工程信号分析与处理

贾鑫 工学博士/副教授
吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

2021/11/22

本门课程内容

- §1 随机数据的统计特征 — 随机过程
- §2 试验数据的离散化 — 采样混叠
- §3 频谱分析技术 — 有限泄漏
- §4 功率谱的估计 — 窗函数周期图
- §5 相关函数的估计 — 循环卷积
- §6 频响函数的估计 — 相干分析
- §7 有限带宽频率分析技术 — 频率细化

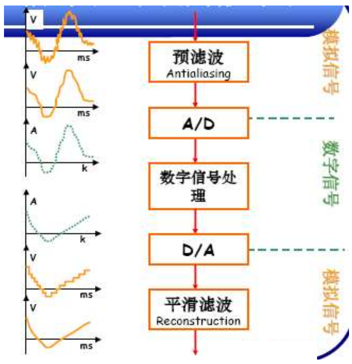
重点概念：**采样、混叠**

§2 试验数据的离散化

1. 采样的概念

1.1. 采样与量化

用数字方法处理模拟信号（连续）首先要把连续模拟信号离散为有序序列的数字信号，这种转换成为模/数转换（A/D），然后送入数字计算机或者用处理器进行运算；计算结果为数字量，还需把它转换为模拟量输出，称为数/模（D/A）转换。



- A/D转换包括三个步骤：
  - (1) 抽样（采样）；
  - (2) 量化；
  - (3) 编码。

X(t) → 采样器 → X(n) → 量化器 → Xq(n) → 编码器 → 011001

模拟信号　离散时间信号　量化信号　数字信号

✧采样——把已知的模拟信号每隔一定的时间 Δt 抽出一个样本数据。使连续信号

$$x(t) \xleftrightarrow{\Delta t} \sum x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t) = x_s(t)$$

(Δt 采样周期，$f_s = \dfrac{1}{\Delta t}$ 采样频率)

✧量化——用有限字长的数字量逼近模拟量，即以一定比例尺度读取脉冲序列的幅度，构成数字序列。

✧编码——把 $\{x(k)\}$ 变为二进制代码。

➢ D/A转换包括：

✧(1)解码；

✧(2)低通滤波。

✧解码——将数字量转换为台阶形的模拟量。

✧低通滤波——滤去阶形的模拟量中的高频成分使其成为平滑变化的模拟量。

✧注意：在上述各环节中，都将带来误差，本章主要研究离散采样的原理及其引入的离散混叠效应，以及预防的措施。

1. 采样的概念

❑1.2. 采样方式

✧直接采样——以 Δt 为间隔直接对连续信号 $x(t)$ 离散采样、量化，一般按时间顺序形成数字序列。

✧累积采样——给出 Δt 间隔后，累积某一区间的值构成 $x(k)$ 。

✧特征采样——不按时间先后顺序，而是按某一特定的规则读取特征数值，如峰值计数等。

❑1.2. 采样方式

✧若按 Δt（采样间隔）的特点分，还可分为：

- 等间隔采样(Δt =常值)；
- 不等间隔采样；
- 随机间隔抽样。

✧这里,我们讨论的是等间隔直接采样的问题。

1. 采样的概念

❑1.3. 采样要求

数字信号处理实际上是以曲线上的局部点集合的分析推测连续曲线的整体的信息，以局部代整体。那么，什么条件下，局部能够代表整体?

对于等间隔直接采样方式，取决于采样间隔 Δt 。

➢ Δt 过大，导致

✧丢失数据

✧具有不确定性

失真，畸变，即：$\{x(n\Delta t)\} \not\Leftrightarrow x(t)$

➢ Δt 过小，导致

✧点数过大，计算量增加，从而导致对硬件（如DSP）要求增加；

✧频率分辨率为 $\Delta f = \dfrac{1}{N\Delta t}$，分析点数一定的情况下 $\Delta t\downarrow, \Delta f\uparrow$ 从而频率域上的分辨率下降。

