

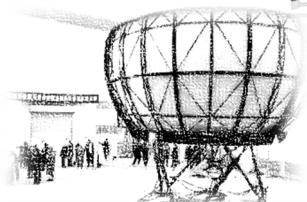


工程信号分析与处理

贾鑫 工学博士/副教授

吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

2022/3/22

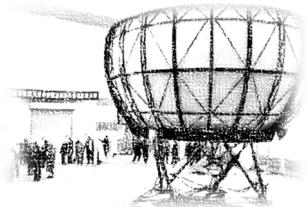


本门课程内容



重点概念：有限、泄露

§ 3 频谱分析技术



2022/3/22



吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

1. 有限离散傅立叶变换（DFT）

□ 1.1. DFT 定义式

非周期确定性信号的频率分析，是运用傅立叶(Fourier) 变换这一数学工具，把时域信号转换成频域函数，亦即频谱，然后进行分析的。

Fourier 变换的理论公式是：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df$$

上述公式不适宜在数字计算机上对离散数字序列实施运算。为此，需推导出适宜数字序列的离散傅立叶变换。

设 $x(t)$ 为非周期性确定性信号的一个样本，样本长度为 T ，以 $\Delta t = 1/f_s$ 采样，得到离散脉冲序列：

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t)$$

其中 $n \in (-\infty, +\infty)$ ，取其中一部分， $N = \frac{T}{\Delta t}$ 为采样点数，一般取偶数。

对上述信号做Fourier变换，则有：

$$\begin{aligned} X_s(f) &= \mathcal{F}[x_s(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} \delta(t - n\Delta t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi f n\Delta t} \end{aligned}$$

上式表明，即使时域是有限离散脉冲序列，但在频域上仍为连续函数，且在 $(-\infty, +\infty)$ 取值，仍不符合数字计算机离散有限的要求。

为此，对频谱的 $X_s(f)$ 的一个周期 $[0, f_s]$ 进行 N 等分离散化。则有：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta t}$$

$$k = \frac{f_k}{\Delta f}, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$f_k = k\Delta f = k \cdot \frac{1}{N\Delta t}$$



代入变换式，得：

$$X_s(f_k) = X_s(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

为书写方便，省略 Δf 和 Δt ，在不致误解时，常简记为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N}, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

上式即称为有限离散傅立叶变换 (D.F.T.)。

相应地，由离散频谱 $X(f)$ 转换为时间序列的算式为：

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

此式称为有限离散傅立叶逆变换(I.D.F.T.)。

DFT 与 IDFT 构成一对离散有限 Fourier 变换，是试验数据频谱分析的基本公式。经常以

$$\text{" } x(n) \leftrightarrow X(k) \text{ "}$$

表示 有限离散傅里叶变换对。

1. 有限离散傅立叶变换 (DFT)

口 1.2. DFT 的性质

与 Fourier 变换对类似，DFT 具有相同的性质，为便于运用在这里给出，证明从略。

➤ (1) 线性性：

若 $x(n), y(n)$ 的 DFT 为 $X(k), Y(k)$ ， a, b 为实常数，则：

$$\text{“ } ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(k) + bY(k) \text{ ”}$$

符合线性叠加原理。

➤ (2) 时移性:

$$x(n - n_0) \leftrightarrow X(k)e^{-j2\pi kn_0/N}$$

其中 $n_0 = t_0 / \Delta t$

➤ (3) 频移性:

$$x(n)e^{-j2\pi k_0 n/N} \leftrightarrow X(k - k_0)$$

其中 $k_0 = f_0 / \Delta f$

➤ (4) 时域卷积：

$$x(n) * y(n) \leftrightarrow X(k) \cdot Y(k)$$

➤ (5) 频域卷积：

$$x(n) \cdot y(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} X(k) * Y(k)$$

其中 $N = T / \Delta t$, T 为样本长度。

➤ (6) Parseval能量定理：

$$\sum_{n=0}^N x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |X(k)|^2$$

➤ (7) 共轭对称性：

若 $x(n)$ 为实数序列， $x(n) \leftrightarrow X(k)$ ，则在频谱上有：

$$X(k) = X^*(N - k)$$

1. 有限离散傅立叶变换 (DFT)

口 1.3. 关于DFT 的注释

➤ (1) 定义式的多样性：

各类教科书、参考书，乃至处理分析设备所使用的 DFT 公式并不唯一。与本课程不相同的 DFT 变换式如下：

- ①:
$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn/N} \end{cases}$$
- ②:
$$\begin{cases} X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N} \\ x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn/N} \end{cases}$$
- ③:
$$\begin{cases} X(k) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N} \\ x(n) = \Delta f \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn/N} \end{cases}$$

➤ (2) 标定因子：

上述定义式的不一致的产生原因，来自推导方法的不同，产生的效果是与真实频谱的不一致。

对于本课程中所采用的定义式，

$$X(f) \Big|_{f=k\Delta f} = \Delta t \cdot X(k)$$

亦即：连续时域信号的真实频谱在特定频率值处的取值，与本课程中介绍的**有限离散 DFT 变换值**

$$X(k) = X_s(k\Delta f)$$

不相等，相差一标定因子 Δt 。

或者说：本课程所介绍的公式 DFT 对信号的频谱估计是有偏估计，需乘以 Δt 加以修正。

对于定义式②，DFT 的频谱估计也是有偏的，其标定因子是 $1/\Delta f$ 。亦即：

$$X(f) \Big|_{f=k\Delta f} = \frac{1}{\Delta f} \cdot X(k)$$

对于定义式③，DFT 的频谱估计是无偏的，标定因子是 1。

值得说明的是：对于逆变换，若我们已知频谱的真实值，借用 DFT 求得时域信号的估计值，同样存在标定问题。对于本课程：

定义式①，标定因子是 $1/\Delta t$ ；

对于定义式②，标定因子是 Δf ；

而对于定义式③，标定因子仍为 1。

➤ (3) 周期性与重复性:

对于定义式①, 令

$$W = e^{-j2\pi/N}$$

则有

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W^{-nk}$$

简记为



$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W^{nk}$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W^{-nk}$$

W 称作指数因子，它具有如下性质：

$$W^k = W^{kMod(N)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$kMod(N) = \begin{cases} k - \left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor N, & |k| \geq N \\ k, & |k| < N \end{cases}$$

则有： $W^N = W^0 = 1$

并有：

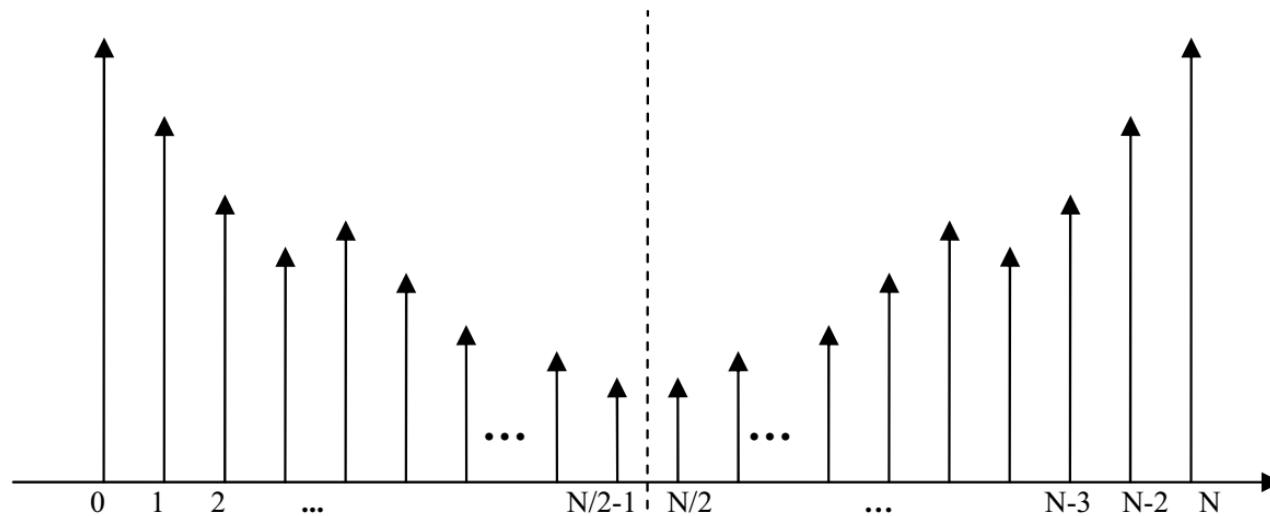
$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{kn} = \begin{cases} N, & n = 0, \pm N \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

根据指数因子的上述性质，很容易导出：

$$X_k = X_{k \bmod N}$$

$$X_k = X^*_{N-k}$$

几何图形解释：



➤ (4) 一致性:

根据指数因子 W^{kn} 的性质很容易证明 DFT 与 IDFT 的一致性:

$$x_n = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W^{-nk} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot W^{mk} \right] \cdot W^{-nk}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{k=0}^{N-1} W^{(m-n)k} \stackrel{m=n}{\Rightarrow} \frac{1}{N} \cdot x_n \cdot N = x_n$$

