

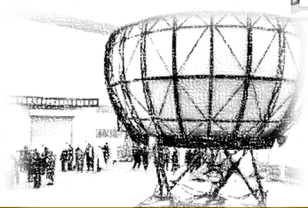


工程信号分析与处理

贾鑫 工学博士/副教授

吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

2022/4/12



吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

本门课程内容

§ 1 随机数据的统计特征

随机
过程

§ 2 试验数据的离散化

采样
混叠

§ 3 频谱分析技术

有限
泄漏

§ 4 功率谱的估计

窗函数
周期图

§ 5 相关函数的估计

循环
相关

§ 6 频响函数的估计

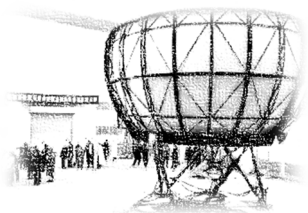
相干
分析

§ 7 有限带宽频率分析技术

频率
细化

重点概念：相干分析

§ 6 频响函数的估计



1. SISO系统的频响函数及其估计

对于SISO系统，其频响函数的估计有很多计算方法，主要的有三种估计式。在没有噪声污染的情况下，它们的估计是等价的。但是实际上，由于不可避免的存在噪声，三种估计有所差异。

本节讨论在主要的三种噪声污染下，三种传统估计式与真值之间的误差。

1. SISO系统的频响函数及其估计

□1.1. 随机激励下的频响函数

考虑一个SISO时不变线性系统，其频率响应函数为 $H(\omega)$ 。设随机输入信号为 $x(t)$ ，对应的响应信号为 $y(t)$ ，其傅立叶变换分别为 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ ，则有：

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

上式两端乘以 $X^*(\omega)$ ，取时间平均及集合平均，并注意 $H(\omega)$ 与平均无关，则有：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Y(\omega)X^*(\omega)] = H(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X(\omega)X^*(\omega)]$$

