

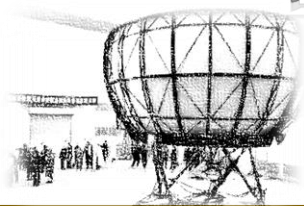


工程信号分析与处理

贾鑫 工学博士/副教授

吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

2020/10/24



吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室

本门课程内容

§ 1 随机数据的统计特征

随机
过程

§ 2 试验数据的离散化

采样
混叠

§ 3 频谱分析技术

有限
泄漏

§ 4 功率谱的估计

窗函数
周期图

§ 5 相关函数的估计

循环
相关

§ 6 频响函数的估计

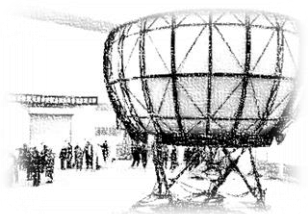
相干
分析

§ 7 有限带宽频率分析技术

频率
细化

重点概念：周期图、窗函数

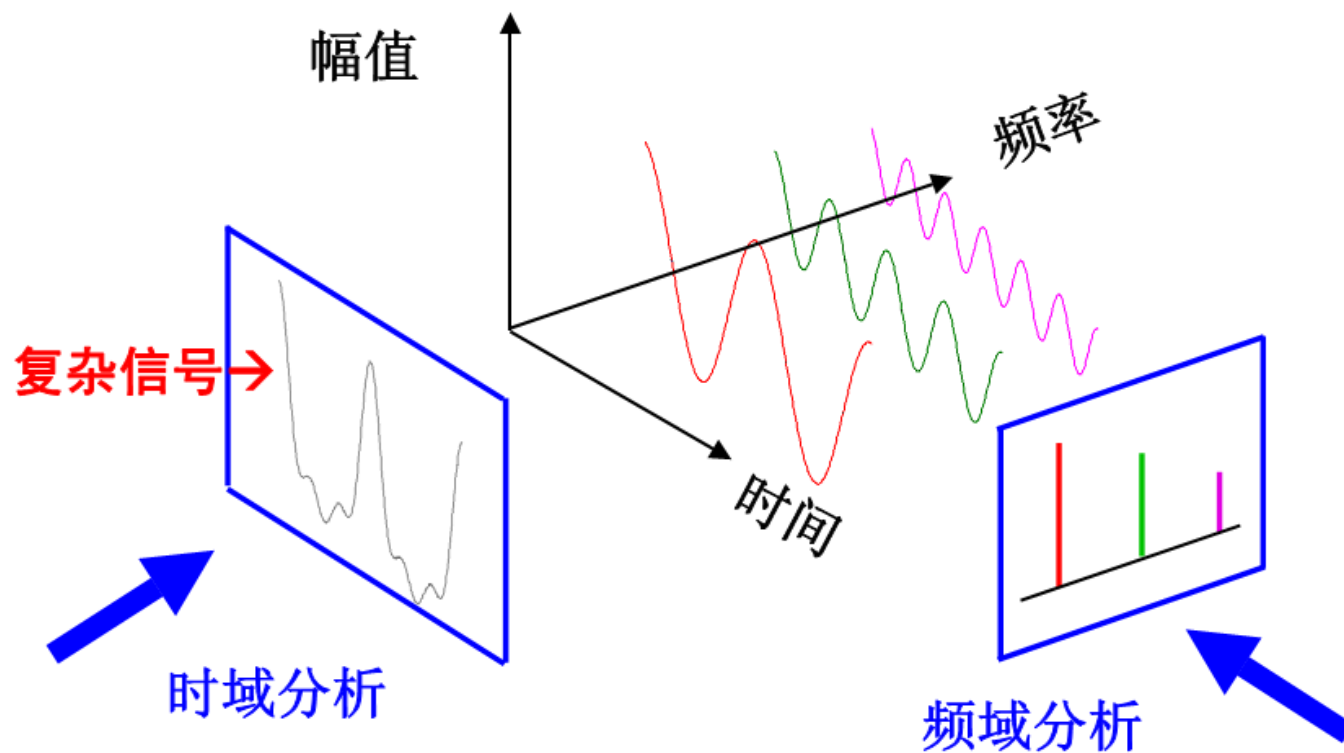
§ 4 功率谱的估计



1. 随机信号的功率谱

□1.1. 功率谱的定义

由前面的讨论，我们知道，Fourier变换是从频域上描述信号的基本工具。在确定性信号的情况下，当信号是周期性的，可以分解为傅氏级数，构成离散频谱。当信号是非周期性的，如果只在有限时间段内有值，满足狄拉克绝对可积(平方可积)条件，可以通过傅立叶变换，获得频谱。但是，对于随机信号，一般既不是周期的，又不是绝对可积的，因此，严格意义上，随机信号既不能进行傅氏级数分解，又不能进行傅氏变换。



为了解决这一困难，维纳首先提出了**广义谐波分析**的概念。广义谐波分析的意义是：随机信号的傅氏分析可以从极限意义上来讨论。

➤ a. 广义谐波分析

取随机信号的一个样本 $x(t)$ 在有限时间内的 $(-T \sim +T)$ 的一段，并定义：

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T < t < +T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由于时间有限，所以 $x_T(t)$ 存在傅氏变换，即：