2. 窗函数与泄露

2.1. 窗函数的概念

在 DFT 的推导过程中，我们把采样信号表达式 $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ 改为 $\sum_{n=0}^N$ ，而导出了有限离散傅立叶变换。这也是符合计算机对时间函数采样时的情况。因为我们只能对有限多个点采样。也就是说需要对时间函数进行截断。

这相当于用一个高为 1，长为 T 的矩形时间窗函数（矩形加权函数）乘以原函数。现以连续函数为例引入窗函数。

设 $x(t)$ 为无限长的连续时域信号。若通过计算机处理，我们只能截取有限长度 T 的样本 $x_T(t)$ 进行处理。这一过程可以表述为：

$$x_T(t) = x(t) \cdot u(t)$$

且满足

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

根据积分变换理论可知，矩形函数的傅里叶变换是：

$$\begin{aligned}U(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt \\&= T \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f t} \\&= T \operatorname{sinc}(\pi f t)\end{aligned}$$

通常称为谱窗。

若连续信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(f)$, 则其有限样本的频谱为

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{-T}^T x_T(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot u(t)]e^{-j2\pi ft} dt \\ &= X(f) * U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f')U(f - f') df' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f')T \frac{\sin[\pi T(f - f')]}{\pi T(f - f')} df' \end{aligned}$$

一般情况下，除个别频率 f 外均有 $U(f) \neq 1$ ，
即 $X_T(f) \neq X(f)$ 。

从而表明，若采用有限信号的 Fourier 变换，
作为无限长连续信号的频谱估计是有偏估计。两者的
偏差完全是因为“有限”代“无限”所致，或者说是由
于矩形窗函数的引入所致。

2. 窗函数与泄露

□ 2.2. 泄露效应

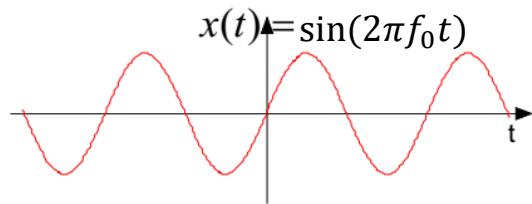
窗函数的泄漏效应，可以方便地从单频率周期函数的频谱的有限长信号估计偏差进行解释。

设无限长连续信号为 $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ ，则根据积分变换理论可知，它的理论频谱为脉冲函数 $X(f) = \delta(f \pm f_0)$
则代入卷积公式，可得：

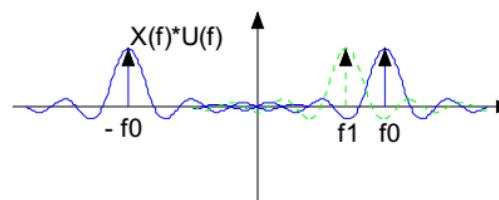
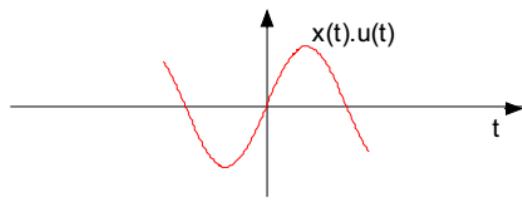
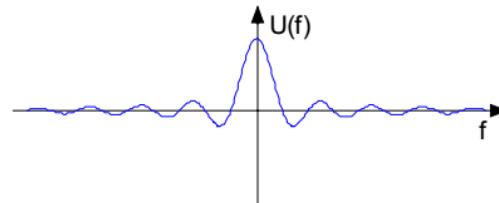
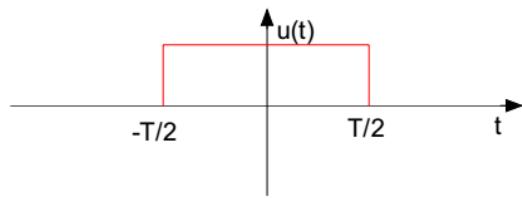
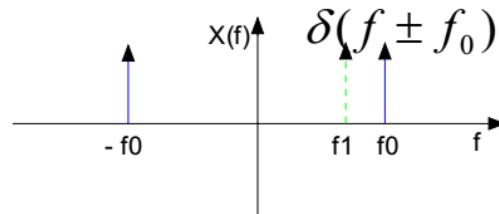
$$X_T(f) = T \frac{\sin[\pi T(f \pm f_0)]}{\pi T(f \pm f_0)}$$

图形解释如下：

时 域



频 域



➤ 泄露的影响：

- ✧ 个别频率点的能量被泄漏到其它频率成分上去，而导致有偏估计。这种影响主要取决于旁瓣高度。
- ✧ 主瓣宽度影响分辨率，由于主瓣效应，估计时很难分辨出小于主瓣宽度的频率点分量。

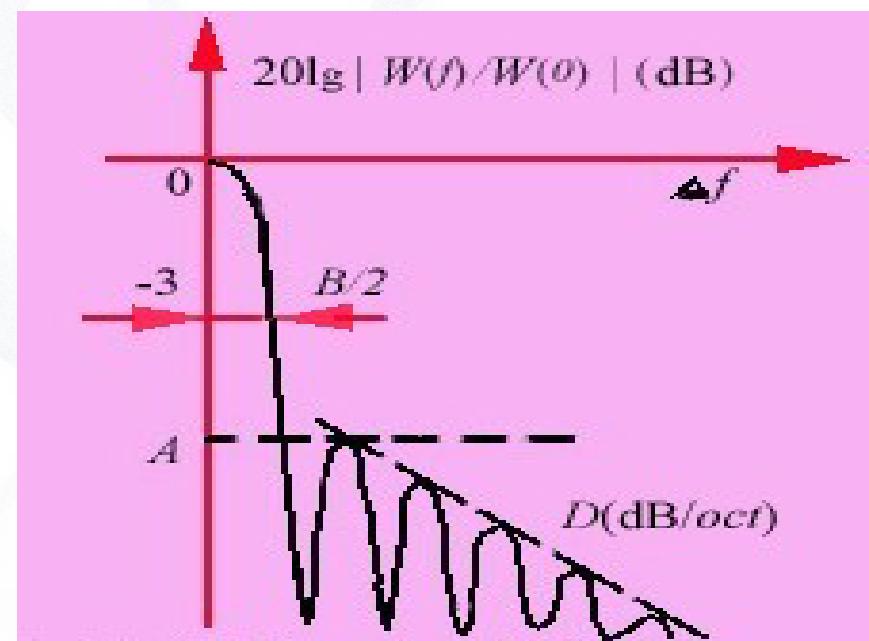
2. 窗函数与泄露

2.3. 窗处理

评价窗函数的四个指标：

◆ **最大旁瓣值**：即最大旁瓣值与主瓣峰值之比，用对数来表达。如矩形窗的最大旁瓣值为-13dB，A 旁/A 峰=0.22。

◆ **旁瓣衰减率**：以 10 个相邻旁瓣峰值的衰减比的对数来表达。如矩形窗的旁瓣衰减率为-20dB，即 A 旁 10 为 A 旁 1 的十分之一。



✧ **主瓣宽**: 主瓣值 0.707 (-3dB) 处的宽度。越窄分辨率越高，矩形窗的主瓣最窄。所以在某些分析中对幅值不感兴趣时，可采用矩形窗，如测定汽车悬架自振频率时，目的是测出精确的自振频率，对幅值不关心，可采用矩形窗。

✧ **主峰值可能最大误差**: 离散化获得的最大峰值与理论最大峰值之比。

为了力求减小和消除泄漏造成的误差，人们设计了各式各样的窗函数来进行补偿。多数窗函数都是旨在加宽频率域的主瓣分量而削弱旁瓣分量，从预期的谱窗函数，经傅立叶逆变换获得时窗函数。

➤ (1) 汉宁 (Hanning) 窗

◆汉宁窗是最常用的一个窗函数，其时域表达式为：

$$w_{HN}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

◆Hanning 窗最大旁瓣值-32dB，旁瓣衰减率 60dB。

◆Hanning 窗主瓣加宽，截断精度大为提高，频率分辨率稍有下降，因此多用于处理宽带随机信号。

➤ (2) 哈明 (Hamming) 窗

✧ 哈明窗与汉宁窗相差不多，其时域表达式为：

$$w_{HM}(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

✧ Hamming 窗最大旁瓣值-42dB，旁瓣衰减率 20dB。

✧ Hamming 的最大旁瓣高度比 Hanning 窗低，但旁瓣衰减不及 Hanning 窗。

➤ (3) 其他窗

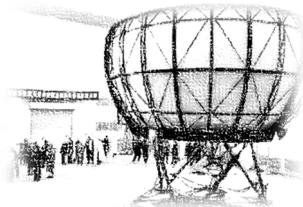
- ◆ 布拉克曼 (Blackman) 窗、余弦坡度窗、P301 窗 (三角窗) 、高斯窗 (指数窗) 、凯泽窗 (可调窗) 。
- ◆ 选择窗函数时，要求从各方面的影响因素加以权衡，即尽量选取频率窗有高度集中的主瓣，旁瓣尽量少，最好无负旁瓣（负旁瓣产生漏能）。窗尽量长，同时还要考虑计算时间短、占用计算机内存小等因素。

