



临界转速的计算



作者：
日期：



一、临界转速分析的目的

临界转速分析的主要目的在于确定转子支撑系统的临界转速 ,并按照经验或有关的技术规定 ,将这些临界转速调整 ,使其适当的远离机械的工作转速 ,以得到可靠的设计。

例如设计地面旋转机械时 ,如果工作转速低于其一阶临界转速 N_{c1} ,应使 $N < 0.75 N_{c1}$,

如果工作转速高于一阶临界转速 ,应使 $1.4 N_{ck} < N < 0.7 N_{ck+1}$,而对于航空涡轮发动机 ,习惯做法是使其最大工作转速偏离转子一阶临界转速的 $10\sim 20\%$ 。

二、选择临界转速计算方法

要较为准确的确定出转子支撑系统的临界转速 , 必须注意以下两点

- 1. 所选择的计算方法的数学模型和边界条件要尽可能的符合系统的实际情况。
- 2. 原始数据的 (系统支撑的刚度系数和阻尼系数)准确度 ,也是影响计算结果准确度的重要因素。
- 3. 适当的考虑计算速度 ,随着转子支撑系统的日益复杂 , 临界转速的计算工作量越来越大 , 因此选择计算方法的效率也是需要考虑的重要因素。

三、常用的计算方法

名称	原理	优点	缺点
矩阵迭代法 (Stodola 斯托多拉)	<div>1. 假定一阶振型挠曲弹性线并选择试算速度</div> <div>2. 计算转子涡动惯性载荷 ,并用此载荷计算挠性曲线</div> <div>3. 以计算得到的挠性曲线和适当调整的转速重新循环计算</div> <div>4. 当计算曲线和初始曲线吻合的时的转速即为一临转速</div> <div>5. 高阶临界转速方法同 ,但需利用正交条件消除低阶弹性线成分 ,否则计算错误</div>	收敛较快 ,一阶临界转速结果较为准确	高阶临界转速精度差 ,计算复杂
逐段推算法 (传递矩阵 法) (Prohl-Myklestad)	<div>1. 划分转轴为若干等截面段 ,选择试算转速</div> <div>2. 从转轴的一端算起 ,计算另一端的四个状态参数 (挠度、转角、弯矩、剪力)</div> <div>3. 根据与其相邻轴段在该截面处的约束条件 ,得到下个轴段的状态参数</div> <div>4. 换个转速重复计算 ,直到计算得到的状态参数满足边界条件 ,此时的转速即为临界转速</div>	将四个状态参数写成矩阵的形式 ,计算方便 ,在各类旋转机械制造业中是最为通用、发展最为完善的方法	根据经验或有关的计术资料选择计算转速 ,比较盲目
能量法 (Rayleigh-Ritz)	<div>1. 以能量守恒原理为理论基础 ,根据轴系中的最大应变能等于最大的动能 ,建立微分方程 ,据动能是转速的函数计算转速</div>	原理简单 ,易于理解	如果假设的振型不准确会带来误差
特征方程法	将通用的指数解带入微分方程 ,得到以临界转速为解的多项式		方程难以求解 ,应用不多
数值积分法 (前进法)	以数值积分的方法求解支撑系统的运动微分方程 ,从初始条件开始 ,以步长很小的时间增量时域积分 ,逐步推算出轴系的运动	唯一能模拟非线性系统的计算方法 ,在校核其他方法及研究非线性对临界转速的影响方面很有价值	计算量较大 ,必须有足够的积分步数

注: 1 . Stodola 斯托多拉法

2.Prohl - Myklestad 莫克来斯塔德法

传递矩阵法

基本原理 :传递矩阵法的基本原理是， 去不同的转速值 ,从转子支撑系统的一端开始 ,循环进行各轴段截面状态参数的逐段推算，直到满足另一端的边界条件。

按第四章的方法，把转子简化为集总质量模型后，传递矩阵法是把系统分为圆盘、轴段和支承等若干个典型的单元或部件，用力学方法建立这些部件两端截面状态向量间的传递关系，再利用连续条件就可求得转子在任一截面的状态向量与起始截面的状态向量间的关系，通过对能满足边界条件的涡动频率的搜索，就可得出转子系统的各阶临界转速。计算在给定自转角速度时转子在不平衡质量激励下的振动，就可求得转子的不平衡响应。为此先讨论各种典型部件的传递矩阵。这些典型部件可以是圆盘、轴段、弹性支承或其组合等。