即

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)$$

如果 $S_x(\omega)$ 不为零，则可得系统的**频响函数的第一种计算式**

$$H_1(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)}$$

同样，如果在系统输入/出频谱式两端乘以 $Y^*(\omega)$ ，
取时间平均和集合平均，得

$$S_y(\omega) = H(\omega) S_{yx}(\omega)$$

如果 $S_{yx}(\omega)$ 不为零，则可得系统的频响函数的
第二种计算式

$$H_2(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(\omega)}$$

另外，将系统输入/出频谱式两端取共轭，得

$$Y^*(\omega) = H^*(\omega)X^*(\omega)$$

乘以原输入/出频谱式，并取时间平均和集合平均，得

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

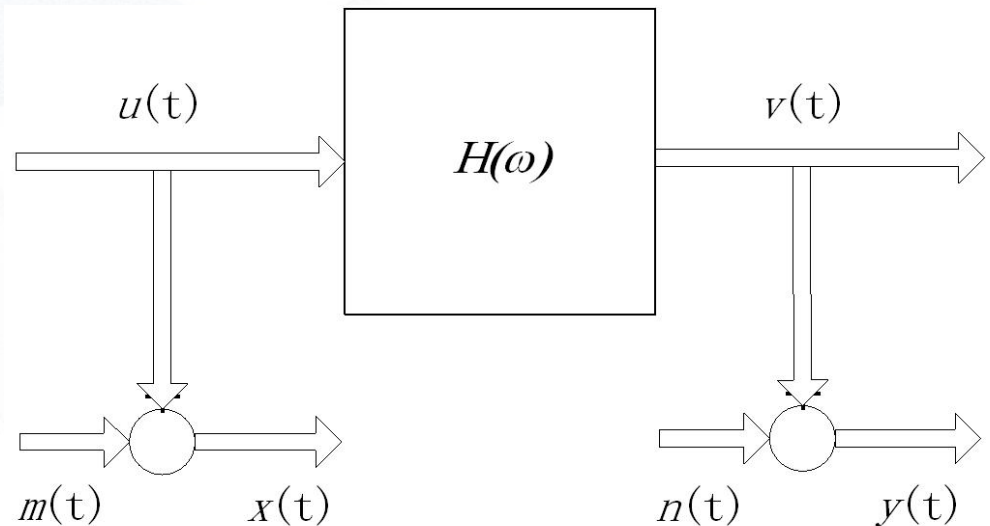
可得系统的**频响函数的幅值计算式**

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}$$

1. SISO系统的频响函数及其估计

□1.2. 频响函数的估计方法

考虑一个SISO时不变线性系统，其频率响应函数为 $H(\omega)$ 。设系统的实际输入信号为 $u(t)$ ，响应信号为 $v(t)$ ，其傅立叶变换分别为 $U(\omega)$ 和 $V(\omega)$ ，它们的测量信号分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，其傅立叶变换分别为 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 。



➤ a. 输出端噪声的影响

若只有输出端受到噪声信号 $n(t)$ 的污染，并设它与系统的 $u(t)$ 和 $v(t)$ 无关。则有：

$$x(t) = u(t)$$

$$X(\omega) = U(\omega)$$

$$y(t) = v(t) + n(t)$$

$$Y(\omega) = V(\omega) + N(\omega)$$

① 第一估计式:

根据第一估计式的定义, 有:

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} \\&= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Y(\omega)X^*(\omega)]}{S_x(\omega)} \\&= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} E[V(\omega)X^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[N(\omega)X^*(\omega)] \right\}}{S_u(\omega)} \\&= \frac{S_{xv}(\omega) + S_{xn}(\omega)}{S_u(\omega)} = \frac{S_{uv}(\omega) + S_{un}(\omega)}{S_u(\omega)}\end{aligned}$$

由于噪声 $n(t)$ 与激励 $u(t)$ ，亦即 $x(t)$ 无关，故根据大数定律，平均次数足够多时 $S_{un}(\omega)$ 为零，则

$$\hat{H}_1(\omega) = \frac{S_{uv}(\omega)}{S_u(\omega)} = H_1(\omega)$$

结果表明：只有输出端响应受到噪声污染时，通过平均，根据第一估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的无偏估计。

② 第二估计式:

根据第二估计式的定义, 有:

$$\begin{aligned}\hat{H}_2(\omega) &= \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(\omega)} \\&= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Y(\omega)Y^*(\omega)]}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X(\omega)Y^*(\omega)]} \\&= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} E[V(\omega)V^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[N(\omega)V^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[V(\omega)N^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[N(\omega)N^*(\omega)] \right\}}{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} E[X(\omega)V^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[X(\omega)N^*(\omega)] \right\}} \\&= \frac{S_v(\omega) + S_{vn}(\omega) + S_{nv}(\omega) + S_n(\omega)}{S_{vx}(\omega) + S_{nx}(\omega)} = \frac{S_v(\omega) + S_{vn}(\omega) + S_{nv}(\omega) + S_n(\omega)}{S_{vu}(\omega) + S_{nu}(\omega)}\end{aligned}$$

由于噪声 $n(t)$ 与响应 $v(t)$ ，以及激励 $u(t)$ 亦即 $x(t)$ 无关，故根据大数定律，平均次数足够多时 $S_{vn}(\omega)$ 、 $S_{nv}(\omega)$ 和 $S_{un}(\omega)$ 都为零，则

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{S_v(\omega) + S_n(\omega)}{S_{vu}(\omega)} = H_2(\omega) \left(1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)} \right)$$

式中，

$$H_2(\omega) = \frac{S_v(\omega)}{S_{vu}(\omega)}$$

可见，只有输出端响应受到噪声污染时，通过平均，根据第二估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的有偏估计，是过估计。

③ 第三估计式:

根据第三估计式的定义, 有:

$$\begin{aligned} |\hat{H}_a(\omega)|^2 &= \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} \\ &= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Y(\omega)Y^*(\omega)]}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X(\omega)X^*(\omega)]} \\ &= \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} E[V(\omega)V^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[N(\omega)V^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[V(\omega)N^*(\omega)] + \frac{1}{T} E[N(\omega)N^*(\omega)] \right\}}{\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} E[U(\omega)U^*(\omega)] \right\}} \\ &= \frac{S_v(\omega) + S_{vn}(\omega) + S_{nv}(\omega) + S_n(\omega)}{S_u(\omega)} = \frac{S_v(\omega) + S_{vn}(\omega) + S_{nv}(\omega) + S_n(\omega)}{S_u(\omega)} \end{aligned}$$

由于噪声 $n(t)$ 与响应 $v(t)$ ，故根据大数定律，平均次数足够多时 $S_{vn}(\omega)$ 和 $S_{nv}(\omega)$ 都为零，则

$$|\hat{H}_a(\omega)|^2 = \frac{S_v(\omega) + S_n(\omega)}{S_u(\omega)} = |H_a(\omega)|^2 \left(1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)} \right)$$

式中，

$$|H_a(\omega)|^2 = \frac{S_v(\omega)}{S_u(\omega)}$$

可见，只有输出端响应受到噪声污染时，通过平均，根据第三估计式得到的频响函数幅值的估计是实际频响函数的有偏估计，也是过估计。

因此，只有输出响应受到噪声污染时，频响函数的三种估计式有如下关系：

$$|H_1(\omega)| = |H(\omega)| < |H_a(\omega)| < |H_2(\omega)|$$

➤ b. 输入端噪声的影响

若只有输入端受到噪声信号 $m(t)$ 的污染，并设它与系统的 $u(t)$ 和 $v(t)$ 无关。则有：

$$x(t) = u(t) + m(t)$$

$$X(\omega) = U(\omega) + M(\omega)$$

$$y(t) = v(t)$$

$$Y(\omega) = V(\omega)$$

① 第一估计式:

根据第一估计式的定义, 有:

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} \\ &= \frac{S_{uv}(\omega)}{S_u(\omega) + S_m(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)}}\end{aligned}$$

结果表明: 只有输入端激励受到噪声污染时, 通过平均, 根据第一估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的有偏估计, 是欠估计。

② 第二估计式:

根据第二估计式的定义, 有:

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(\omega)} = \frac{S_v(\omega)}{S_{vu}(\omega)} = H_2(\omega)$$

可见, 只有输入端激励受到噪声污染时, 通过平均, 根据第二估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的无偏估计。

③ 第三估计式:

根据第三估计式的定义, 有:

$$\left| \hat{H}_a(\omega) \right|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{S_v(\omega)}{S_u(\omega) + S_m(\omega)} = \frac{|H_a(\omega)|^2}{1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)}}$$

可见, 只有输入端激励受到噪声污染时, 通过平均, 根据第三估计式得到的频响函数幅值的估计是实际频响函数幅值的有偏估计, 也是欠估计。

所以，只有输入激励受到噪声污染时，频响函数的三种估计式有如下关系：

$$|H_1(\omega)| < |H_a(\omega)| < |H(\omega)| = |H_2(\omega)|$$

➤ c. 输入/输出端复合噪声的影响

若系统的输入/输出端分别受到噪声信号 $m(t)$ / $n(t)$ 的污染，并设它们与系统的 $u(t)$ 和 $v(t)$ 无关。则有：

$$x(t) = u(t) + m(t)$$

$$X(\omega) = U(\omega) + M(\omega)$$

$$y(t) = v(t) + n(t)$$

$$Y(\omega) = V(\omega) + N(\omega)$$

① 第一估计式:

根据第一估计式的定义, 有:

$$\hat{H}_1(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{S_{uv}(\omega)}{S_u(\omega)} \bigg/ \left(1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)} \right) = H_1(\omega) \bigg/ \left(1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)} \right)$$

可见, 在系统输入激励和输出响应都受到噪声污染时, 通过平均, 根据第一估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的有偏估计, 是欠估计, 并且与响应信号中的噪声无关。

② 第二估计式:

同理，根据第二估计式的定义，可以推导出：

$$\hat{H}_2(\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{yx}(\omega)} = \frac{S_v(\omega)}{S_{vu}(\omega)} \left(1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)} \right) = H_2(\omega) \left(1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)} \right)$$

上式表明，在系统输入激励和输出响应都受到噪声污染时，通过平均，根据第二估计式得到的频响函数估计是实际频响函数的有偏估计，是过估计，并且与系统的输入噪声无关。

③ 第三估计式:

根据第三估计式的定义, 可以推得:

$$\left| \hat{H}_a(\omega) \right|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{S_v(\omega) + S_n(\omega)}{S_u(\omega) + S_m(\omega)} = \frac{S_v(\omega)}{S_u(\omega)} \left(\frac{1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)}}{1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)}} \right) = \left| H_a(\omega) \right|^2 \left(\frac{1 + \frac{S_n(\omega)}{S_v(\omega)}}{1 + \frac{S_m(\omega)}{S_u(\omega)}} \right)$$

进一步分析上式, 可以得出下述结论: 在系统输入激励和输出响应都受到噪声污染时, 通过平均, 根据第三估计式得到的频响函数幅值的估计 $\left| \hat{H}_a(\omega) \right|$ 是较 $\left| \hat{H}_1(\omega) \right|$ 和 $\left| \hat{H}_2(\omega) \right|$ 都更为接近实际频响函数幅值 $\left| H(\omega) \right|$ 的估计。

因此，在系统输入激励和输出端响应都受到噪声污染的情况下，频响函数的三种估计式有如下关系：

$$|H_1(\omega)| < |H_a(\omega)| \approx |H(\omega)| < |H_2(\omega)|$$

综上所述，根据上述所有分析过程，可以进一步获得以下几点结论：

- a) 频响函数的第一估计式可以抑制输出响应噪声，第二估计式则可以抑制系统的输入激励噪声；
- b) 在各种噪声情况下，第一、第二估计式给出了实际频响函数的范围：

$$|H_1(\omega)| \leq |H(\omega)| \leq |H_2(\omega)|$$

- c) 在受到噪声的情况下，第三估计式虽然与实际频响函数最为接近，但是由于它只能给出频响幅值的估计，无法获得相频特性信息，故在实际中很少使用。

1. SISO系统的频响函数及其估计

□1.3. 常相干函数

根据上面的第二点综合结论，可知：

$$0 \leq \frac{|H_1(\omega)|}{|H_2(\omega)|} \leq 1$$

将第一、二无偏估计式代入上式，可知：

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}(-\omega) = S_{xy}^*(\omega)$$

$$\frac{|H_1(\omega)|}{|H_2(\omega)|} = \frac{|S_{xy}(\omega)S_{yx}(\omega)|}{|S_x(\omega)S_y(\omega)|} = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{S_{xy}(\omega)S_{xy}^*(\omega)}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{S_{xy}(\omega)S_{yx}(\omega)}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}$$

上式称为**相干函数（凝聚函数）**，记为：

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}$$

根据互谱不等式，显然有：

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$$

如果测试信号不受噪声污染, $H_1(\omega)$ 等于 $H_2(\omega)$, 则 $\gamma_{xy}^2(\omega)$ 等于 **1**。如果测试信号完全被噪声淹没, 则 $\gamma_{xy}^2(\omega)$ 将趋于 **0**。所以, 相干函数反映了测试信号受噪声污染的程度。相干函数数值越大, 说明噪声污染越小。

在无噪声的情况下,

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \gamma_{uv}^2(\omega) = \frac{|S_{uv}(\omega)|^2}{S_u(\omega)S_v(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} = 1$$

如果从这个意义上而言，对于两个任意信号，相干函数反映了两个信号的相干关系。如果两个信号的相干函数等于1，则说明这两个信号之间必定存在类似理想无噪声的线性系统输入/出之间的相干关系。