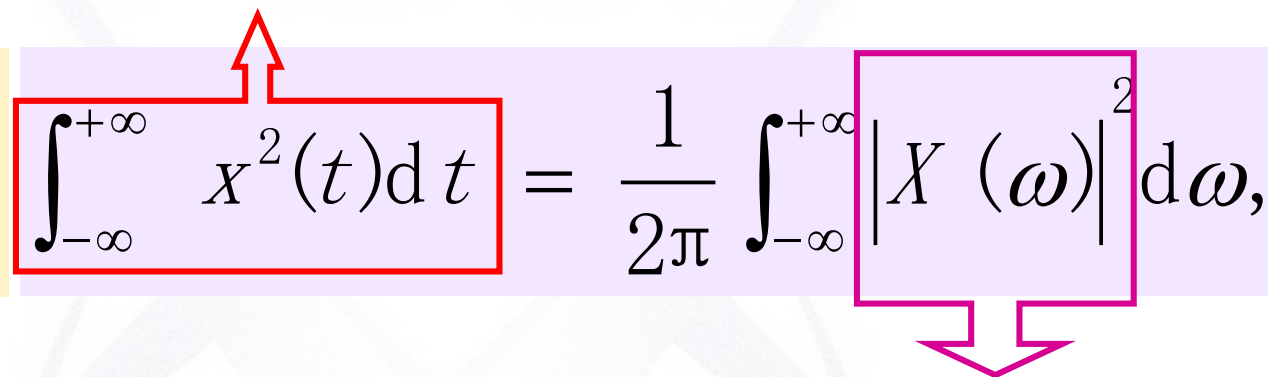
$$x_T(t) \xleftrightarrow{FT} X_T(\omega)$$

$$\omega = 2\pi f$$

根据DFT的帕斯瓦尔定理，有：

$x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的总能量

Parseval
能量定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega,$$


称为 $x(t)$ 的能量谱密度

对应频谱取极限值，并就全部样本集合从总集意义上求平均值，便可以获得随机信号的**功率谱** (Power Spectral Density)定义如下：

功率谱密度
函数

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} \right\}$$

所谓信号的功率谱密度函数是指这样的函数:

- 1、当在整个频率范围内对它进行积分以后，得到信号的总功率。
- 2、描述了信号功率在各个不同频率上分布的情况。

➤ b. 维纳-辛钦定理 (Wiener-Khinchin theorem)

可以证明, 如果 $x(t)$ 是零均值的, 上式又可以写成维纳-辛钦定理的形式, 表示成自相关函数的傅氏变换。即:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

根据傅氏变换的卷积定理：

$$x_T(t) * x_T(-t) \xleftrightarrow{FT} X_T(\omega) \cdot X_T^*(\omega) = |X_T(\omega)|^2$$

由于

$$x_T(t) * x_T(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(u) x_T[-(t-u)] du$$

$$\xrightarrow{\text{令 } v=u-t} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(v+t) x_T(v) dv$$

因此

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E|X_T(\omega)|^2}{2T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-T+|\tau|}^T x_T(t) x_T(t+\tau) dt \right] d\tau \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T E[x_T(t) x_T(t+\tau)] dt \right] \right\} d\tau \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T E[x_T(t)x_T(t+\tau)] dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T E[x(t)x(t+\tau)] dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T R_x(\tau) dt \right] \\ &= R_x(\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T dt \right] = R_x(\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} (2T - |\tau|) \right] \\ &= R_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) \bigg|_{T \rightarrow \infty} \\ &= R_x(\tau) \end{aligned}$$

各态历经过程

所以有

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

维纳-辛钦定理

对于平稳的随机过程，信号的数学期望为定值，并可通过工程手段将信号处理为零均值，则此时当时间间隔趋于无穷大，则信号的自相关函数取值区域均值的平方，亦为零。说明自相关函数满足绝对可积的条件。

因此，当原始信号为随机信号不满足绝对可积时，可以利用维纳-辛钦定理进行功率谱估算。

➤ c. 随机过程的功率谱密度函数的三种定义

① 自功率谱密度函数定义为随机过程的傅立叶频谱幅值平方的数学期望：

定义式

$$S_x(\omega, T) = \frac{1}{2T} E\left\{|X_T(\omega)|^2\right\} \quad S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{|X_T(\omega)|^2\right\}$$

② 自功率谱密度函数定义为随机过程的自相关函数的傅立叶变换：

维纳-辛钦定理

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- ① 自功率谱密度函数在中心频率附近的某一带宽内的取值，定义为随机过程样本信号 $x(t)$ ，通过中心频率为 f ，带宽 Δf 的带通滤波后的平均功率：

Parseval能量定理

$$S_x(f, \Delta f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t, f, \Delta f)^2 dt \right]$$

$$S_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t, f, \Delta f)^2 dt \right] \right]$$

