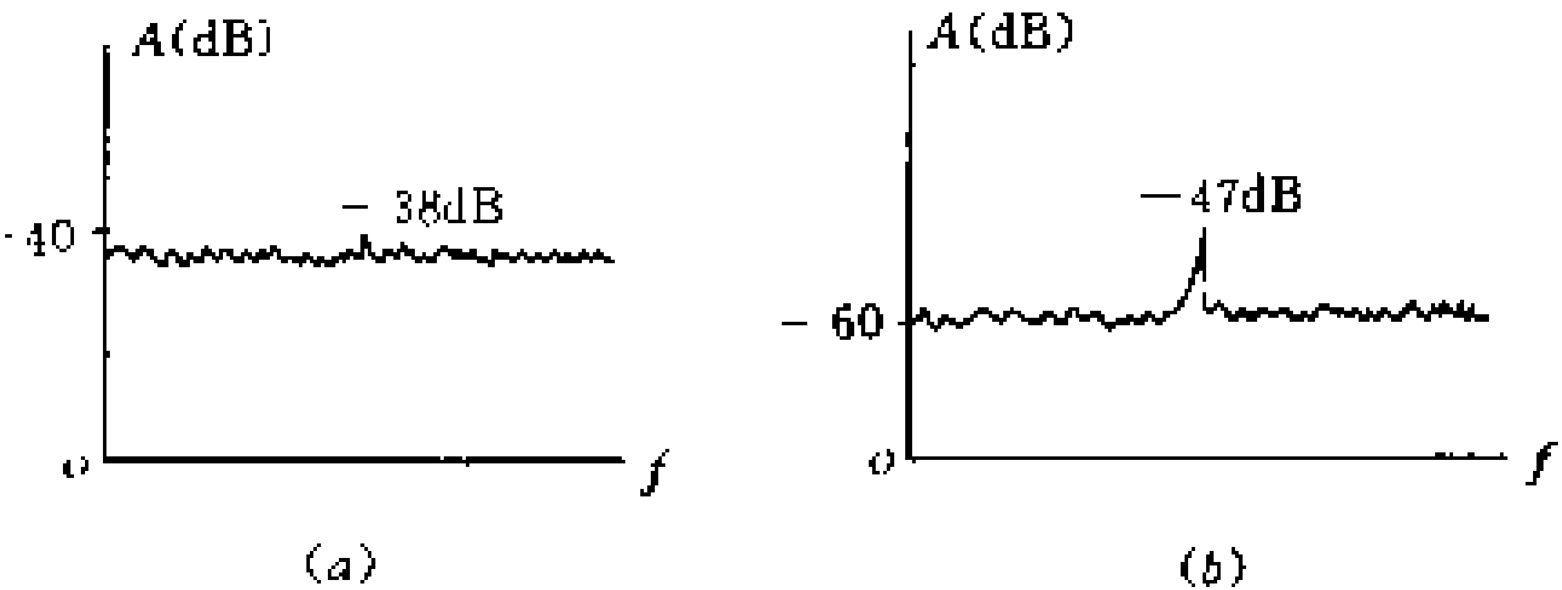
采用相位补偿法，特别需要注意的是，X_k 的 **k** 与 X_k^d 中的 **k** 的变量定义域的区别，W_{DN}^{kd} 与 W_N^{kn} 两个指数因子的周期性的区别。

3. 频率细化技术的应用

1. 提高频率分辨率
2. 降低频域泄漏，提高谱值精度
3. 增加信噪比，提高谱值精度



4. 分离被噪声淹没的单频率谱峰



事实上,本次介绍的频率细化技术中所谓的提高分辨率是指针对作同样点数的离散傅立叶变换而言的,即作细化D倍的N点细化谱实际上原始数据必须采DN点数据,这时候它比用N点原始数据直接做FFT而言频率分辨率提高了D倍,但如果把DN点原始数据全部做FFT,那它和细化谱的分辨率是一样的。

所以,频率细化技术本质上可以说是一种快速算法,它通过滤波重采样来降低采样频率,这样就可以用较少点数的FFT来实现较高的频率分辨率,当然,提高速度的代价就是只能对局部频带进行细化(而如果将ZFFT利用的所有原始数据全部直接做FFT的话,它做出的是整个频域的,而且频率分辨率和细化后的一样,甚至如果考虑细化时滤波所需去掉的点,直接FFT的频率分辨率可以更高)。