优点 :对于多支撑多元盘的转子系统，通过其特征值问题或通过建立运动微分方程的方法求解系统的临界转速和不平衡响应，矩阵的维数随着系统的自由度的增加而增加 ,计算量往往较大：采用传递矩阵法的优点是矩阵的维数不随系统的自由度的增加而增大 ,且各阶临界转速计算方法相同， 便于程序实现， 所需存储单元少， 这就使得传递矩阵法成为解决转子动力学问题的一个快速而有效的方法。

缺点：求解高速大型转子的动力学问题时 ,有可能出现数值不稳定现象。今年来提出的 R i ccati 传递矩阵法，保留传递矩阵的所有优点，而且在数值上比较稳定，计算精度高，是一种比较理想的方法 ,但目前还没有普遍推广。

轴段划分：首先根据支撑系统中刚性支撑 (轴承) 的个数划分跨度。在整个轴段内，凡是轴承、集中质量、轮盘、联轴器等所在位置，以及截面尺寸、材料有变化的地方都要划分为轴段截面。若存在变截面轴 ,应简化为等截面轴段，这是因为除了个别具有特殊规律的变截面轴段外 ,其他的变截面轴段的传递矩阵特别复杂。

传递矩阵：

4. 轴段传递矩阵

每段起始状态参数和终端状态参数的转换方程，根据是否考虑转轴的分布质量 ,可以建立两种轴段传递矩阵

当考虑轴段的分布质量时 :起始和终端的转换方程是均质等截面杆的振动弹性方程 :
不考虑转轴的分布质量时建立的传递矩阵

X

M

Q_{ki}

1

0

0

L

0

0

12

1

0

12L

L

1

-

-

1

11

M

Q_{0i}

X

M

Q_{0i}

其中， a₁₁,a₁₂,a₂₁,a₂₂ 为该轴段的影响系数，根据材料力学：

11

12

21

22

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

$$\frac{L^3}{3EJ}$$
$$\frac{L^2}{2EJ}$$
$$\frac{L}{EJ}$$

度, a21 和 a22 是终端的剪力和弯矩在终端引起的转角

4. 各轴段间的传递矩阵

从前一轴段的终端到下一轴段的始端 ,如果中间没有独立的结构单元 ,则状态参数不发生变化 ,传递矩阵是单位矩阵 ;两者之间有独立的结构单元时 ,用前一轴段的终端矩阵乘以此单元的矩阵 ,即的下一单元的始端矩阵。独立的结构单元大概可以分为以下四种 :

a. 通过点质量时为 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i p^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, m_i 为点质量 , p 为系统的固有频率

b. 通过转动盘时为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{w}{p} * \frac{I_p}{I_d} & I_d P^2 \\ m_i P^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 , m_i 盘的质量 , I_p 盘的极转动惯量 , I_d 盘的直径转动惯量 , w 盘的转动角速度

c. 通过弹性铰链时为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{C_h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 , C_h 为铰链的力矩刚性系数

d. 通过具有弹性约束的弹性支座时为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 , c₀ 弹性支座的刚性系数 , 如果没有弹性约束则 c_h = 0.

4. 各跨度间的传递矩阵

a. 通过刚性支座的传递

刚性支座是一个跨度的结束 ,在支座处的横向位移为 0 ,所以 :

$$\begin{matrix} X_{\alpha(i-1)} & X_{ki} & 0 \\ M_{\alpha(k-1)} & M_{ki} \\ Q_{0(i-1)} & Q_{ki} & R_i \end{matrix}$$