1. 随机信号的功率谱

□1.2. 功率谱的性质

➤ a. 对称性

对于实信号，由于 $R_x(\tau)$ 是实偶函数，所以 $S_x(\omega)$ 也是实偶函数。

对于复值信号，由于 $R_x(\tau)$ 是共轭对称的，所以 $S_x(\omega)$ 也是实函数，但不是偶函数。（功率谱定义）

➤ b. 非负性

不论是实数信号，还是复值信号，功率谱都是非负函数。（功率谱定义）

➤ c. 极限值

当 $\tau = 0$ 时, 有

$$E[x^2(t)] R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

可见功率谱曲线下的面积表示信号的功率（均方）。这正是“功率谱（密度函数）”名称的由来。

➤ c. 局限性

功率谱是从频域上分析随机信号的有力工具。它的局限性是丢失了相位信息。信号的周期性特征在功率谱中表现为 δ 函数（包括直流分量）。

只有对平稳的随机信号才能有功率谱可言，因为维纳-辛钦定理是对 $R_x(\tau)$ ，而不是对 $R_x(t_1, t_2)$ 作傅氏变换。

1. 随机信号的功率谱

□1.3. 互谱密度函数

➤ a. 互谱密度的定义

互相关函数的傅氏变换称为互谱密度。即

$$\begin{cases} S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

共相位

它通常是 ω 的复值函数，实部称为共谱密度，虚部称为重谱密度，或称交谱密度。值得注意的是，互谱密度并不具有功率的含义。与之对应，功率谱也称为自谱密度。

正交

互谱密度也可以表示为有限时间信号的傅氏变换的极限形式。

设持续时间在 $-T \sim +T$ 范围内的随机信号为 $x_T(t)$ 和 $y_T(t)$ 。它们的傅氏变换分别是 $X_T(\omega)$ 和 $Y_T(\omega)$ 。则互谱密度函数为（定义式）

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[X^*(j\omega)Y(\omega)]$$

共谱密度

$$C_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\frac{1}{2T} (X_R(w)Y_R(w) + X_I(w)Y_I(w)) \right] \right\}$$

交谱密度

$$Q_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\frac{1}{2T} (X_I(w)Y_R(w) - X_R(w)Y_I(w)) \right] \right\}$$

➤ b. 互谱密度函数的性质:

① 对称性:

由于对实信号，互相关也是实函数，所以它的傅氏变换是共轭对称的，即

$$S_{xy}(\omega) = S_{xy}^*(-\omega)$$

也就是说，共谱是偶函数，交谱是奇函数。

又由于 $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ ，故有 $S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega)$ ，
也即：互谱下标对调后，曲线的频率轴翻转。

② 互谱不等式:

可以证明, 对于每一个频率都有:

$$\left| S_{xy}(\omega) \right|^2 \leq S_x(\omega) S_y(\omega)$$

1. 随机信号的功率谱

□1.4. 典型随机过程

➤ a. 宽带白噪声过程

宽带白噪声过程是随机性最强的平稳过程。它的功率谱是恒定的常数，因此它含有一切频率成分，而且强度相等。借助于光学上的“白光”概念，称之为“**白噪声(White Noise)**”。

白噪声的功率谱是

$$S_x(\omega) = A$$

它的自相关函数是

$$R_x(\tau) = A\delta(\tau)$$

式中 $\delta(\tau)$ 是狄拉克函数。

理想白噪声的特点是：不同时刻的取值互不相关，不论这两个时刻距离有多近。只有当 $\tau = 0$ 时相关函数才不等于零。这种理想白噪声实际上不可能存在，因为它的均方值 $R_x(0)$ 是无穷大、频率成分延伸到无穷大，意味着它的变化率极快。

➤ b. 窄带白噪声过程

实际系统的带宽总是有限的，在实际工程中，只要信号带宽远大于系统带宽，而且在系统带宽内，信号功率谱值基本恒定，便可以把信号近似看作白噪声过程。

如果信号的功率谱只在低于系统频带内的有限频带内恒定，在此频带以外都等于零，便称之为**窄带白噪声过程**。最为常见的从直流零频到某一频率的窄带噪声：

白噪声的功率谱是 $S_x(\omega) = A$, 当 $|\omega| < \omega_1$

它的自相关函数是 $R_x(\tau) = A \frac{\sin(\omega \tau)}{\pi \tau}$

需要指出的是，高斯白噪声通常是指一维概率密度函数是高斯型的窄带白噪声过程。高斯和白噪声分别是两个不同的概念，并不矛盾。高斯是指某一时刻取值的分布规律，而白噪声性则是指信号在不同时刻取值的关联程度。

➤ c. 伪随机过程

一系列周期性、确定性信号的叠加

计算机控制和仿真时，常常需要生成白噪声过程。但是，无论是理想的白噪声，还是窄带白噪声都很难取得。而且，如果希望它在有限的测试周期内效果接近白噪声，就需要较长的测试时间。因此，实际工程中，通常采用伪随机信号来代替。

顾名思义，伪随机信号是假的随机信号。它实际上是确定性的周期信号，只是由于它的功率谱在大于系统带宽的频带内近似相等，自相关函数也接近 $\delta(\tau)$ 函数，可以用来代替白噪声。

$$R_Z(k) = \begin{cases} \sigma_Z^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

即约为：

$$R_Z(k) = \sigma_Z^2 \frac{\sin(\omega k)}{\pi k}$$

最常用的伪随机信号有P.R.B.S(相位随机二进制序列, phase random binary sequence)和随机相位功率谱傅氏逆变换序列。

2. 估计的偏差与方差

□2.1. 估计的偏差

如果待估计参数 a 和它的估计值 \hat{a} 的均值 $E[\hat{a}]$ 相等, 就称为**无偏估计**。待估计参数是未知的确定性变量, 不是随机变量, 而它的估计值由于是由随机的量测中计算出的, 是随机变量。