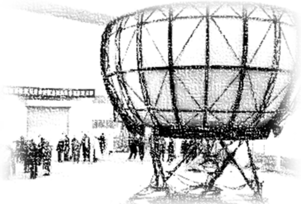
习题七

- 1. 简述频率移位法频率细化方法的基本步骤。

- 2. 简述相位补偿法频率细化方法的基本步骤。

频率移位法的频率细化技术

范例三

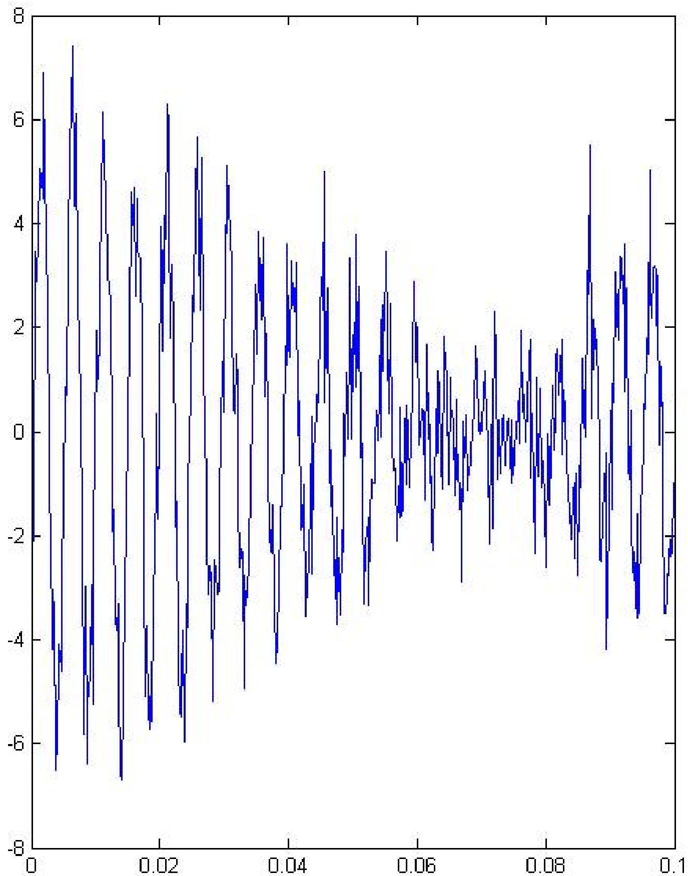


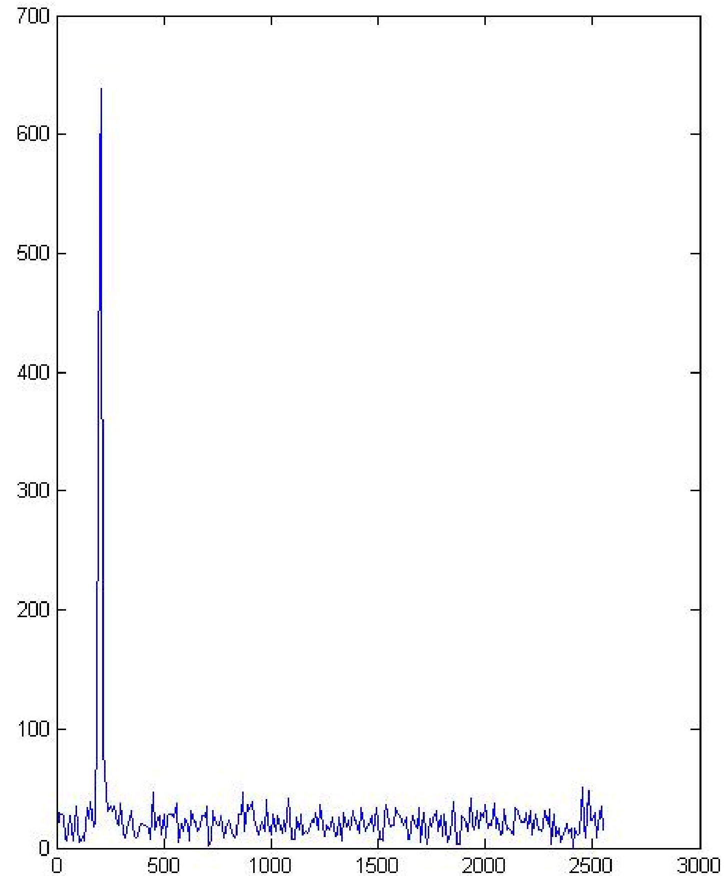
1. 原始信号

```
%%
%%% 原始信号
fs = 5120;
NN = 512;
tt = 0 : 1 / fs : 1 / fs * (NN - 1);
f1 = 202;
f2 = 204;
f3 = 208;
x = sin(2 * pi * f1 * tt) - 3 * cos(2 * pi * f2 * tt) + 4 * sin(2 * pi * f3 * tt) + randn(size(tt));
yx=fft(x,NN);
yy=abs(yx);

figure;
subplot(1, 2, 1);
plot(tt, x);
subplot(1, 2, 2);
plot((0:NN / 2-1) * fs / NN, yy(1:NN / 2));
```