其中 , R_i 为支座的反作用力 ,在以后整个跨度的计算中 ,此反作用力代替前一跨度中被消除的参数 (挠度) ,而未知参数的个数不变。

b. 通过球头联轴器的传递

球头联轴器也是一个跨度的结束，在此处的弯矩为 0.所以：

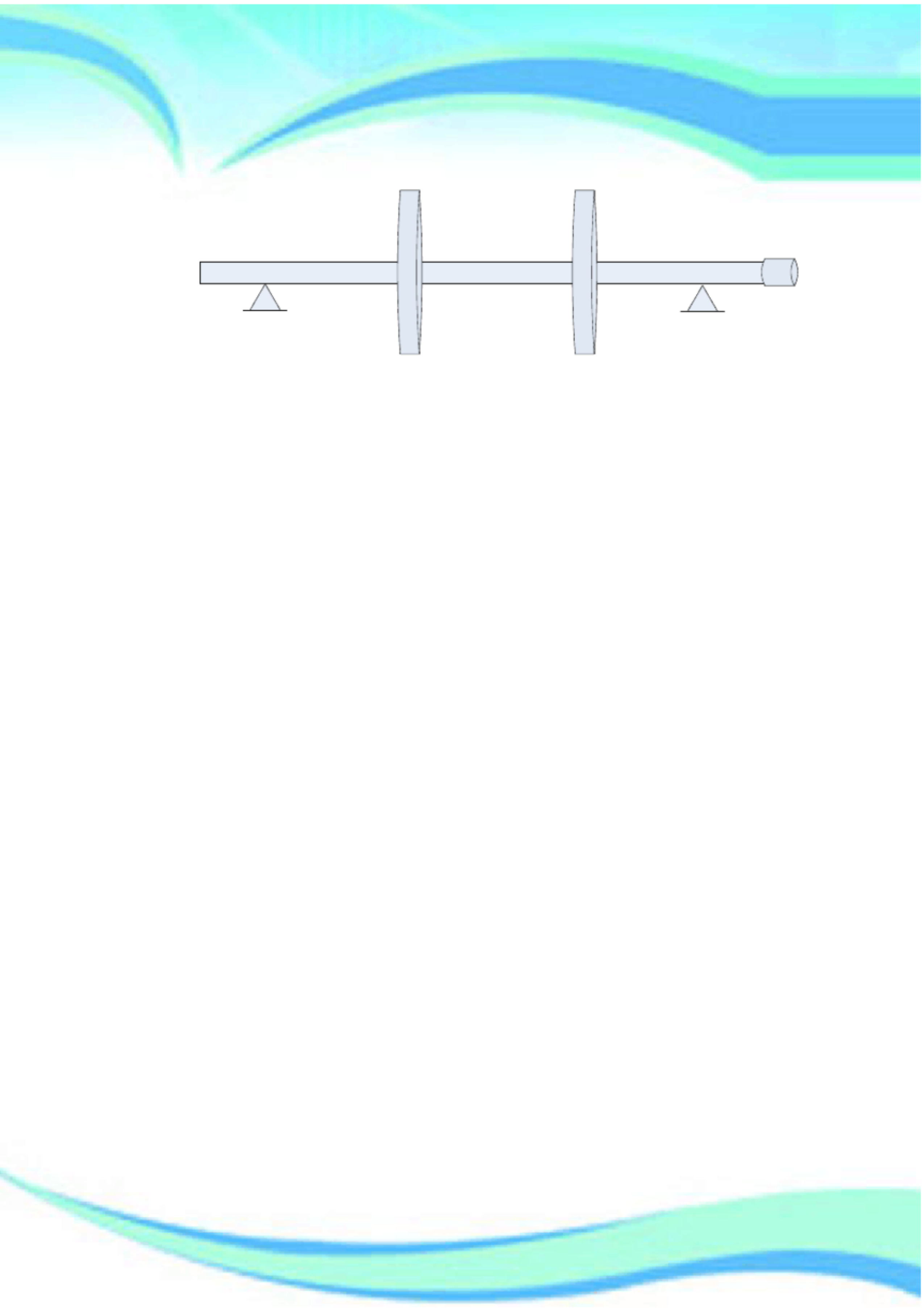
$$\begin{aligned} X_{\alpha(i-1)} &= X_{ki} \\ M_{0(k-1)} &= M_{ki} = 0 \end{aligned} \quad \text{其中,球头联轴器未知的相对转角,在以后此}$$
$$Q_{0(i-1)} = Q_{ki}$$