如果 $E[\hat{a}] = a$, 则称 \hat{a} 是 a 的**无偏估计**。

如果 $E[\hat{a}] \neq a$, 则称 \hat{a} 是 a 的**有偏估计**; 数值 $E[\hat{a}] - a$ 称为估计的**偏差**, 记作 $b_{\hat{a}}$ 。

如果样本长度 N 不断增加时 $\lim_{N \rightarrow \infty} b_{\hat{a}} \rightarrow 0$, 便称之为**渐进无偏估计**。

2. 估计的偏差与方差

□2.2. 估计的方差

估计的**方差**定义为随机变量 \hat{a} 的方差，即

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = E[\hat{a} - E[\hat{a}]]^2$$

它表示各次估计值 \hat{a} 相对于均值 $E[\hat{a}]$ 的分散程度。

注意：无偏估计只说明经过多次估计后，各次估计的平均值接近真值，并不保证每次估计接近真值，可能很分散。

因此，通常采用**均方误差**来表示估计的好坏。

$$D_a = E[(\hat{a} - a)^2] = \sigma_{\hat{a}}^2 + b_{\hat{a}}^2$$

2. 估计的偏差与方差

□2.3. 有效估计

如果用某一种算法得出的估计值与实际值之间的**均方误差**小于任何其他估计方法的均方误差，则称此估计为**有效估计**。亦即：

如果在所有估计 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k, \dots$ 中，有

$$E[(\hat{a}_1 - a)^2] < E[(\hat{a}_k - a)^2]$$

则称 \hat{a}_1 是**有效估计**。

取得均方误差最小值的估计即为有效估计。

2. 估计的偏差与方差

□2.4. 一致估计

如果随着样本长度（或容量）的增加，估计的均方误差趋于零，便称此估计为**一致估计**。

即如果：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[(\hat{a} - a)^2] = 0$$

则称 \hat{a} 为**一致估计**。（即估计的**偏差**和**方差**均趋于零。）

$$D_a = E[(\hat{a} - a)^2] = \sigma_{\hat{a}}^2 + b_{\hat{a}}^2$$

3. 谱估计的经典方法

功率谱密度函数表示随机信号各频率成分的功率分布情况，是随机信号处理中应用最广的技术。

但是，要获得质量比较好的谱估计却有一定困难。主要原因是估计结果的方差特性较差。它表现在两个方面：

- (1) 各次估计的分散性较大；
- (2) 每次估计中的估计值随频率的起伏较剧烈，而且数据样本越长起伏越严重。

3. 谱估计的经典方法

□3.1. 经典估计算法

经典的功率谱估计方法也是直接建立在功率谱定义的基础上，但只能用有限长的样本数据来进行估计。它有两种途径。

自相关法

a

—维纳-辛钦定理

周期图法

b

—定义式

➤ a. 自相关法

自相关法是建立在维纳-辛钦定理的基础上。根据前面第一小节广义频谱分析的推导，我们可以先在时间域内计算 $2N$ 点样本序列的自相关估计，然后对其进行有限离散傅氏变换DFT获得功率谱估计。

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_n x_{n+|m|} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N-1)$$

$$\hat{S}_x(k) = \sum_{m=-N-1}^{N-1} \hat{R}_x(m) W^{mk}$$
$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N-1}^{N-1} \hat{S}_x(k) W^{-mk}$$

用计算机处理时，DFT计算可以用FFT进行。

值得注意的是上述给出的DFT的公式中的样本长度是 $2N$ ，这与DFT一节中给出的公式不同，在那里我们假定 N ，而且求和公式的上下限也不相同。

理论上，采用上述有限区段数据，先计算自相关函数，然后通过DFT估计自功率谱密度没有什么问题。但在实际上，采用有限时间段内的离散数据序列，按照上述自相关定义算法估计，是有偏的，而且随着 m 的增大，估计方差增加，不能满足进一步估计功率谱的要求。

在下一章，我们将进一步详细讨论相关函数及其直接和间接估计方法。

➤ b. 周期图法

根据广义谱分析的**定义式**，我们可以先求2N点数据的有限离散傅氏变换，再取其幅频特性的平方乘以 $\frac{1}{2N}$ 作为功率谱的估计。这种估计称为周期图。即：

$$\hat{X}(k) = \hat{X}_k = \sum_{n=0}^{2N-1} x_n W^{nk}$$

$$\hat{S}_x(k) = \hat{S}_{xk} = \frac{1}{2N} \left| \hat{X}(k) \right|^2 = \frac{1}{2N} \left| \hat{X}_k \right|^2$$

利用有限离散傅氏变换的卷积定理，很易证明上述两条途径所获得的功率谱的估计是一致的。

周期图分析是早在DFT和功率谱概念提出前，基于傅氏三角级数提出的。对于周期性确定性函数的测量：

$$x(t) = \sum_{v=0}^{p-1} \left(a_v \cos(\lambda_v t) + b_v \sin(\lambda_v t) \right) + \xi(t)$$

式中 a_v, b_v, λ_v 均为常系数，而 ξ_v 为白噪声干扰。

对于这样的信号分析，当时提出了**周期图统计量**：

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=0}^{n-1} \left| x_t e^{-jt\lambda} \right|^2$$