- 因此，必须确定一个选取 Δt 的准则，即在保证 $\{x(k\Delta t)\}$ 能够代表 $x(t)$ 的条件下，$\Delta t_{\max}=?$
- 数学命题：什么条件下，$\{x(k\Delta t)\}$ 可唯一确定或恢复 $x(t)$？

2. 采样的数学描述

2.1. 时域数学描述

采样过程由采样电路实现。实际上，它是每隔一定的时间产生一个触发脉冲，瞬间接通电路，使通过，然后断路，并把通过的瞬间 在采样保持电路中保持。这一过程就如电影摄影机一样，打开瞬间在底片上感光，留影，从而使连续动作在底片上留下一连串瞬间动作的胶卷。

- 数学上对这一过程的描述可表达为

$$x(t)\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t)$$

- 脉冲序列是由周期为 Δt，无限重复产生的单位脉冲函数 $\delta(t)$ 构成。
- $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_n)$ 定义为：$\delta(t-t_n)=\begin{cases}0,t\neq t_n\\ \infty,t=t_n\end{cases}$
- 且 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_n)dt=1$

- 其主要性质为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_n)dt=x(t_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0) \quad —①$$

- 称为脉冲函数的筛选性。

- 此外：

$$x(t_n)=x(t_n)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_n)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_n)\delta(t-t_n)dt \quad —②$$

- 与式①比较有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_n)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_n)\delta(t-t_n)dt$$

- 利用被积函数相等的条件，并令 $t_n=n\Delta t$，则

$$x(t).\delta(t-n\Delta t)=x(n\Delta t)\delta(t-n\Delta t)$$

- 所以

$$x(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta t).\delta(t-n\Delta t)\overset{令}{=}x_s(t)$$

- 上式表明：连续信号与脉冲序列相乘，得到一个被加权的脉冲序列（周期不变），该脉冲序列是以 $x(t)$ 在 $n\Delta t$ 时刻的值 $x(n\Delta t)$ 为加权系数，对 $x_s(t)$ 进行量化编码，即得到数字序列 $\{x(n\Delta t)\}$

2. 采样的数学描述

□2.2. 频域数学描述

下面我们分析一下采样序列的频域表达，试图寻找与连续信号的频谱的关系

因为 $X_s(f)$ 是 $x_s(t)$ 的Fourier变换，即

$$
\begin{aligned}
X_s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum x(n\Delta t)\delta(t-n\Delta t)\right]e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\sum \delta(t-n\Delta t)\right]e^{-j2\pi ft}dt \\
&= X(f) * F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t)\right]
\end{aligned}
$$

- 式中

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

是连续信号的频谱。

- 根据《积分变换》的理论，可以导出：单位脉冲响应序列的频谱 $f_s = \frac{1}{\Delta t}$，仍是一个脉冲序列，但是周期是 f_s，脉冲序列幅值是 f_s，即：

$$\mathrm{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t)\right] = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s)$$

- 利用卷积定义，可进一步导出

$$
\begin{aligned}
X_s(f) &= X(f) * f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_s) \\
&= f_s\int_{-\infty}^{\infty}\left[X(f-f').\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f'-nf_s)\right]df' \\
&= f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[X(f-f').\delta(f'-nf_s)\right]df' \\
&= f_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f-nf_s)
\end{aligned}
$$

- 写成展开式

$$X_s(f) = f_s\left[\cdots + X(f-2f_s) + X(f-f_s) + X(f) + X(f+f_s) + X(f+2f_s) + \cdots\right]$$

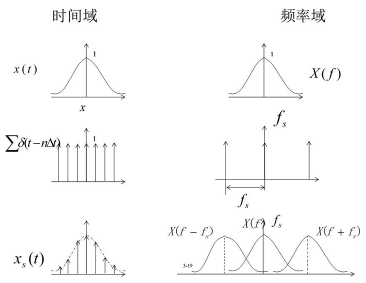
- 上式即是采样序列的频谱与原连续信号的频谱之间的关系式，而常称之为一般采样原理。