习题三

- 1. 陈述有限导致的泄漏效应的理论和几何分析；
- 2. 简述窗函数的指标；
- 3. 阐述窗函数的基本选取原则。

- 1、离散傅里叶变换 (DFT)
- 2、快速傅里叶变换 (FFT)
- 3、窗函数

范例二



2022/3/22



1. 离散傅里叶变换 (DFT)

➤ 原理

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{n \cdot k} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-n \cdot k} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

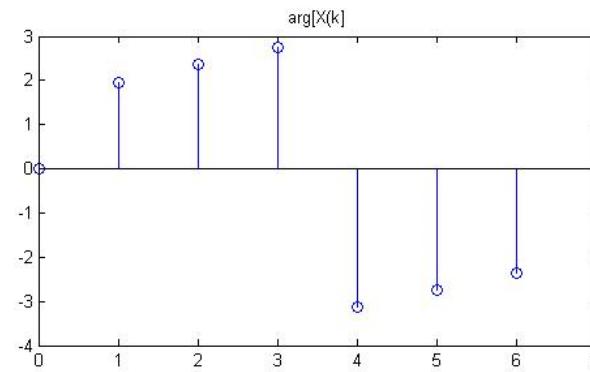
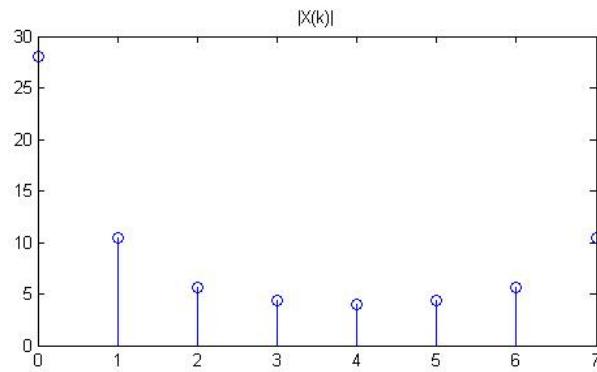
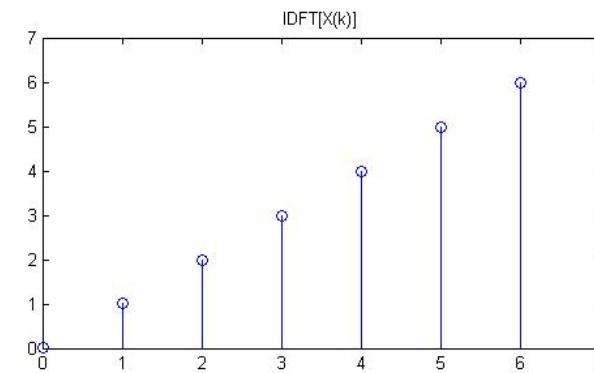
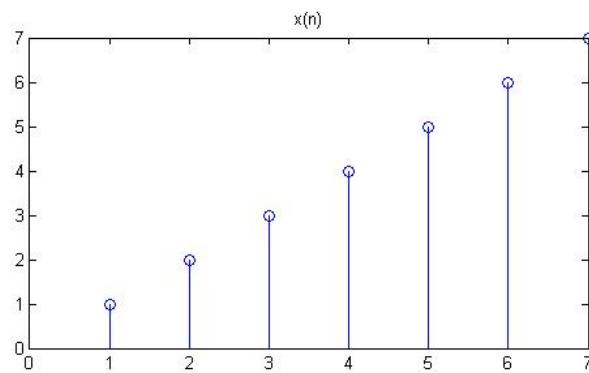
$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

➤ Matlab实现举例

✧ 已知 $x(n) = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

✧ 求 $x(n)$ 的 DFT 和 IDFT

➤ 效果图



2. 快速傅里叶变换 (FFT)

➤ Matlab命令

◆ “ fft ”

- 功能：一维快速傅里叶变换。
- 调用格式：

✓ $y=fft(x);$

✓ $Y=fft(x,n);$

◆ “ ifft ”

- 功能：一维快速傅里叶逆变换。
- 调用格式：

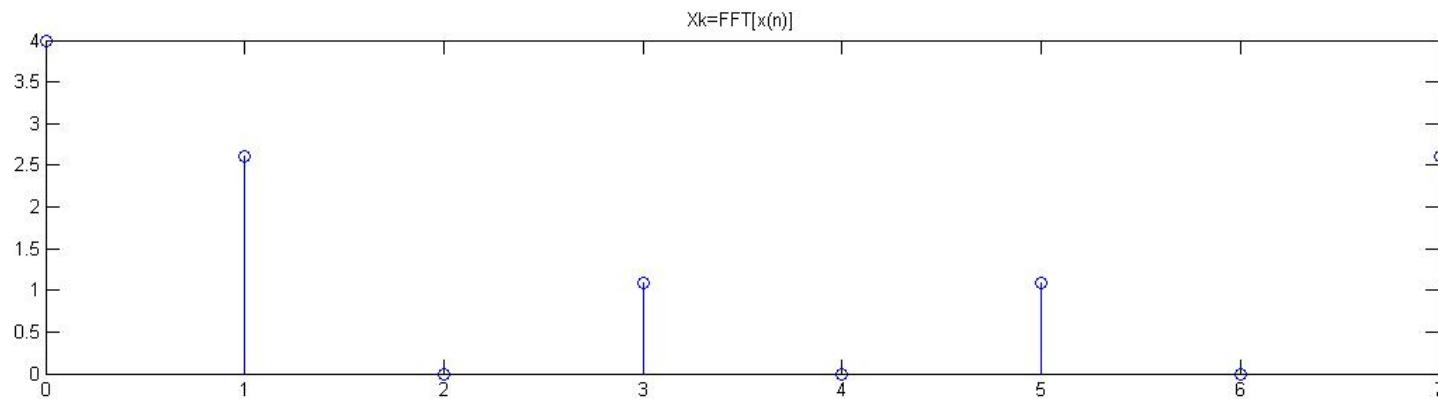
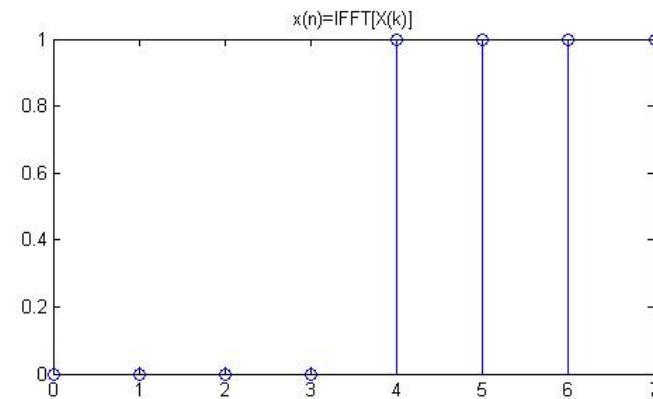
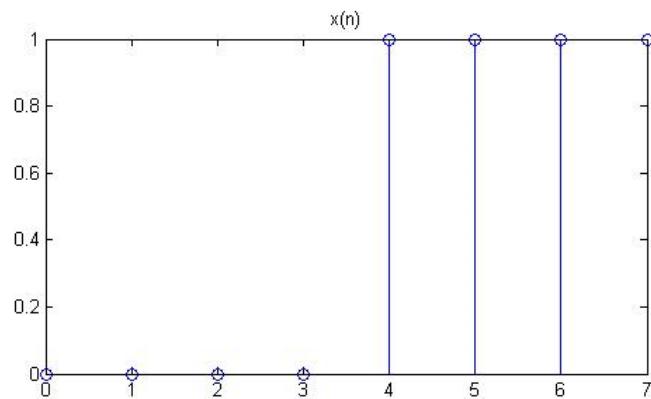
✓ $y=ifft(x);$