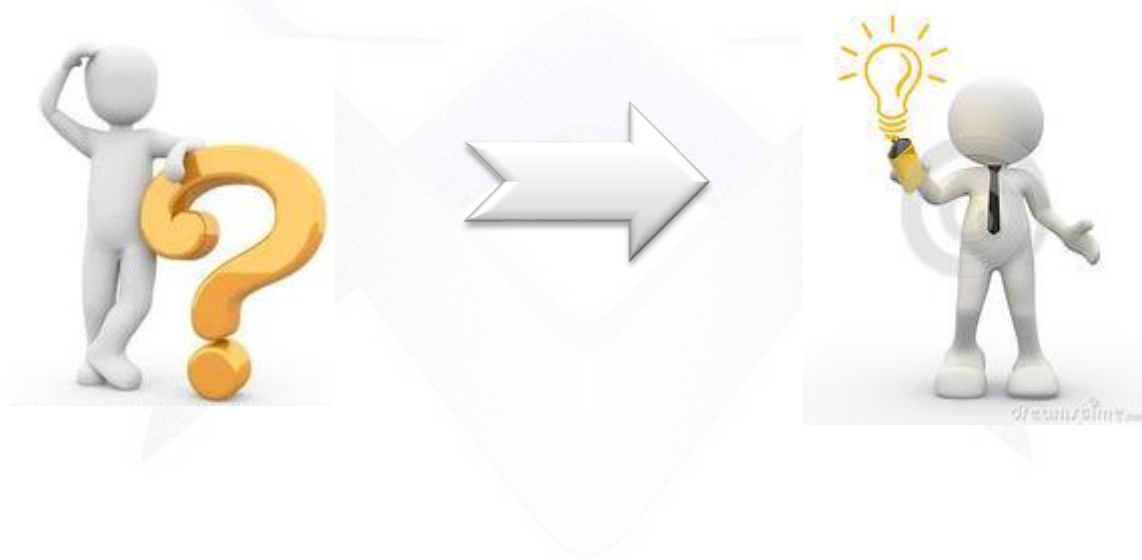
进行分析。很显然，当 ξ_v 等于零时，周期图与前面给出的定义完全相等。

3. 谱估计的经典方法

□3.2. 谱估计的评价

经典功率谱估计方法是否可用？

进行评价
偏差/方差/均方误差



➤ a. 均值

从均值上看，谱估计是有偏的，但是渐进无偏估计。

由前面给出的维纳-辛钦定理证明过程，可以看出：

$$\begin{aligned} S_x(\omega, T) &= \frac{E|X_T(\omega)|^2}{2T} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left\{ \int_{-T+|\tau|}^T E[x_T(t)x_T(t+\tau)] dt \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left\{ R_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) \right\} d\tau \end{aligned}$$

周期图法

从上式可知，对于有限数据长度，采用周期图方法估计的功率谱的均值不是 $R_x(\tau)$ 的傅氏变换，而是：

$$R_x^T(\tau) = R_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right)$$

渐进
无偏

的傅氏变换。也就是说，对于有限时间长度，周期图谱估计是 $R_x(\tau)$ 和一个三角窗口相乘后的傅氏变换。

自相关法

$$\begin{aligned} E[\hat{S}_x^N(k)] &= \sum_{m=-N+1}^{N-1} \hat{R}_x(m) W^{mk} \\ &= \sum_{m=-N+1}^{N-1} R_x(m) \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) W^{mk} \\ &= \sum_{m=-N+1}^{N-1} R_x(m) v^N(m) W^{mk} \\ &= S_x(k) * V^N(k) \end{aligned}$$

式中

$$v^N(m) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right), & |m| \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这个三角窗函数的有限离散傅氏变换(DFT)是

$$V^N(k) = \frac{1}{N} \left[\sin \frac{N2\pi k \Delta f}{2} / \sin \frac{2\pi k \Delta f}{2} \right]^2$$

由此可见，无论采用自相关法，还是采用周期图法，所得的谱估计的均值有以下共同特点：

(1) $\hat{S}_x^N(k)$ 是 $S_x(k)$ 有偏估计。从时域上看，这是由于真实自相关被乘以一个三角窗 $v^N(m)$ 造成的。从频域上看，是由于真实功率谱被谱窗口 $V^N(k)$ 卷积所致。

(2) 当 $N \rightarrow \infty$ 时， $V^N(k)$ 趋于狄拉克函数，其余各点 ($k \neq 0$) 趋于零，因此谱估计是渐进无偏的。

(3) 引入了窗函数是功率谱估计的特点。上述三角窗函数 $v^N(m)$ 也是由于把数据截断而自然造成的。也就是说：时域上对数据加矩形窗等效于对自相关函数加三角窗函数。

谱窗口函数的卷积作用是功率谱估计失真的主要原因。

一方面，真实功率谱中的尖峰经谱窗卷积后，会使其主瓣和第一旁瓣附近各点的谱估计值显著变大，这种影响称作泄漏效应。另一方面，卷积又有把真实功率谱中的尖峰展平的作用。卷积范围过宽甚至可能导致原来存在的尖峰在估计值中丢失。