2. 采样的数学描述

□2.3. 频域混叠现象

上述公式很容易易通过图形加以解释：

一般采样原理



- 解释：
  - (1) 时域上连续信号的离散化，将导致频域上由单一波形信号变为周期信号。
  - (2) 幅值（频谱）增大了 f_s 倍。
  - (3) $X_s(f)$ 中每一周期波形与 $X(f)$ 相似，包含有 $X(f)$ 的信息。亦即二者不相同又含有原信息，说明可以从离散序列得到连续函数的信息。
  - (4) 如果 f_s 过小，即 Δt 过大，或 $X(f)$ 带宽> $\frac{f_s}{2}$，则会发生频谱重叠现象，迭加后使 $X(f)$ 发生失真。这种现象称为混叠。为了避免失真，应对 Δt 及对 $X(f)$ 带宽 f_c 作一定限制。

3. Shonnon采样定理及其应用

3.1. 采样定理

设连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$，以 Δt 采样得时间序列离散信号 $x_s(t)=\{x(n\Delta t)\}$，其频谱为 $X_s(f)$。若满足：

(1) 当 $|f|\geq f_N$ 时，$X(f)=0$；

(2) $\Delta t\leq\frac{1}{2f_c}$ 或 $f_s=\frac{1}{\Delta t}\geq 2f_c$；

则 $x_s(t)$、$X_s(f)$ 可唯一确定 $x(t)$、$X(f)$。

➢ 即：

当 $|f|\leq f_N$ 时，有

$$X(f)=\Delta t X_s(f)\ ,\quad -\frac{f_s}{2}\leq f\leq\frac{f_s}{2}$$

或

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta t).\frac{Sin\pi f_s(t-n\Delta t)}{\pi f_s(t-n\Delta t)}$$

信号恢复工具

➢ 物理意义：

✧条件(1)是对 $X(f)$ 的带宽限制，$x(t)$ 中最大频率 $f_{\max}\leq f_N$，其中 f_N 称为Nyquist 频率。

✧条件(2)是给定 Δt 的选择准则，只有满足条件，局部才能表达整体，其中 f_c 称为截止频率。

3. Shonnon采样定理及其应用

3.2. 采样定理的应用

Shonnon定理给出了采样必须遵守的准则：

(1) $X(f)$ 中 $\max f\leq f_N$；

(2) $\Delta t\leq\frac{1}{2f_c}$ 或 $f_s\geq 2f_c$；

否则产生**混淆**。

➢ 有两种处理办法：

✧(1) 估计 $x(t)$ 中最大频率 $f_{\max}$，确定截至频率 f_c =(1.1 ~ 1.25) $f_{\max}$，选取 $\Delta t=\frac{1}{2f_c}$，进行试处理。

✧(2) 确定需要分析的频率最大值 $f_{\max}$，对 $x(t)$ 进行低通滤波（截至频率 f_c）。

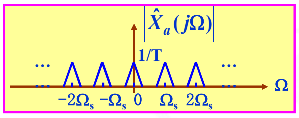
取 $f_s=\frac{1}{\Delta t}=2f_N=2f_{\max}\approx(2\sim 8)f_c$ 进行处理。

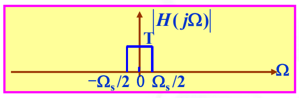
4. 信号的恢复

3.2. 采样定理的应用

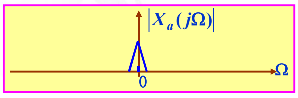
如果满足Shonnon采样定理，信号的最高频率小于折叠频率，则抽样后信号的频谱不会产生混叠，故可以恢复原信号。

将采样后的数据通过一个理想低通滤波器得到原始信号的估计。





$$H(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0 & |\Omega|\geq\Omega_s/2\end{cases}$$



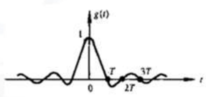
实际上，理想的低通滤波器是不能实现的，但我们可以在一定精度范围内用一个可实现的滤波器来逼近它。