✓ $Y=ifft(x,n);$

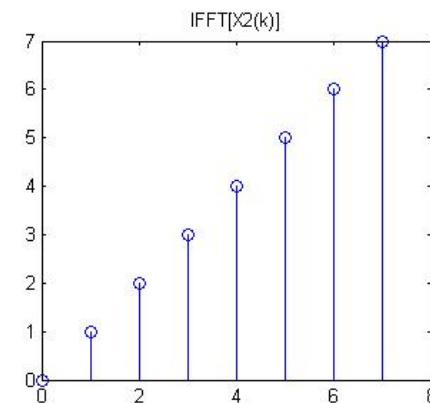
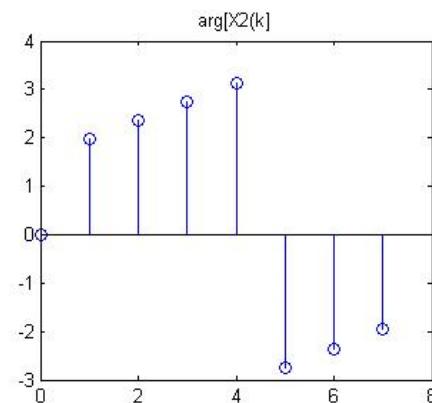
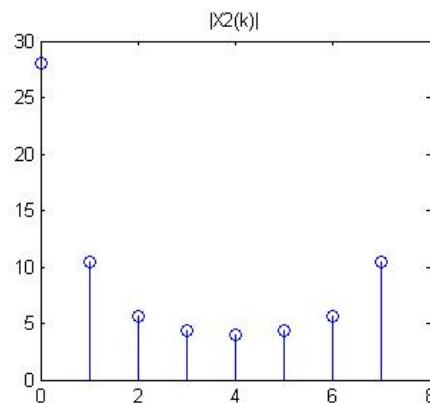
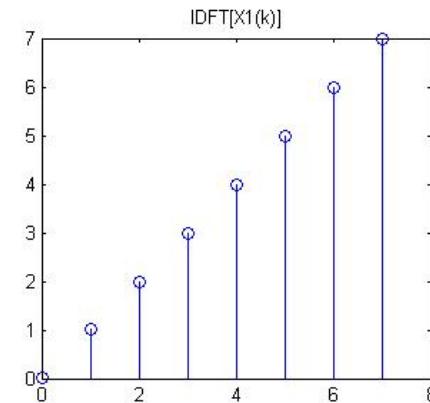
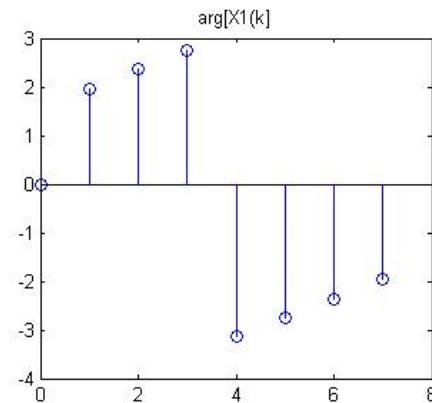
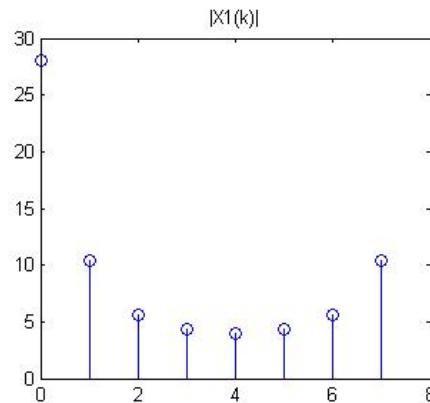
➤ Matlab实现举例

✧ 已知一个长度为8点的时域离散信号，其索引值 $n_1=0, n_2=7$ ，在 $n_0=4$ 前信号值为0， n_0 以后为1。对其进行FFT变换，及IFFT变换。

➤ 效果图



➤ DFT/IDFT与FFT/IFFT的对比



3. 窗函数

- 原始信号

$$f(t) = 2 \sin(2\pi \cdot 1.5t)$$

- 截取时间范围

$$0 \leq t \leq 1s$$

- 采样点数

$$N = 128$$

- 采样频率

$$f_s = \frac{N}{T} = 128 \text{ Hz}$$

➤ 矩形窗

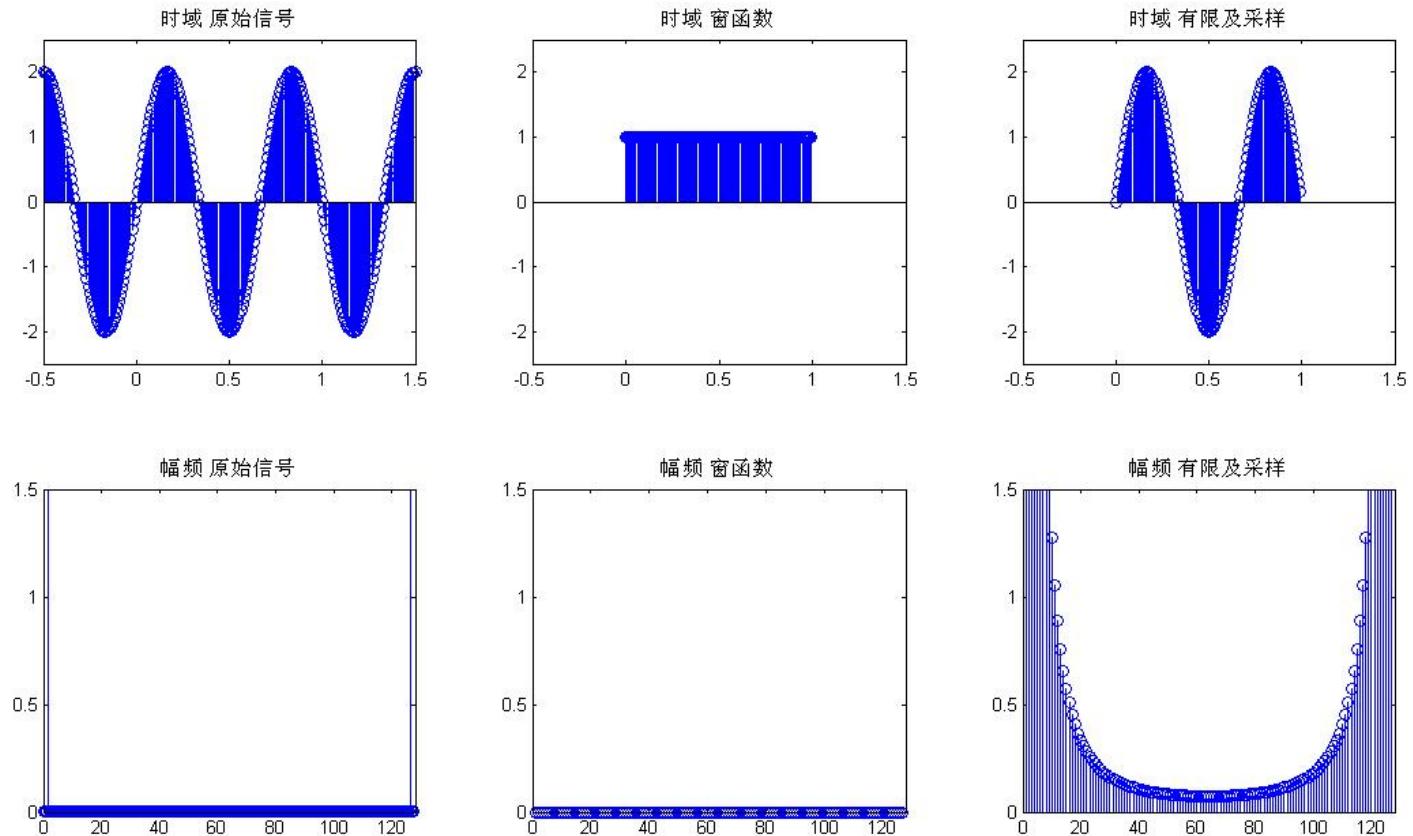
✧ 原理 (时域表达/系数)

$$w(k) = 1 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

✧ Matlab调用格式

- `w=boxcar(n)`

➤ 矩形窗 ◆ 效果图



➤ 汉宁窗

✧ 原理 (时域表达/系数)

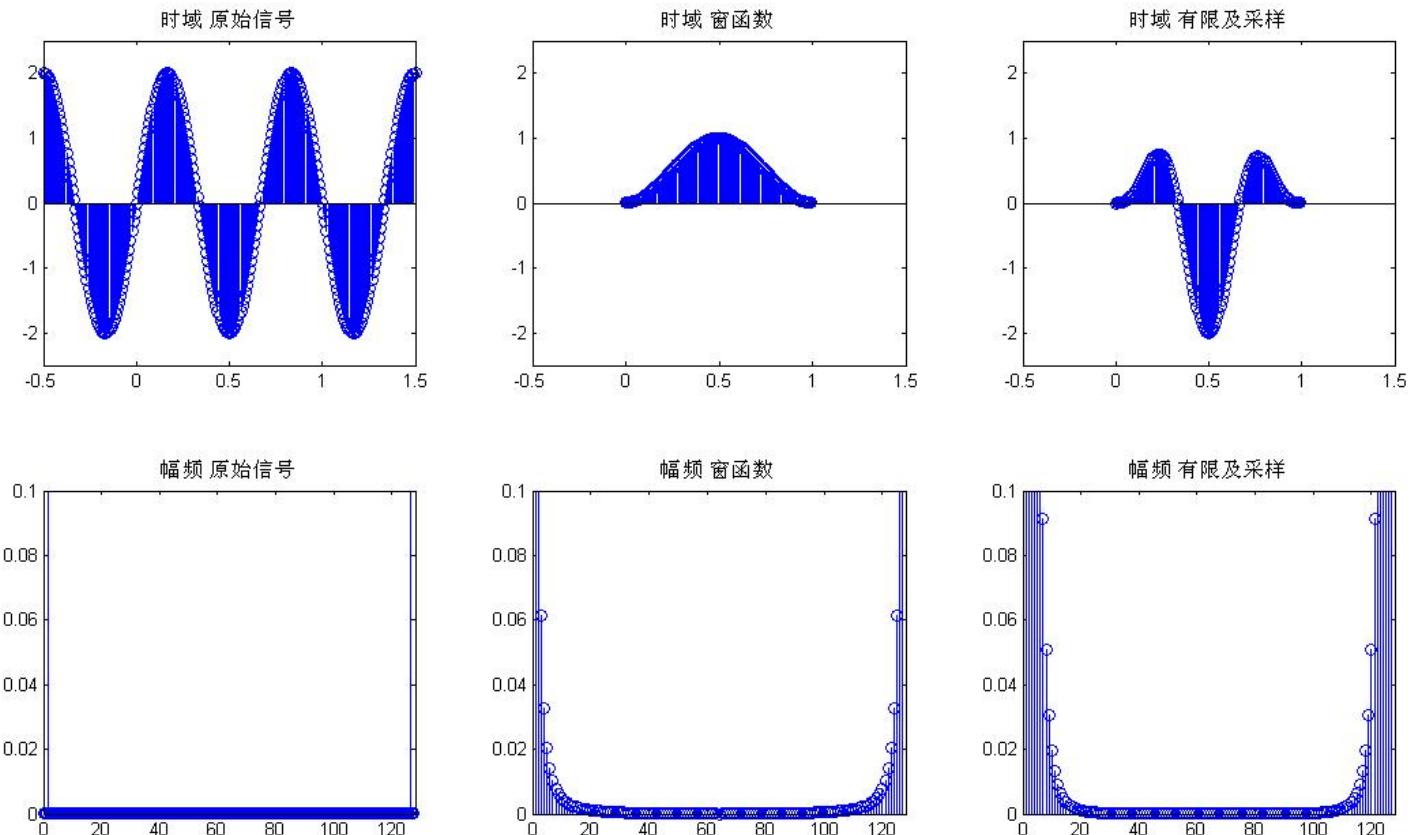
又称余弦窗，汉宁窗可以看作是3个矩形时间窗的频谱之和，它可以用旁瓣互相抵消，消去高频干扰和漏能。