➢ 信号效果图


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1

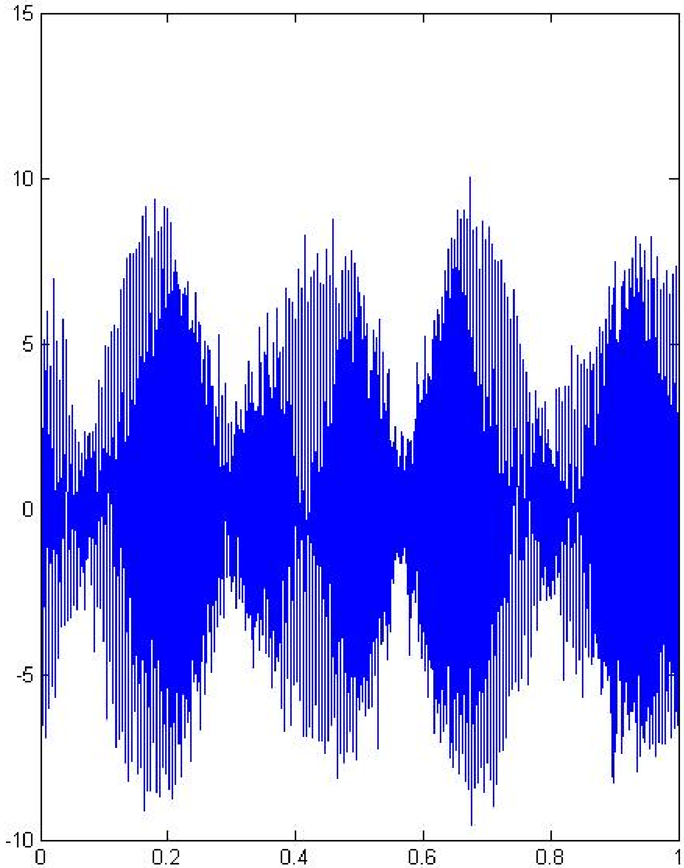

700
600
500
400
300
200
100
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

2. 频率移位法

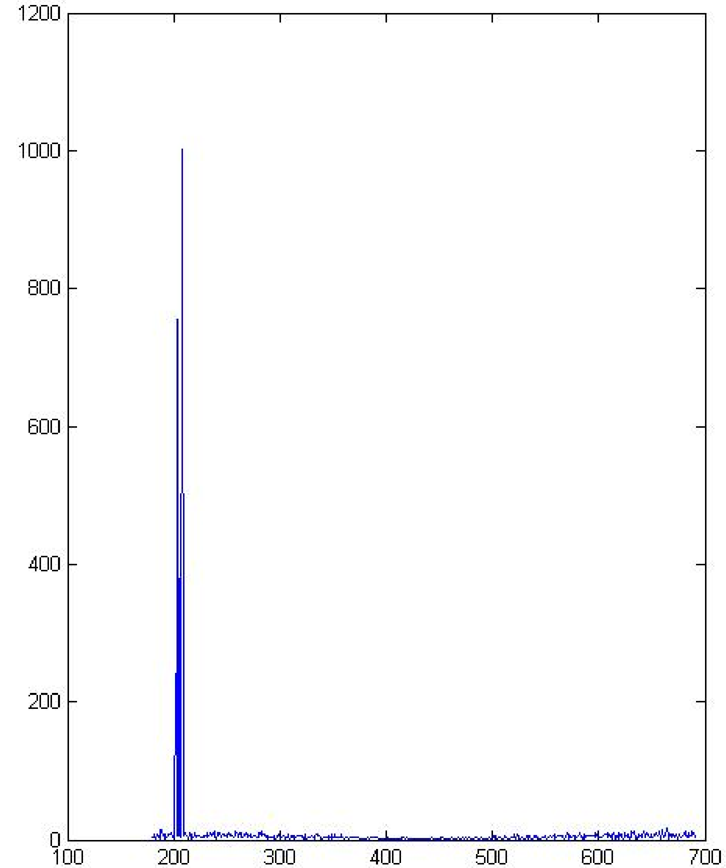
```
%%
%%% 频率移位法
fl = 180;
fh = 220;
f0 = fl;
D = 10;
N = NN * D;
t = 0 : 1 / fs : 1 / fs * (N - 1);
x0 = sin(2 * pi * f1 * t) - 3 * cos(2 * pi * f2 * t) + 4 * sin(2 * pi * f3 * t) + randn(size(t));

% 复调制移频/complex modulated signal
n = 0 : N-1;
x1 = x0 .* exp(-2 * pi * f0 / fs * n * j);
% 数字低通滤波/digital LFP
bw = fs / 2;
b = fir1(32, (fh - f0) / bw);
y = filter(b, 1, x1);
% 二次重采样/resampling
yd = zeros(1, NN);
for ii = 1 : length(yd)
    yd(ii) = y(ii * D);
end
% 复FFT处理/zoomed spectrum
Yd = fft(yd, NN);
YD=abs(Yd);
```