问题：如何由抽样信号$\hat{x}_a(t)$来恢复原来的模拟信号$x_a(t)$？

思路：因为抽样后的频谱是乘以理想低通滤波器的频谱后得到原信号的频谱的，所以对应到时域，应该是抽样信号与理想低通滤波器对应时域信号h(t)的卷积。这个卷积的结果计为$y_a(t)$，然后，我们将它与$x_a(t)$进行对比。

理想低通滤波器的冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$
$$=\frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2}e^{j\Omega t}\,d\Omega$$
$$=\frac{Sin[\frac{\Omega_s}{2}t]}{\frac{\Omega_s}{2}t}=\frac{Sin[\frac{\pi}{T}t]}{\frac{\pi}{T}t}$$



辛格函数

$$y_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(\tau)\delta(\tau-mT)\right]h(t-\tau)d\tau$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(\tau)h(t-\tau)\delta(\tau-mT)d\tau$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)h(t-mT)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$

$$y_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)\boxed{\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}}$$

内插函数

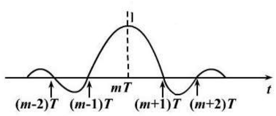
说明：

(1) 内插函数只有在抽样点mT上为1。

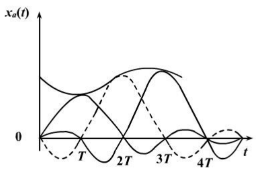
(2) $x_a(t)$等于$x_a(mT)$乘上对应的内插函数的总和。

(3) 在每一个抽样点上，只有该点所对应的内插函数等于一，这说明在抽样点上信号值不变$y_a(mT)=x_a(mT)$，而抽样点之间的信号$y_a(t)$，(其中$t\neq mT$)由各加权抽样函数波形的延伸叠加而成。(m从-∞～∞)

$$h(t-mT)=\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$



内插函数



抽样的内查恢复

信号的抽样值$x_a(mT)$经内插函数得到连续信号$y_a(t)$。

- 思考：
  - 上述过程描述的是理想采样过程，与实际的采样过程有什么区别，采样和采样恢复有什么异同？

习题二

- 1. 简述采样频率、奈奎斯特频率的概念；
- 2. 陈述采样混叠的理论分析与几何解释；
- 3. 阐述香农采样定理（第二采样定理）及工程应用方法。

1、原始信号的时域截取
2、截断信号的幅频特性
3、时域采样过程
4、采样序列频谱分析

范例一

1. 原始信号的时域截取

- 原始信号

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\sin(2\pi\times 15t)+2\sin(2\pi\times 220t)$$

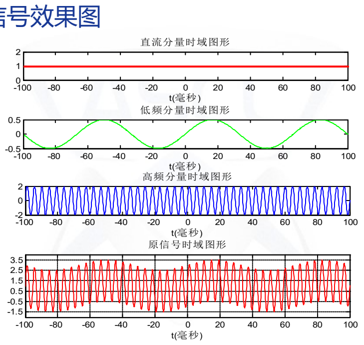
- 截取时间范围

$$-100\,ms \le t \le 100\,ms$$

- 采样点数

$$N=1024$$

- 时域信号效果图



2. 截断信号的幅频特性

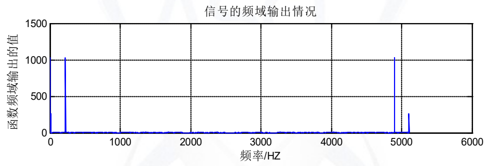
- 时域信号采样特征

$$T=200ms \qquad N=1024 \qquad f_s=\frac{N}{T}=5120Hz$$

- 时/频域转换工具

FFT（快速傅里叶变换）

- 频域信号效果图



- 说明
  - 由于时域采样频率大（5000Hz），采样间隔很小（0.0002s），故频域带宽大。
  - 根据傅立叶变换的性质，在频谱图中表现为关于折叠频率轴对称的频谱。
  - 信号中各种频率成分（直流/低频/高频分量）在图中都有所体现。