值得指出的是，线性系统这一点非常重要。如果系统具有非线性特性，其输入输出之间的关系不能由传递函数完全表达，相干函数将不等于1，会降低。

通常，在实际情况下，当相干函数大于 0 但小于 1 时，有下面四个主要原因的一个或多个成立：

- a) 测量中有外界噪声；
- b) 两个信号之间的系统不是线性的；
- c) 系统有测量输入之外的其它激励源；
- d) 谱估计中有偏度误差，主要包括采样混叠、频率泄漏、分辨率不够，以及计算误差等等。

一般来讲，相干函数大于 0.8 可以认为系统的干扰很小，如果相干函数小于 0.5，则说明必然有不可忽视的噪声存在。

当系统只有输出响应噪声时，而且与系统的输入/输出都不相关时，频响函数的第一估计式是系统频响函数的无偏估计，则系统的输出谱可以表示为

$$S_v(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)} S_x(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} S_y(\omega) = \gamma_{xy}^2(\omega) S_y(\omega)$$

通常将相干函数与输出自功率谱的乘积称为**相干输出谱**。上式表明，相干输出谱可以解释为输出功率谱中，由线性系统形成的部分。

输出噪声功率谱可以通过下式计算

$$S_n(\omega) = S_y(\omega) - S_v(\omega) = [1 - \gamma_{xy}^2(\omega)] S_y(\omega)$$

它可以解释为线性运算时没有计及的由于上述四个原因形成的那部分输出。

上式可以改写成

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = 1 - \frac{S_n(\omega)}{S_y(\omega)}$$

因此，相干函数的下降可以理解为在各个频率点的输出信噪比的下降。

2. MIMO系统的频响应函数及其估计

□2.1. MIMO系统的频响应函数

考虑一个MIMO多自由度的时不变线性系统，其频率响应函数为 $H(\omega)$ 。在 m 个输入平稳随机激励的作用下，其 n 个输出响应也是平稳的随机过程。设随机输入和响应信号分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，其傅立叶变换分别为 $X(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ ，则有

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

上式展开写成矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1m}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & & H_{2m}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nm}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_m(\omega) \end{bmatrix}$$

上式两端右乘 $X^H(\omega)$ ，取时间平均及集合平均，并注意 $H(\omega)$ 与平均无关，则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[Y(\omega)X^H(\omega)] = H(\omega) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X(\omega)X^H(\omega)]$$

上式即为

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)$$

式中互谱矩阵为

$$S_{xy}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x1y1}(\omega) & S_{x1y2}(\omega) & \cdots & S_{x1yn}(\omega) \\ S_{x2y1}(\omega) & S_{x2y2}(\omega) & & S_{x2yn}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{xmy1}(\omega) & S_{xmy2}(\omega) & \cdots & S_{xmy n}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^H(\omega)$$

自谱矩阵为

$$S_x(\omega) = \begin{bmatrix} S_{x1x1}(\omega) & S_{x1x2}(\omega) & \cdots & S_{x1xm}(\omega) \\ S_{x2x1}(\omega) & S_{x2x2}(\omega) & & S_{x2xm}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{xmx1}(\omega) & S_{xmx2}(\omega) & \cdots & S_{xmxm}(\omega) \end{bmatrix}$$
$$S_y(\omega) = \begin{bmatrix} S_{y1y1}(\omega) & S_{y1y2}(\omega) & \cdots & S_{y1yn}(\omega) \\ S_{y2y1}(\omega) & S_{y2y2}(\omega) & & S_{y2yn}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{yny1}(\omega) & S_{yny2}(\omega) & \cdots & S_{ynyn}(\omega) \end{bmatrix}$$