➢ 信号效果图



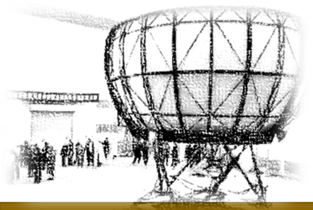
15
10
5
0
-5
-10
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

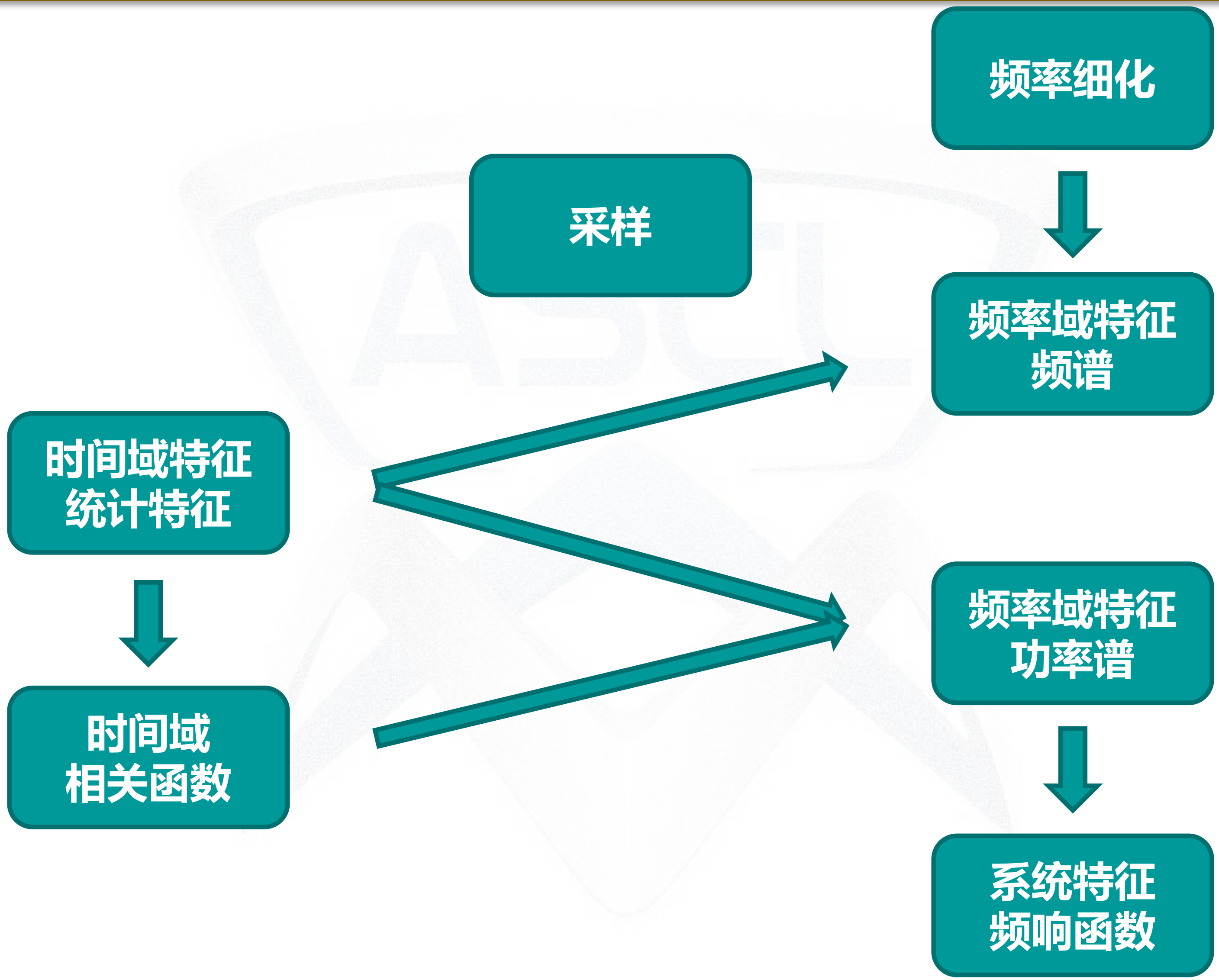


1200
1000
800
600
400
200
0
100
200
300
400
500
600
700

完毕， 感谢关注！

Q & A




频率细化
采样
频率域特征
频谱
时间域特征
统计特征
频率域特征
功率谱
时间域
相关函数
系统特征
频响函数