$$w(k) = 0.5 \left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{n+1}\right) \right] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

✧ Matlab调用格式

- `w=hanning(n)`

➤ 汉宁窗 ◆ 效果图



➤ 哈明窗

✧原理（时域表达/系数）

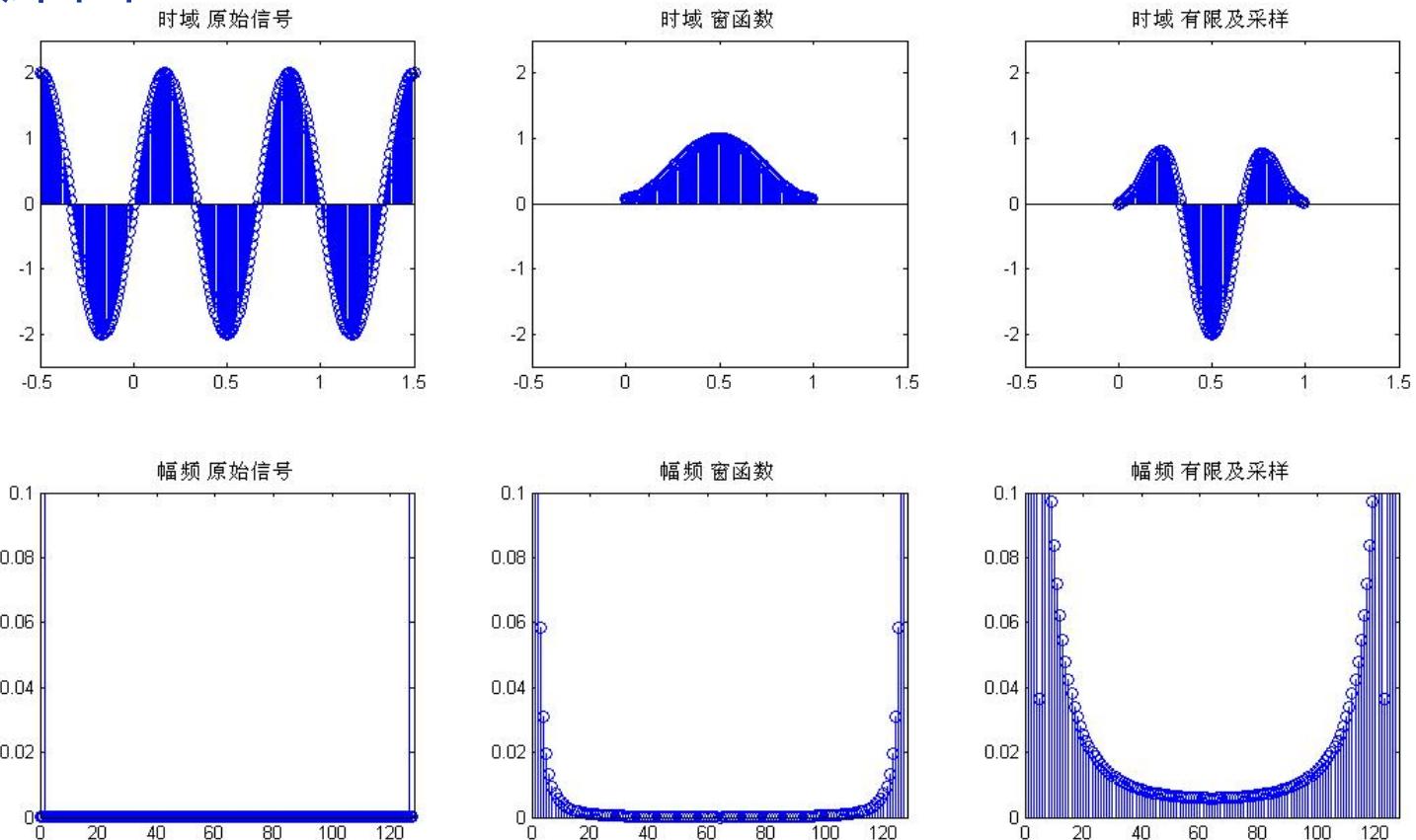
也是余弦窗的一种，又称改进的升余弦窗。

$$w(k) = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{n-1}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

✧Matlab调用格式

- `w=hamming(n)`

➤ 哈明窗 ◆ 效果图



➤ 布莱克曼窗

✧原理 (时域表达/系数)

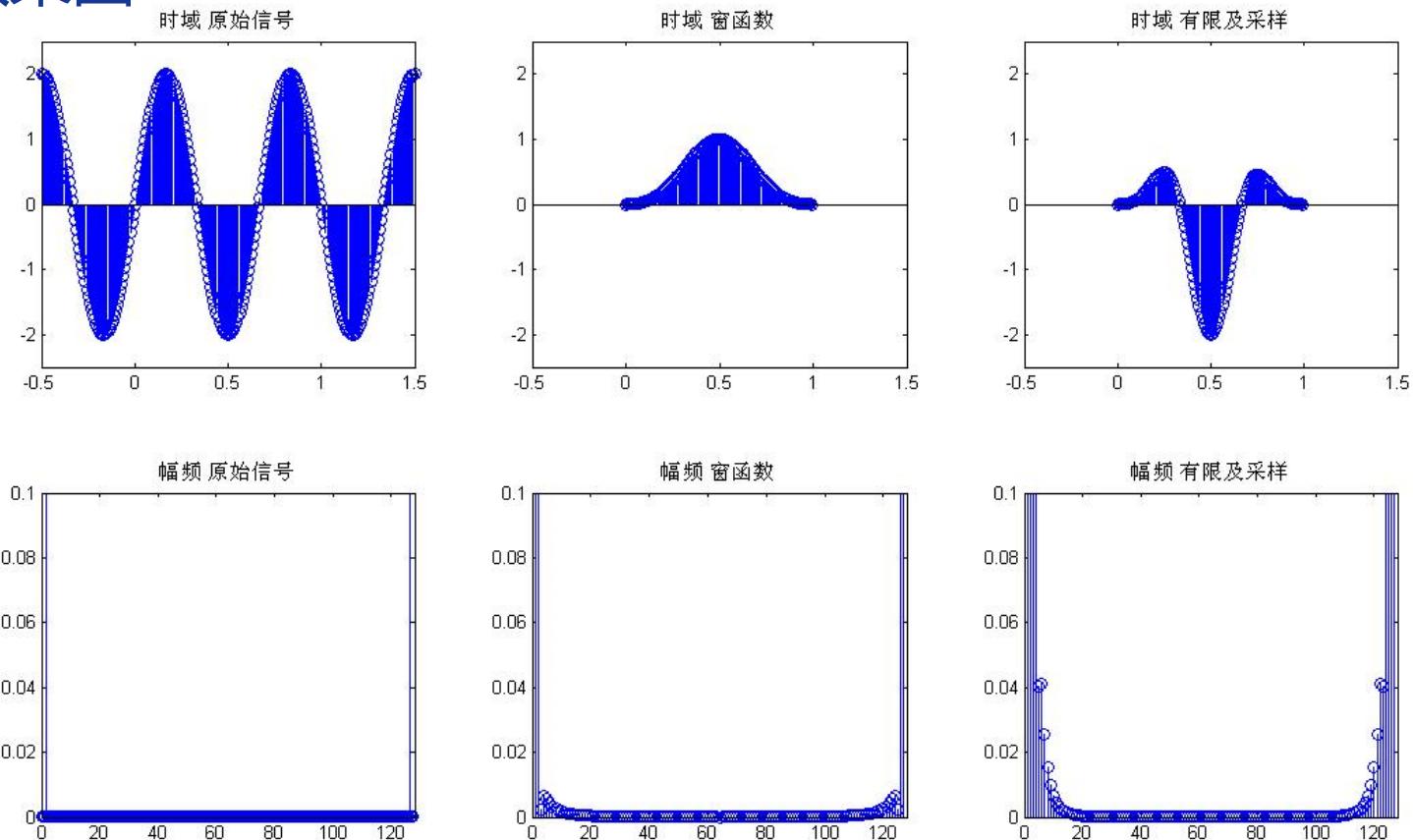
二阶余弦窗。

$$w(k) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \cdot \frac{k-1}{n-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \cdot \frac{k-1}{n-1}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