- 由于给定信号包含直流分量、低频分量（15Hz）、高频分量（220Hz），按照采样的几种情况分别讨论，即：
  - 过采样 $f_{s1}=500Hz$
  - 临界采样 $f_{s1}=440Hz$
  - 欠采样 $f_{s1}=200Hz$
  - 严重欠采样 $f_{s1}=50Hz$
- 此处选择FFT采用的计算点数取为256。

- 以过采样情况为例：
  - 采样频率为 $f_{s1}=500Hz$
  - 采样间隔即为 $\Delta t=\dfrac{1}{f_s}=0.002s$
  - 截取窗口的宽度为 $T=N\Delta t=256\times 0.002=0.512s$

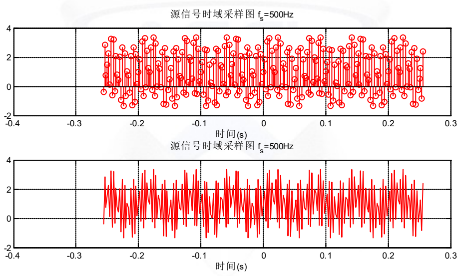
3. 时域采样过程

- 根据Shannon采样定理，要想能从采样后的序列中恢复原始信号，必须使采样频率大于或等于信号原始频率的2倍，即应满足关系式：

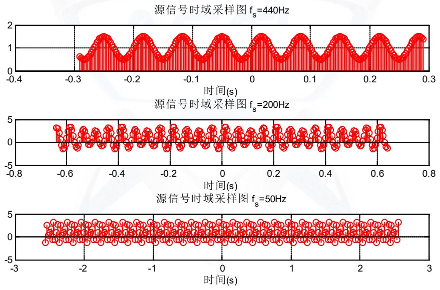
$$f_s \geq 2f_0$$

- f0是信号原始频率，fs采样频率。

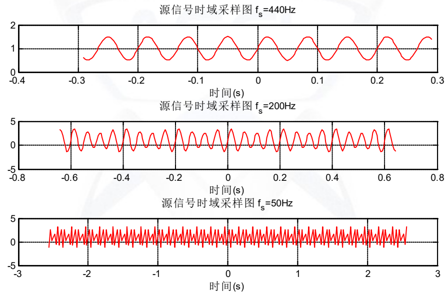
- 过采样时域采样效果图



- 其他采样情况时域采样效果图（采样点）



- 其他采样情况时域采样效果图（曲线）

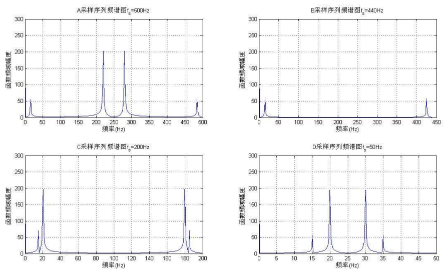


- 采样结果分析
  - ✧1、当过采样（ $f_{s1}=500Hz>2f_0$ ）时，采样后的图形较好地保持了原图形的外观，这一过程可以作为对Shannon采样定理的验证；
  - ✧2、当临界采样（ $f_{s1}=440Hz=2f_0$ ）时，由图中可以看出采样后序列频率为15Hz，说明采样脉冲仅仅采集到原信号中的低频分量。（为什么？）

- 采样结果分析
  - ✧3、当欠采样（ $f_{s1}=200Hz<f_0$ ）时，得到的图形与原图形相差较大，信号失真；
  - ✧4、当严重欠采样（ $f_{s1}=50Hz<<f_0$ ）时，从图形中可以看出信号失真已经相当严重。

4. 采样序列频谱分析

- 通过FFT对前文中四种采样情况频域变换，效果图如下：



- 采样序列频谱分析
  - ✧1、过采样：各种频率成分无混叠。
  - ✧2、临界采样：只体现低频成分。
  - ✧3、欠采样：产生混叠。
  - ✧4、严重欠采样：严重混叠。


完毕，感谢关注!
Q & A
吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室