跨度的计算中，用 X_{ki} 代替上个跨度中消除的参数 $X_{\alpha(i-1)}$ ，从而使未知变量的个数不变。

4. 初始条件：第一跨度 0 截面的初始条件根据约束条件和轴的载荷分析来确定，在所有四个状态参数中，或有两个为零，两个是未知的，或只有两个是独立的，其他的参数可以用这两个独立参数表示。这就意味着在计算过程中所有各段的起始端和末端的状态参数都是两个未知数的线性函数。最主要的是末端的状态参数也总是或两个为 0，或可以用两个参数来表示，因此末端的四个参数方程可以简化为两个具有两个未知数的齐次方程。
5. 临界转速的确定：转子临界转速的确定可以用“瞎子爬山”、对分法等来确定。选取某个 P 值，写出所有轴段的传递矩阵，然后根据初始端的边界条件选取合适的初始参数矩阵。从转子的起始端逐段推算其状态参数，在每个跨度的终端，按照条件进行参数的消除和变换，最终递推到末端时，可以得到两个含有两个未知数的齐次方程。假设齐次方程的系数行列式为 0，着计算转速就是临界转速；若行列式不为零，则重新选取临界转速计算。将各阶临界转速带入重新计算可得各段始、末端的参数，从而作出振型图。计算过程中，可以将第一跨度的初始截面的某个状态参数设为 1，以后各截面的参数值是相对于 1 的比例值。

(上接第 31 页) 方法计算转子临界转速时，转子会出现正进动和反进动。由于陀螺效应的作用，随着转子自转角速度的提高，反进动固有频率降低，而正进动固有频率将提高。根据临界转速的定义，应只对正进动固有频率进行分析。在后处理中首先剔除负固有频率，然后分析各阶模态模型确定同一阶振型的正进动与反进动固有频率。改变转子自转角速度 ω ，计算出新的 Ω ，最后画出曲线 $\Omega-\omega$ ，即转子坎贝尔曲线，如图 5 所示。根据临界转速定义，当 $\Omega=\omega$ 时， Ω 即所求临界转速。需要