✧Matlab调用格式

- `w=blackman(n)`

➤ 布莱克曼窗 ◆ 效果图



➤ 三角窗

✧原理 (时域表达/系数)

三角窗是幕窗的一次方形式。

- n为奇数:

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n+1} & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \\ \frac{2(n-k+1)}{n+1} & \frac{n+1}{2} \leq k \leq n \end{cases}$$

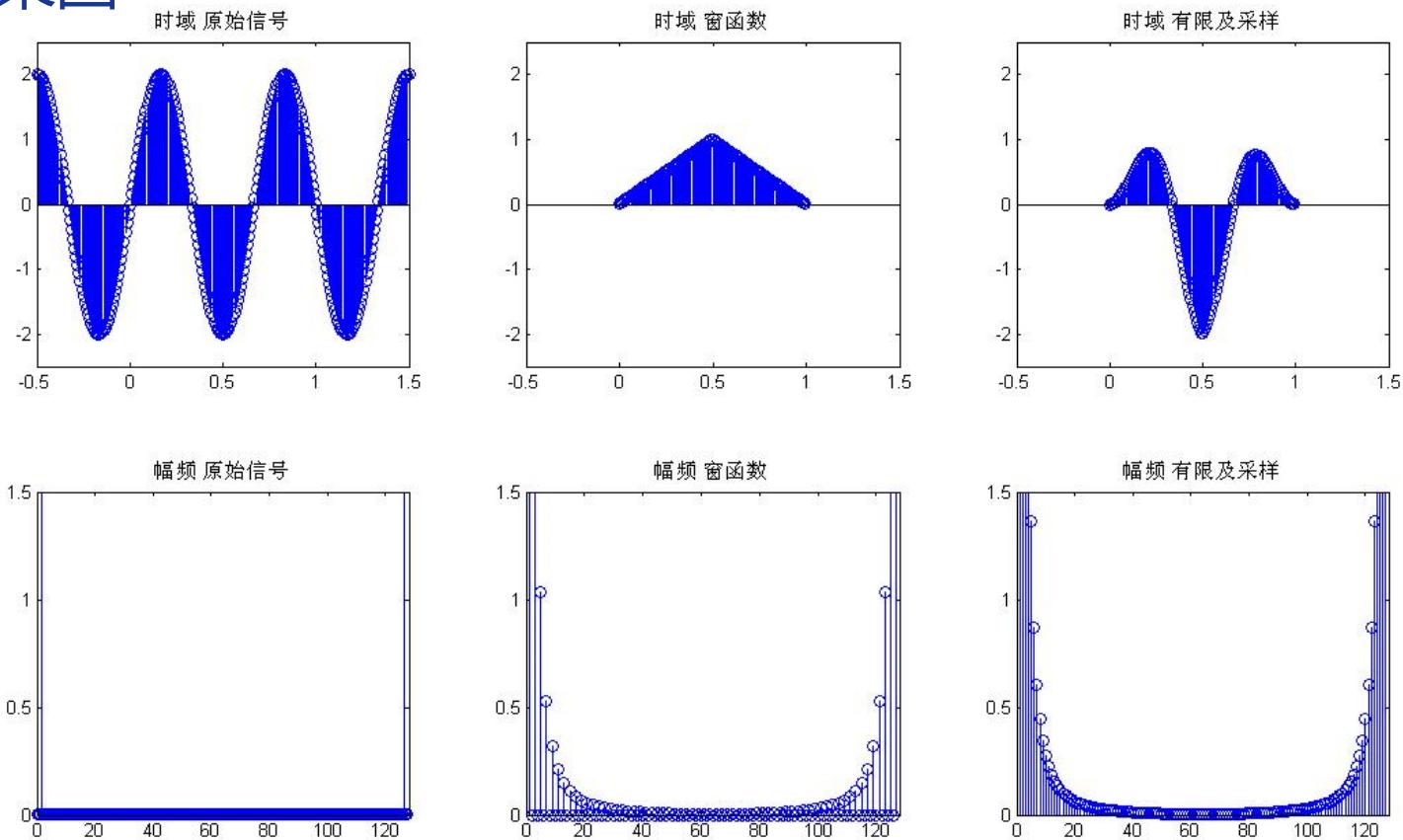
- n为偶数:

$$w(k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{n} & 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ \frac{2(n-k+1)}{n} & \frac{n}{2} \leq k \leq n \end{cases}$$

✧Matlab调用格式

- w=blackman(n)

➤ 三角窗 ◆ 效果图



➤ 巴特利特窗

✧ 原理 (时域表达/系数)

另一种三角窗。

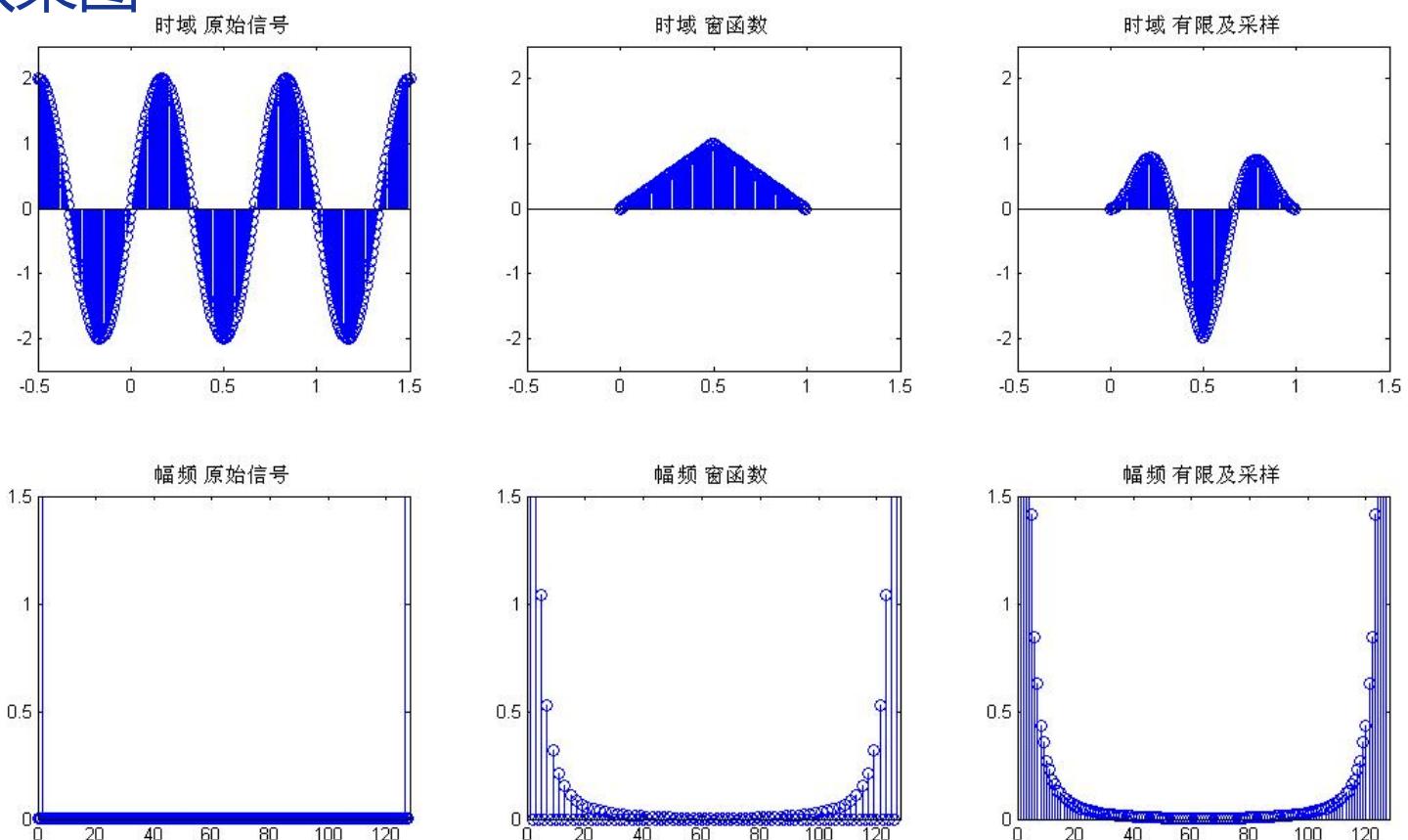
$$w(k) = \begin{cases} \frac{2(k-1)}{n-1} & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \\ 2 - \frac{2(k-1)}{n-1} & \frac{n+1}{2} \leq k \leq n \end{cases}$$