如果 $S_x(\omega)$ 不为零，则可得系统的频响函数的第
一种计算式

$$H_1(\omega) = S_{xy}(\omega) S_x^{-1}(\omega)$$

同样，如果在系统输入/出频谱式两端右乘 $Y^H(\omega)$ ，
取时间平均和集合平均，得

$$S_y(\omega) = H(\omega) S_{yx}(\omega)$$

从上式可以得知，当输入/输出数目不相等时，
 $S_{yx}(\omega)$ 不是方阵，与SISO系统不同，不能利用上式
估计频响函数矩阵。

将系统输入/出频谱式两端取转置共轭，得

$$Y^H(\omega) = H^H(\omega)X^H(\omega)$$

以上式右乘原输入/出频谱式，并取时间平均和集合平均，得

$$S_y(\omega) = H(\omega)S_x(\omega)H^H(\omega)$$

从上式可以看出，对于一般情况下，上式也很难用于MIMO系统的频响函数矩阵的估计计算。

所以，对于MIMO系统，通常采用**第一种估计方法**去计算频响函数矩阵。

采用这种估计方法的缺点是：在某些频率点处，有可能出现输入自谱矩阵条件数很高，这时，这种估计将会引起很大的估计偏差；当输入自谱矩阵奇异时，估计失败。

2. MIMO系统的频响函数及其估计

□2.2. 频响函数的MISO估计方法

考虑对于MISO情况的系统频响函数估计相对简单，在理论上可以进行分析，有助于理解频响函数和相干函数在MIMO的应用。

在MISO的估计模型中，由于输入情况很复杂，通常假定输入没有噪声，所有噪声污染都在输出端，引入一个输出噪声一并考虑。

对于这种情况下，系统的输入/输出频谱特性之间

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^q V_i(\omega) + N(\omega)$$

其中，

$$V_i(\omega) = H_i(\omega)X_i(\omega), \quad i = 1, 2, \dots, q$$

由上式，噪声项 $N(\omega)$ 及其复共轭可以写成

$$N(\omega) = Y(\omega) - \sum_{i=1}^q H_i(\omega) X_i(\omega)$$

于是

$$N^*(\omega) = Y^*(\omega) - \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega) X_j^*(\omega)$$

上面两式相乘，得

$$\begin{aligned} N(\omega)N^*(\omega) &= Y(\omega)Y^*(\omega) \\ &\quad - \sum_{i=1}^q H_i(\omega)Y^*(\omega)X_i(\omega) \\ &\quad - \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega)Y(\omega)X_j^*(\omega) \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega)H_i(\omega)X_j^*(\omega)X_i(\omega) \end{aligned}$$

上式取时间平均和集合平均，得

$$\begin{aligned} S_n(\omega) = & S_y(\omega) \\ & - \sum_{i=1}^q H_i(\omega) S_{yi}(\omega) \\ & - \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega) S_{jy}(\omega) \\ & + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega) H_i(\omega) S_{ji}(\omega) \end{aligned}$$

这就为估计频响函数确定了噪声功率谱函数。

现在定义**最优系统**为这样的系统：所取得的响应函数，应能使噪声功率谱函数取得最小。令

$$\frac{\partial S_n(\omega)}{\partial H_i} = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\partial S_n(\omega)}{\partial H_j^*} = 0$$

可以得到

$$\frac{\partial S_n(\omega)}{\partial H_j^*} = -S_{jy}(\omega) + \sum_{i=1}^q H_i(\omega) S_{ji}(\omega) = 0$$

于是

$$S_{jy}(\omega) = \sum_{i=1}^q H_i(\omega) S_{ji}(\omega), \quad j = 1, 2, \dots, q$$

如果进一步假定输入之间两两不相关，则上式可以简化为

SISO系统频响函数第一计算式

$$S_{jy}(\omega) = H_j(\omega) S_{jj}(\omega), \quad j = 1, 2, \dots, q$$

这就意味着整个系统只是简单的SISO系统的线性组合。

2. MIMO系统的频响函数及其估计

□2.3. 重相干函数

根据SISO系统的相干函数的定义，可以知道对于MISO和MIMO系统，通常的相干函数，即常相干函数不能用来判别所估计的MISO系统的频响函数的好坏。

根据MISO系统的特点，我们可以将所有输入的线性叠加定义为一个理想线性输出，模仿只有输出噪声的SISO系统的相干分析来分析。

定义理想的线性输出与实际测量之间的常相干函数为MISO系统的重相干函数，记作

$$\gamma_{y:x}^2(\omega) = \frac{S_v(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{S_y(\omega) - S_n(\omega)}{S_y(\omega)} = 1 - \frac{S_n(\omega)}{S_y(\omega)}$$