临界转速计算：

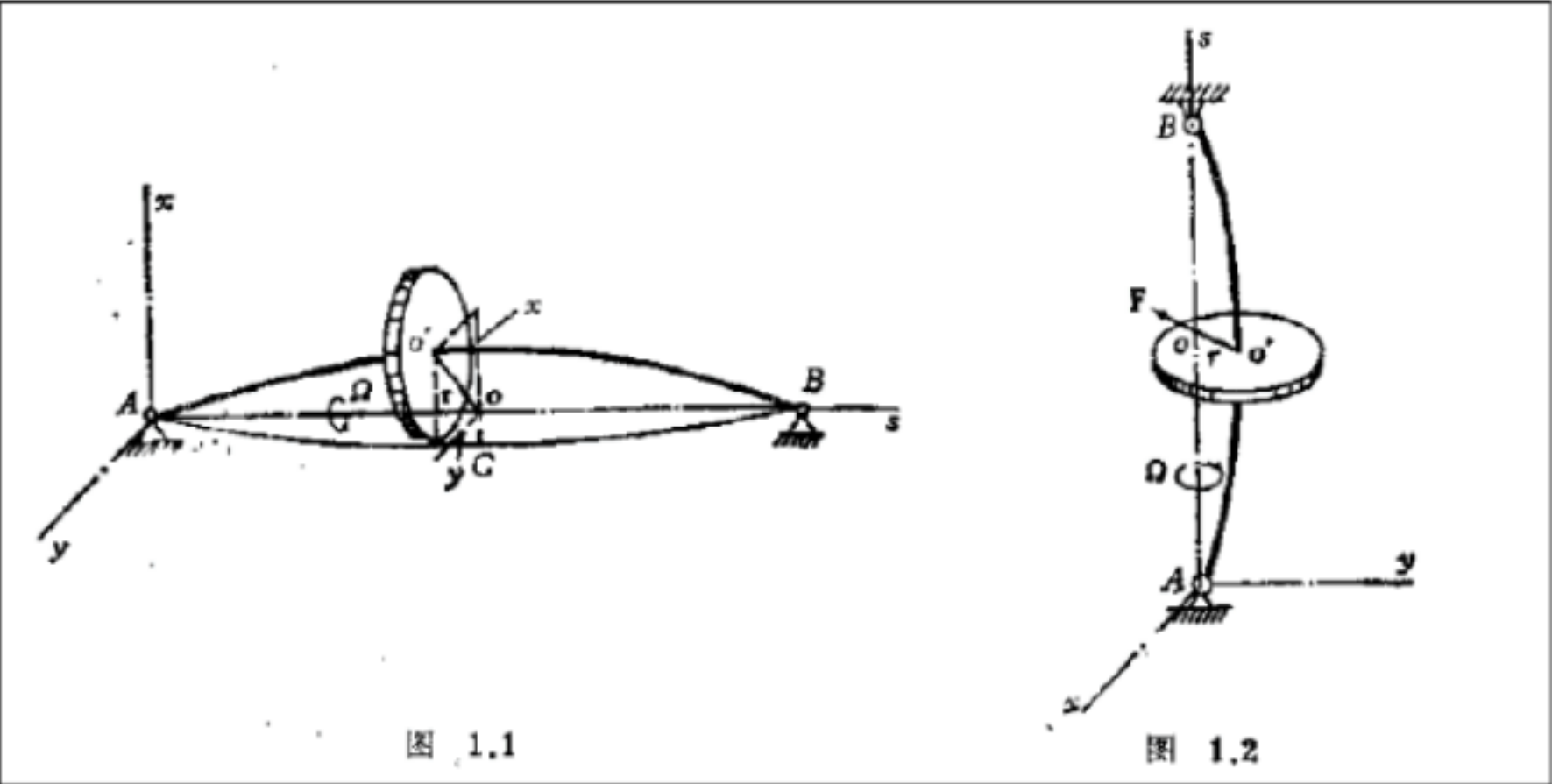


单圆盘转子的临界转速和不平衡响应

早期的旋转机械比较简单，可以把转子看做是圆盘装在无重的弹性转轴上，而转轴的两端则由完全刚性即不变形的轴承及轴承座支撑，这种模型成为刚性支撑。

1.1 涡动的定义

通常转轴的两支点在同一水平线上，转轴未变形时，转子的轴线处于水平位置，（实际上由于盘的重力作用，即使在静止时，转轴也会变形，而不是处于水平位置），由于转子的静变形交小，对转子的运动的影响可以忽略不计。有时为了避开静变形，可以考虑让转轴的两支点在同一垂直线上。



假设转子以角速度 Ω 做等速转动，当处于正常运转时，轴线是直的，如果在他的一侧添加一横向冲击，则因转轴有弹性而发生弯曲振动，涡动就是研究这种性质的运动。假设圆盘的质量为 m ，他所受到的力是转轴的弹性恢复力 $F = -k r$ ，其中 k 为转轴的刚度系数， $R = \infty$ ，圆盘的运动微分方程：

令

则有

它的解可写作

$$m\ddot{x} = F_x = -F \frac{x}{r} = -kx$$
$$m\ddot{y} = F_y = -F \frac{y}{r} = -ky$$
$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_n^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_n^2 y &= 0 \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos(\omega_n t + \alpha_x) \\ y &= Y \sin(\omega_n t + \alpha_y) \end{aligned} \right\}$$

(1.2)

(1.3)

(1.4)

由式 1.4 可知，圆盘或转轴的中心 o 在相互垂直的两个方向作频率同为 ω_n 的简谐振动。在一般情况下，振幅 X 和 Y 是不相同的，式 1.4 确定点轨迹为一椭圆， o 的这种运动成为“涡动”，自然频率 ω_n 称为进动角速度。

$$z = x + iy \quad (i = \sqrt{-1})$$

则 (1.3) 式变为

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = 0$$

其解为

$$z = B_1 e^{i\omega_n t} + B_2 e^{-i\omega_n t}$$

(1.5)