✧ Matlab调用格式

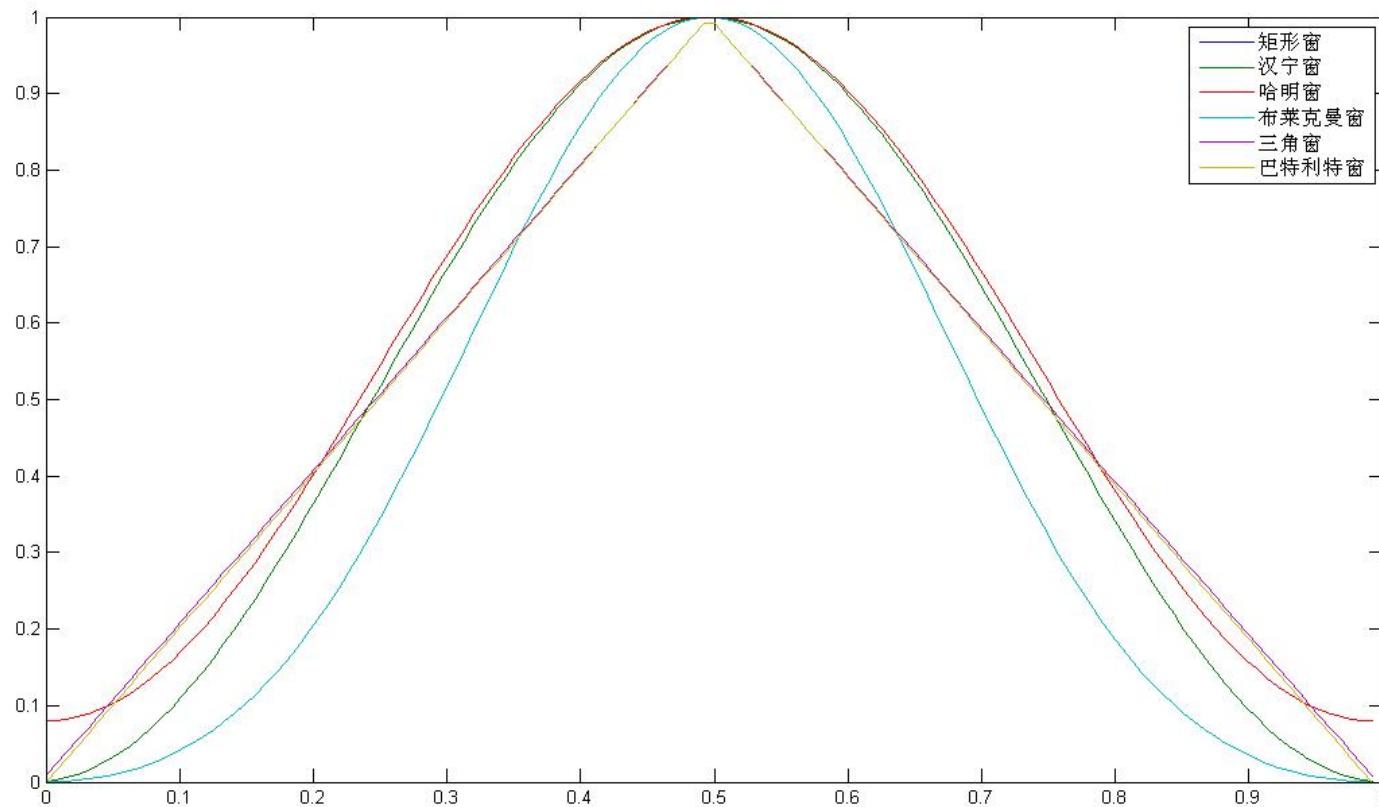
- `w=bartlett(n)`

➤ 巴特利特窗

◆ 效果图

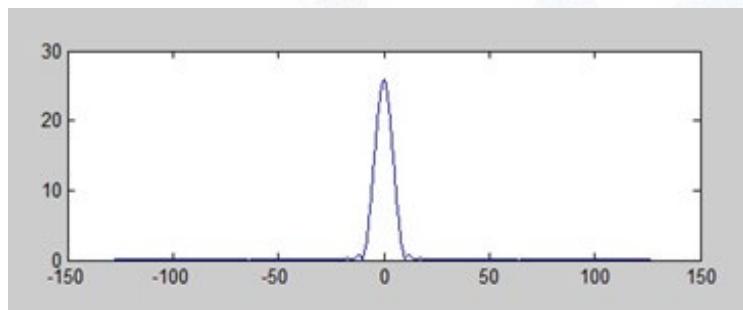


➤ 比较 (时域)

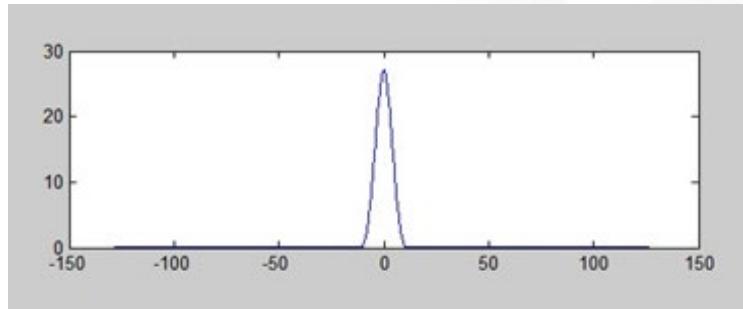


➤ 比较 (频域)