因此，进行谱估计时，数据样本长度至少应该长到使谱窗主瓣半功率宽度比真实功率谱中的最窄的谱峰宽度还窄，这样才能避免卷积使谱峰丢失。

➤ b. 方差

方差的分析比较困难。在这里，对于高斯白噪声过程，我们给出结论。详细证明可以从参考书目中查找。

对于高斯白噪声随机过程信号，可以推导证明经典谱估计的方差特性如下：

(1) 估计的方差是：

$$\text{Var}[\hat{S}_x^N(\omega)] = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin(N\omega)}{N \sin \omega} \right)^2 \right]$$

可见即使 $N \rightarrow \infty$, $\text{Var}[\hat{S}_x^N(\omega)]$ 也不会趋于零。而是 σ_x^4 的数量级。也就是说，无论如何加大样本长度，功率谱估计也不是一致估计（偏差趋近于零，但方差不为零）。即不能通过增加样本点数来提高估计的精度。

(2) 当估计频率 $\omega_1 = \frac{2\pi k}{N}$, $\omega_2 = \frac{2\pi l}{N}$, k, l 是整数时, 有

$$\text{Cov}[\hat{S}_x^N(\omega_1)\hat{S}_x^N(\omega_2)] = \sigma_x^4 \left\{ \left[\frac{\sin((k+l)\pi)}{N \sin\left(\frac{(k+l)\pi}{N}\right)} \right]^2 + \left[\frac{\sin((k-l)\pi)}{N \sin\left(\frac{(k-l)\pi}{N}\right)} \right]^2 \right\}$$

由上式可见, 只要 $k \neq l$, 协方差便等于零。这就是说, 周期图上相距为 $\frac{2\pi}{N}$ 的整数倍的两点, 其估计值是不相关的。而且 N 值越大, 这些点相距越近。

综上所述，由于周期图的方差达到了随机过程的方差的平方，所以从每一次样本获得功率谱的估计值离散性很大。

而且，当样本数据点数增大，由于相距很近的估计互不相关，周期图沿频率轴会出现激烈起伏，所以不能直接采用周期图作为功率谱的估计。

随着所取的信号序列长度的不同，所得到的功率谱也不同，这种现象称为随机起伏。由于随机起伏大，使用功率谱不能得到比较稳定的估值。

4. 功率谱估计的改进

由于经典谱估计不是功率谱的一致估计，而且N值越大，起伏越激烈，因此需要研究如何加以改进。有两类改进措施：

- (1) 对同一过程作多次周期图估计，再加以**平均**；
- (2) 用其他窗函数替代自然形成的矩形数据窗（或三角谱窗），对单一功率谱估计加以**平滑**。

实际谱分析过程中，往往是同时采用这两种改善措施。

4. 功率谱估计的改进

□4.1. 平均

平均的基本思想就是基于有限离散傅氏变换DFT是随机过程的正交分解，频谱系数都是随机变量，利用单个样本进行DFT获得的频谱系数则是这些随机变量的一次抽样。可以根据概率论的大数定律，进行多次抽样平均提高周期图的估计精度。

具体算法是将整个试验数据N分成k段，每段 $M = \frac{N}{K}$ 点，对每一段分别估计功率谱，然后求其平均值作为最后的谱估计值。

理论上，如果各段数据是相互独立的，则求平均之后估计值的均值不变，仍然等于每段估计的均值，但却可以使估计值的方差减小到每段估计值的方差的K分之一。

平均后的谱估计为

$$\hat{S}_x^{AV}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{S}_{x,i}^M(\omega)$$

数学期望:

$$E[\hat{S}_x^{AV}(\omega)] = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K E[\hat{S}_{x,i}^M(\omega)] = E[\hat{S}_{x,i}^M(\omega)]$$

方差:

$$Var[\hat{S}_x^{AV}(\omega)] = \frac{1}{K} Var\left[\sum_{i=1}^K \hat{S}_{x,i}^M(\omega)\right]$$

可见K越大, 方差越小, 当 $K \rightarrow \infty$, $Var[\hat{S}_x^{AV}(\omega)]$ 将趋于零, 因此是一致估计。

不过，当数据样本总长度 N 一定的情况下， K 的增加将导致每段长度 M 的减小，将导致均值的偏差加大。而且， M 值还决定谱估计的分辨率。因此，实际数据处理时，首先应该根据分辨率要求和先验知识确定每段样本点数 M ，再根据方差的要求确定段数 K ，从而最终计算总的试验数据样本长度。

$$N = KM$$

经典的**巴特利特 (Bartlett) 方法**，**平均周期图方法**均属于该方法。

4. 功率谱估计的改进

□4.2. 平滑

平滑法的提出是针对采用**自相关函数法**估计功率谱提出的。由于采用自相关函数法无法将随机数据样本分段，根据窗函数卷积的平滑效应，提出了在数据截断所引起的自然三角窗的基础上，再乘以一个窗函数，以平滑谱估计的上下起伏。

$$\hat{S}_x^{SM}(\omega) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^M(m) \hat{R}_x^N(m) e^{-jm\omega}$$

很易推导出，谱估计的数学期望为：

$$E[\hat{S}_x^{SM}(\omega)] = \frac{1}{4\pi^2} [S_x(\omega) * V^N(\omega) * W^M(\omega)]$$

在时间域上，有：

$$E[\hat{S}_x^{SM}(\omega)] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} [R_x(m)v^N(m)w^M(m)]e^{-j\omega m}$$