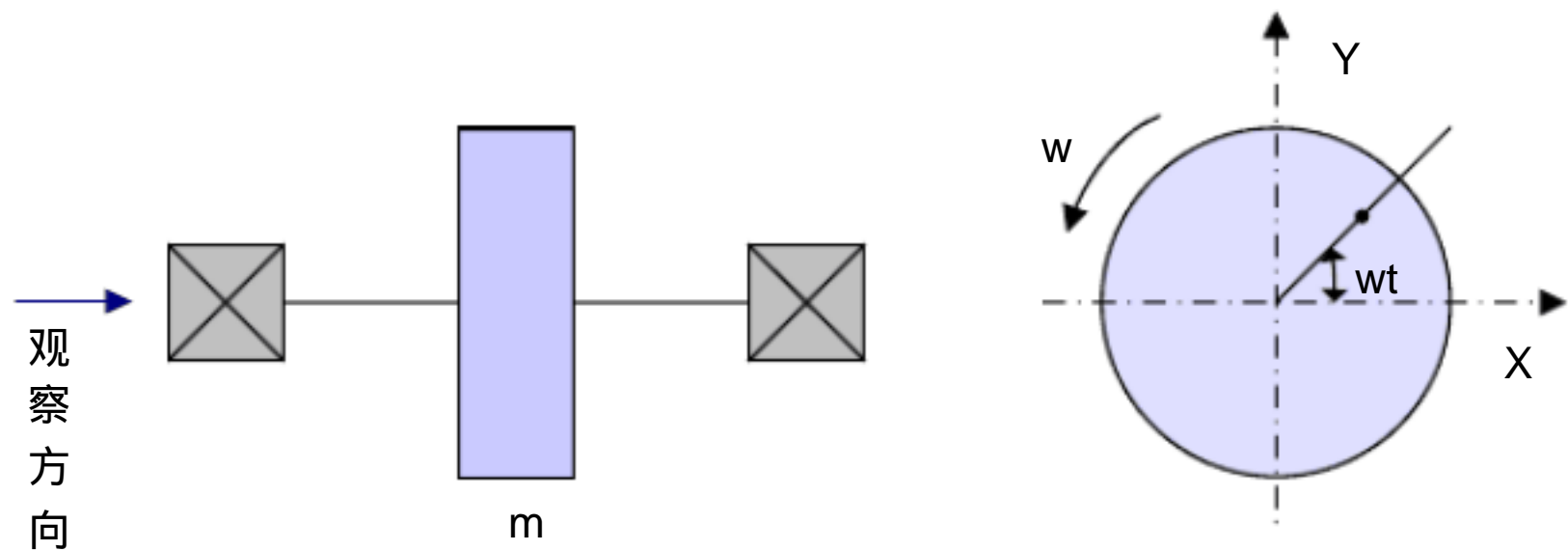
(1.6)

其中 B_1 和 B_2 都是复数，由起始的横向冲击决定。第一项是半径为 B_1 的反时针运动，运动方向和转动角速度相同，成为正进动。第二项是半径为 B_2 的顺时针运动，运动方向和转轴的转动方向相反，成为反进动。圆盘中心 O 的涡动就是这两种进动的合成。由于起始条件的不同，转子中心的涡动可能出现以下情况：

- $B_1 \neq 0, B_2 = 0$ 涡动为正进动，轨迹为圆，半径为 B_1 ；
- $B_1 = 0, B_2 \neq 0$ 涡动为反进动，轨迹为圆，半径为 B_2 ；
- $B_1 = B_2$ 轨迹为直线；
- $B_1 \neq B_2$ 轨迹为椭圆， $B_1 > B_2$ 时为正涡动； $B_1 < B_2$ 时为反涡动。

由以上讨论可知，圆盘或转轴的中心的进动或涡动属于自然振动，他的频率就是圆盘没有转动时，转轴弯曲振动的自然频率。

1.2 圆盘的偏心质量引起的振动、临界转速



假设转盘的质量为 m ，偏心距为 r ，角速度为 ω ，设离心力的初始相位为 0 ，则在某一时刻 t ，离心力矢量和 x 轴的夹角为 ωt ，此时离心力在 X 和 Y 向的投影为：

$$F_x = m r \omega^2 \cos \omega t$$

$$F_y = m r \omega^2 \sin \omega t$$

F_x 和 F_y 分别是各自方向上的周期性变化的力，频率和转盘的频率相同，在这种交变力的作用下，转子在 X 和 Y 方向也将做周期性运动，假设两个方向上阻尼和刚度相同，则转子的运动微分方程：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos \omega t$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F \sin \omega t$$

其解为：

$$\begin{aligned} x(t) &= Z \cos(\omega t - \varphi) \\ y(t) &= Z \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$
$$Z = \frac{F}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$
$$\varphi = \arctan \frac{2\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

代入 (1.13) 式后，可求得振幅

$$|A| = \left| \frac{e\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \right| = \left| \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \right| \tag{1.14}$$

圆盘或转轴中心 O' 对于不平衡质量的响应为

$$z = \frac{e(\Omega/\omega_n)^2}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} e^{i\Omega t} \tag{1.15}$$