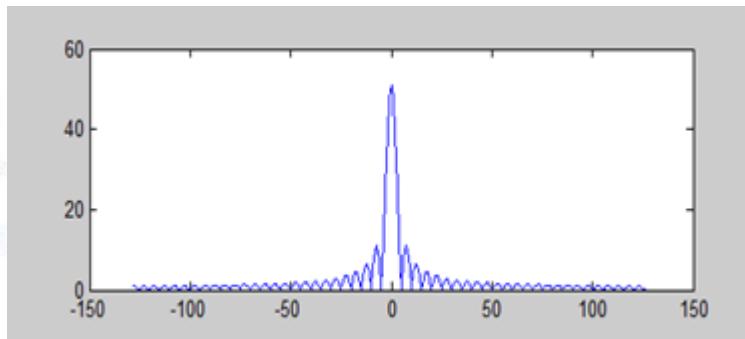
汉宁窗



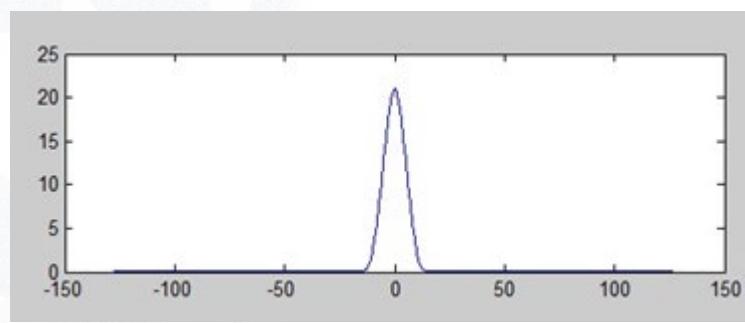
哈明窗



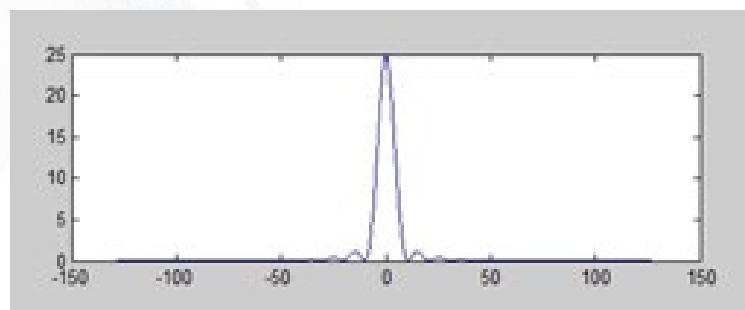
矩形窗



布莱克曼窗

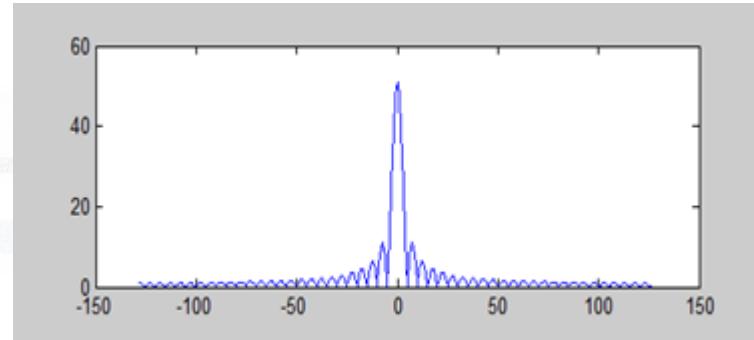


巴特利特窗



➤ 功能分析

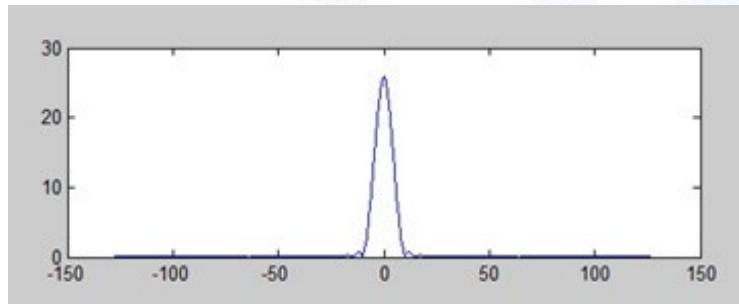
矩形窗



矩形窗使用最多，习惯上不加窗就是使信号通过了矩形窗。这种窗的优点是主瓣比较集中，缺点是旁瓣较高，并有负旁瓣，导致变换中带进了高频干扰和泄漏，甚至出现负谱现象。

➤ 功能分析

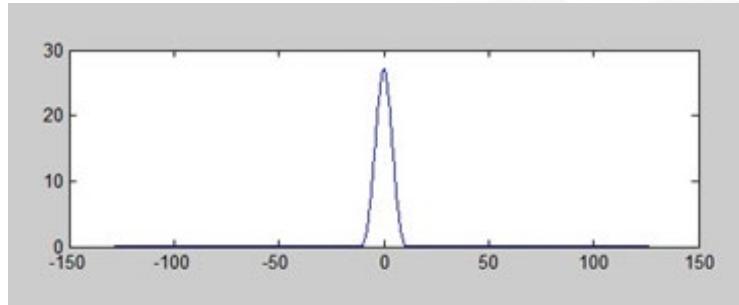
汉宁窗



汉宁窗主瓣加宽并降低，旁瓣则显著减小。汉宁窗的旁瓣衰减速度也较快。从减小泄漏观点出发，汉宁窗优于矩形窗。但汉宁窗主瓣加宽，相当于分析带宽加宽，频率分辨率下降。

➤ 功能分析

哈明窗

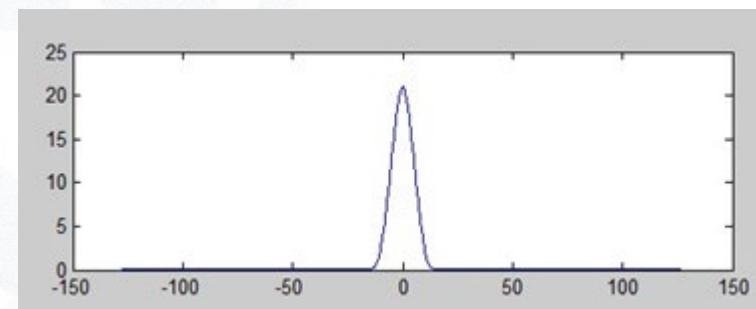


哈明窗与汉宁窗都是余弦窗，只是加权系数不同。哈明窗加权的系数能使旁瓣达到更小。

➤ 功能分析

布莱克曼窗主瓣宽，旁瓣比较低，但等效噪声带宽比汉宁窗要大一点，波动却小一点。频率识别精度最低，但幅值识别精度最高，有更好的选择性。

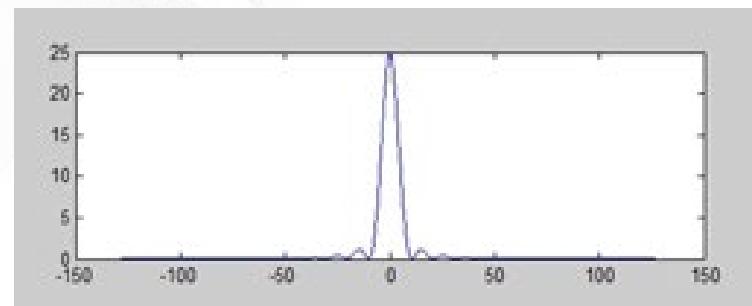
布莱克曼窗



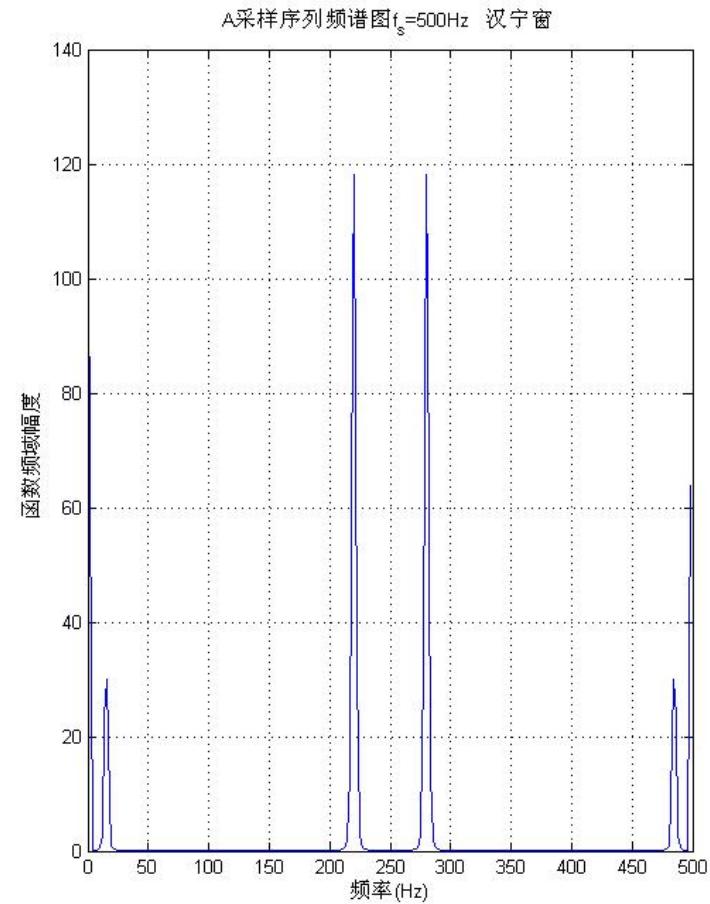
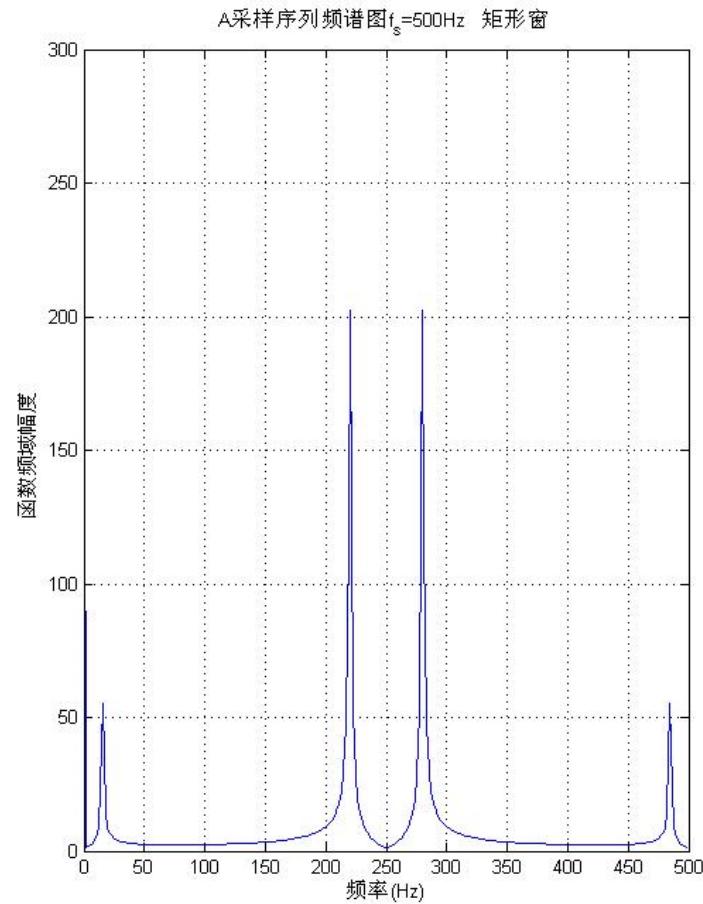
➤ 功能分析

巴特利特窗与矩形窗比较，
主瓣宽约等于矩形窗的两倍，
但旁瓣小，而且无负旁瓣。

巴特利特窗



➤ 比较 (作用效果) e.g. 矩形窗vs.汉宁窗



➤ 窗函数选择指南

- ✧ 如果测试信号有多个频率分量，频谱表现的十分复杂，且测试的目的更多关注频率点而非能量的大小。在这种情况下，需要选择一个**主瓣够窄**的窗函数，汉宁窗是一个很好的选择。
- ✧ 如果测试的目的更多的关注某周期信号频率点的能量值，那么其幅度的准确性则更加的重要，可以选择一个**主瓣稍宽**的窗。
- ✧ 如果检测两个频率相近幅度不同的信号，用布莱克曼窗。
- ✧ 如果被测信号是随机或者未知的，选择汉宁窗。
- ✧ 如想要灵活的通过窗函数的形状来控制频谱波纹或阻带衰减指标，则选择凯泽窗(?)。



完毕，感谢关注！

Q & A