可见，把真实自相关函数乘以两个窗函数再作傅氏变换便是平滑后功率谱估计的均值。需要说明的是两个窗函数中，只有w窗函数是人为加上的，称为**谱窗**。而且两个窗函数的长度也可以不相同。

可以证明，只要谱窗函数 $w^M(m)$ 满足 $w^M(0) = 1$ 就能保证谱估计时渐进无偏估计。而且，对于高斯白噪声随机信号，如果

$$\sum_{m=-M+1}^{M-1} [w^M(m)] < 1$$

则平滑后的方差将比周期图本身估计的方差小。

经典的**Blackman-Tukey方法**，是平滑周期图方法。

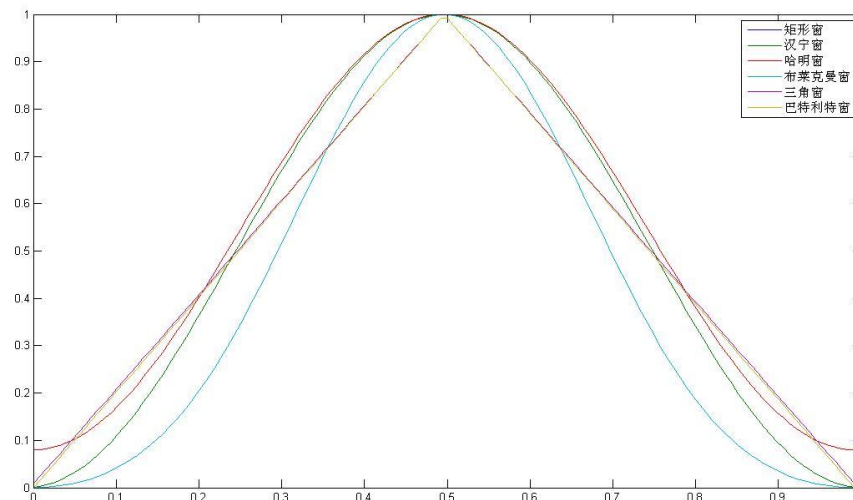
4. 功率谱估计的改进

□4.3. 常用谱估计窗

为使谱估计非负，充分条件是 $w^M(m) \geq 0$ 。通常选用的谱窗函数是偶函数，而且窗函数值随着 m 值得增大而减小。

常用的窗函数有：

- (1) 矩形窗
- (2) 三角窗
- (3) Hanning窗
- (4) Hamming窗



4. 功率谱估计的改进

□4.4. Welch法

这是应用最为广泛的谱估计算法，它的本质上属于平均法，但也吸收了平滑法的特点。把数据分段（ $N=KM$ ）后，先对每段数据在时间域上乘以窗函数，然后再作有限离散傅氏变换，对每一段估计周期图，最后对谱估计进行平均。

$$\hat{S}_x^w(\omega) = \frac{1}{KU} \sum_{i=0}^{K-1} P_i(\omega) = \frac{1}{KMU} \sum_{i=0}^{KM-1} |X_i(\omega)|^2$$

其中 $U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$ 是归一算子。

时域上窗函数

Welch在探索这种方法时，还发现：

(1) 相邻两段数据的一定重叠，有助于提高数据样本之间的相关性，从而减小沿频率轴的起伏现象(noverlap-pwelch)；

(2) 在平滑法中，窗函数是加在自相关函数的估计上的，而在Welch中是直接加在时间数据上的。这样放宽了对窗函数的非负要求，自然保证了谱窗是非负的充分条件。

(3) 引入归一算子的目的是保证渐进无偏估计。

(4) Welch法中，当各段数据不重叠时，可以推导谱估计的方差与平均法相近，可见K越大，方差越小，当 $K \rightarrow \infty$, $Var[\hat{S}_x^w(\omega)]$ 将趋于零，因此是一致估计。