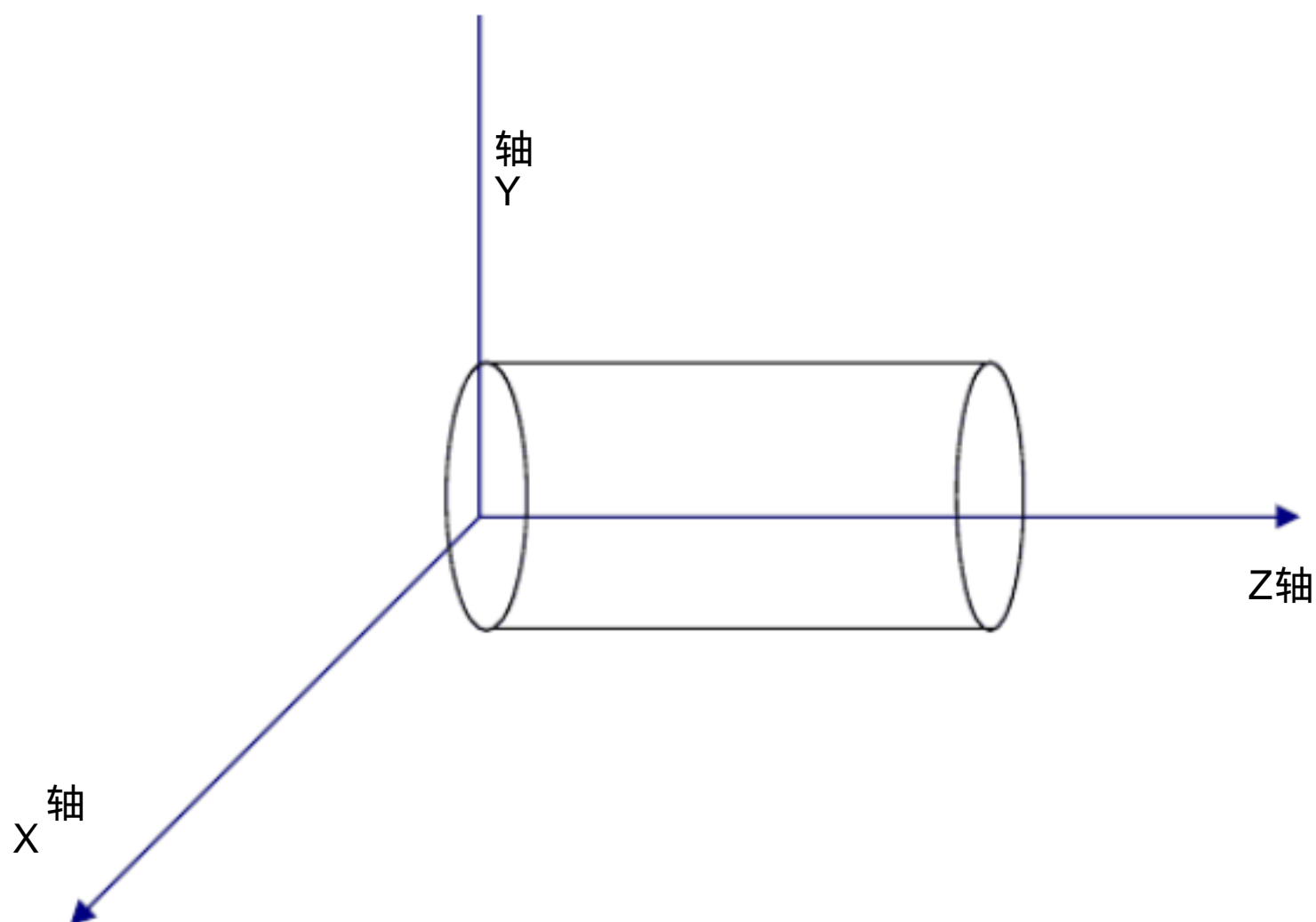
钟一谔

结论：

- 1. 只考虑强迫振动时，轴心的响应频率和偏心质量的激振频率相同，在转速小于临界转速时且不考虑阻尼时，相位也相同，轴心和质心在一条直线上；当转速大于临界转速时且不考虑阻尼时，相位相差 180° 。
- 2. 当考虑转子的涡动时，运动比较复杂；
- 3. 不平衡矢量所在的位置成为重点，振动矢量所在的位置成为高点，高点比重点滞后的角度成为滞后角，当令阻尼比为 0 时，为 0，说明滞后角是由阻尼引起的；
- 4. 转子存在偏心，运行的过程中又出现动挠度，当转速小于临界转速时，挠度和 F 即偏心方向相同，使终偏心增大；当转速等于临界转速时，出现共振；当转速大于临界转速时，挠度方向和偏心方向相反，使终偏心减小，转子振动趋于平稳，这种现象成为自动对心；