记号的含义是，在所有输入都作用下的理想输出与实际输出之比。理想输出功率谱的计算为

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= S_y(\omega) - S_n(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^q H_i(\omega) S_{yi}(\omega) = \sum_{j=1}^q H_j^*(\omega) S_{jy}(\omega) \end{aligned}$$

与SISO系统一样，这个理想输出谱通常也称为**重相干输出谱**。

对于输入之间相互独立的情况，重相干函数是所有输入输出之间的常相干函数的和。

重相干函数提供了一种方法来判别MISO系统的频响函数的估计的准则。但应注意，利用重相干函数，不能判断单一输入与输出之间的传递特性估计的好坏。

为了弥补这个不足，引入**条件谱估计**的概念，并进而定义**偏相干函数**。

2. MIMO系统的频响应函数及其估计

□2.4. 条件谱函数

对于前面定义的MISO系统，定义条件功率谱为

$$S_{ii\bullet j}(\omega) = \frac{E[X_{i\bullet j}^* X_{i\bullet j}]}{T}$$

$$S_{yy\bullet j}(\omega) = \frac{E[Y_{y\bullet j}^* Y_{y\bullet j}]}{T}$$

j – 条件

$$S_{iy\bullet j}(\omega) = \frac{E[X_{i\bullet j}^* Y_{y\bullet j}]}{T}$$

式中，条件频谱的计算为各自的频谱函数的递推计算式为：

$$S_{ii \bullet j!}(\omega) = S_{ii \bullet (j-1)!} - \left(\frac{S_{ji \bullet (j-1)!}}{S_{jj \bullet (j-1)!}} \right) S_{ij \bullet (j-1)!}$$

$$S_{yy \bullet j!}(\omega) = S_{yy \bullet (j-1)!} - \left(\frac{S_{jy \bullet (j-1)!}}{S_{jj \bullet (j-1)!}} \right) S_{yj \bullet (j-1)!}$$

$$S_{iy \bullet j!}(\omega) = S_{iy \bullet (j-1)!} - \left(\frac{S_{jy \bullet (j-1)!}}{S_{jj \bullet (j-1)!}} \right) S_{ij \bullet (j-1)!}$$

$$H_{ij} = \frac{S_{ij \cdot (i-1)!}}{S_{ii \cdot (i-1)!}}$$

条件传递函数

$$S_{ij \cdot r!} = S_{ij \cdot (r-1)!} - H_{ij} \cdot S_{ir \cdot (r-1)!}$$

上式表明：所谓条件功率谱，就是按照SISO的线性系统理论，在系统输入和输出功率谱中，扣除了某一或某些输入引起的分量的结果。

2. MIMO系统的频响函数及其估计

□2.5. 偏相干函数

偏相干函数是根据扣除某一或者某些输入为条件，求解的条件功率谱，并按照SISO的常相干函数来定义的：

$$\gamma_{iy \bullet (i-1)!}^2(\omega) = \frac{|S_{iy \bullet (i-1)!}(\omega)|^2}{S_{ii \bullet (i-1)!}(\omega) S_{yy \bullet (i-1)!}(\omega)}$$

根据偏相干函数的上述定义，我们不难理解，偏相干函数主要用于判定某一输入或某些输入对输出的线性贡献，条件是根据先验知识，先扣除其他的输入的线性贡献。从而，据此可以判别所估计的传递函数是否有偏。

习题六

- 1、 SISO 系统的频响函数的三种定义式及其推导？
- 2、 SISO 系统及其三种噪声模型下，频响函数的三种定义式的估计偏差分析？
- 3、 常相干函数的概念、基本定义，及其取值范围的分析？
- 4、 常相干函数的工程意义？常相干函数较低的主要原因分析？如何利用常相干函数判别频响函数的估计？
- 5、 重相干函数的工程意义？
- 6、 偏向干函数的工程意义？



完毕，感谢关注！

Q & A