□经典功率谱估计方法比较

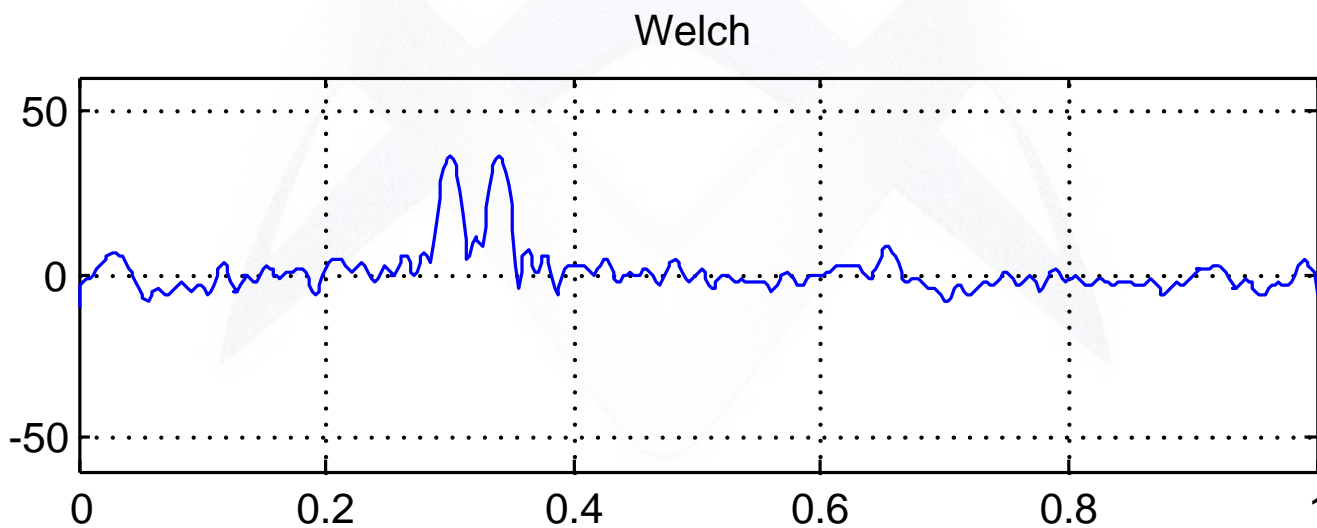
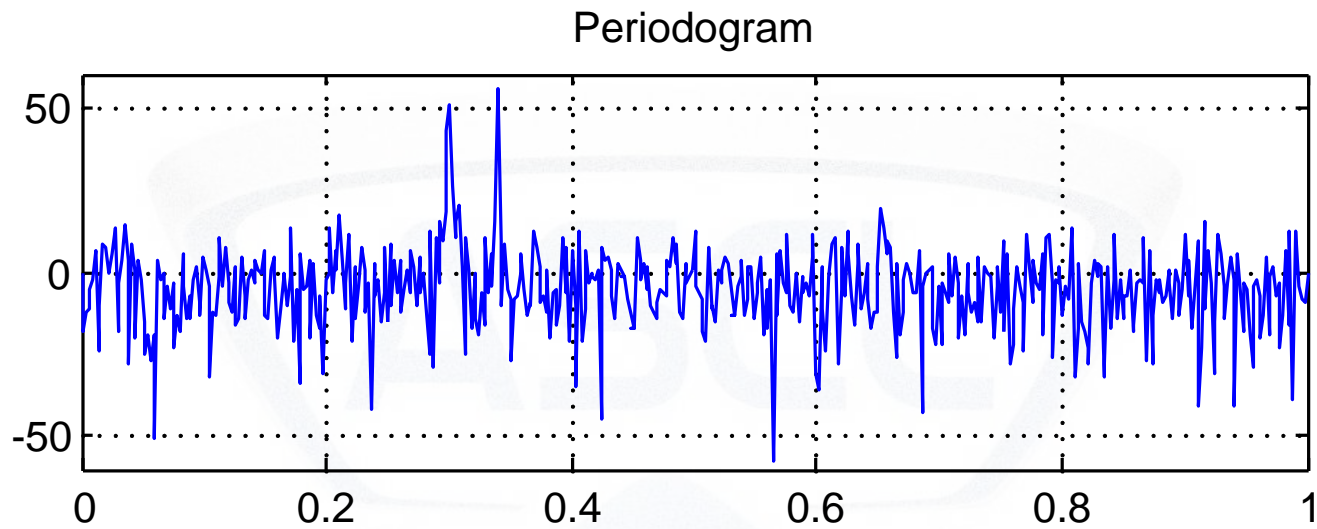
例：一序列含有白噪声和两个频率的余弦信号，分别采用周期图法和Welch法估计该序列的功率谱。

$$x[k] = \cos(0.3\pi k) + \cos(0.34\pi k) + w[k]$$

MATLAB

```
[P, f] = periodogram(x,[],NFFT,2);
```

```
[P, f] = pwelch(x>window,[],NFFT,2);
```



- 周期图法谱估计曲线的波动很大，即估计的方差较大，但频率分辨率较高。
- Welch法谱估计曲线较为平滑，方差减小，但分辨率降低。
- 对Welch法，当数据分段数增加，各段数据长度较短时，谱的分辨率明显下降，而谱估计曲线较为平滑，方差较小；反之，当数据分段数减小，各段数据长度较长时，谱的分辨率明显提高，而谱估计曲线波动较大，方差较大。

提高分辨率和减小方差是一对矛盾

4. 功率谱估计的改进

□4.5. 参数化方法

AR模型方法、ARMA模型方法。

5. 互谱密度的估计

与功率谱估计类似，互谱密度的估计也可以采用互相关法和频谱乘积来估计。最常用的估计方法也有Welch法，估计的质量与功率谱估计相同。

$$\hat{X}^N(k) = \hat{X}_k^N = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk} \quad \hat{Y}^N(k) = \hat{Y}_k^N = \sum_{n=0}^{N-1} y_n W^{nk}$$

$$\hat{S}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \left| \hat{X}^{*N}(k) \hat{Y}^N(k) \right|^2$$

由于互谱是复数，所以互谱估计时又有一些功率谱所没有的特点。当两个信号之间存在简单延时，互谱具有线性相位特征。

习题四

- 1. 随机过程功率谱的定义, 自功率谱与自相关函数的理论关系(维纳-辛钦定理)的推导?
- 2. 周期图与周期图估计方法的基本概念与公式?
- 3. 试推导互功率谱密度函数与互相关函数的理论关系, 并据此推导互相关函数的有限时间频谱估计方法?
- 4. 功率谱估计的误差分析?
- 5. 功率谱估计的平均、平滑方法? 为什么需要这些方法?
- 6. Welch 估计方法的特点与优点?



完毕，感谢关注！

Q & A