1.3 等截面转子的振动

并不是所有的转子系统都可以简化为具有刚性支撑的单轮盘转子系统模型，对于均质、等截面转子，如果按照集中质量处理，将不能反映真实振动特性。均质、等截面转子的运动规律可以用一个偏微分方程表示，该偏微分方程含有时间和轴向位置两个自变量，因此可以确定任意轴线位置在任意时刻的位置，利用均质、等截面转子模型研究得出的结论对一般转子也是适用的。



运动方程 :如图上图所示的两端简支的等截面转子 , 设其密度为 ρ , 截面面积为 A , 弯曲刚度为 EI , 分布干扰力在 xoz 和 $y oz$ 平面分别为 $F_x(z,t)$ 和 $F_y(z,t)$, 则转子的振动可以用以下一组微分方程组成 :

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} &= F_x(z,t) \\ A \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4} &= F_y(z,t) \end{aligned}$$

令分布干扰力为 0 , 即可得到转子的自由振动微分方程 :

$$A \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x(z,t)}{\partial z^4} = 0$$

其解为 :

$$x(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi z}{l} \cos \omega_n t + \phi_n$$

$$\text{其中, 固有频率 } \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{A}}$$

$\sin \frac{n\pi z}{l}$ 为振型函数 , D_n 和 ϕ_n 分别为 n 阶自由振动的振型和初 相位

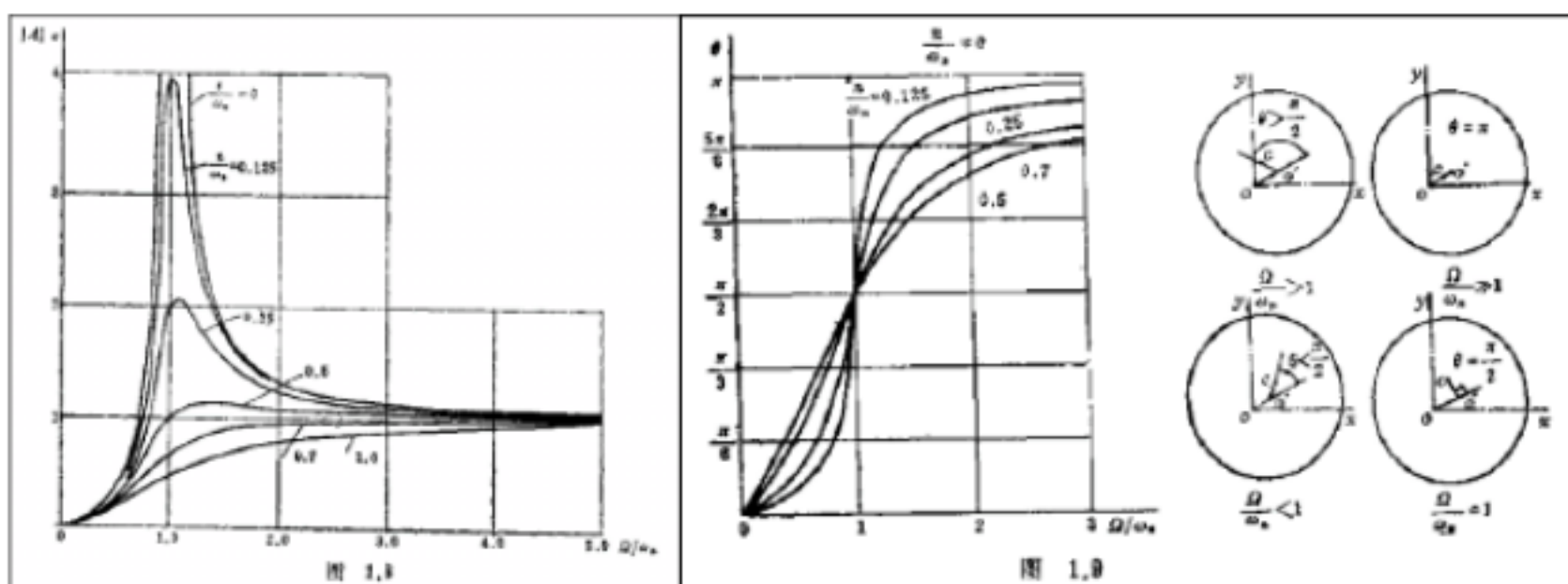
由上式可知转子的自由振动是一系列简谐振动的合成 , 这些简谐振动有以下特点 :

· 固有频率和振型函数是一一对应的 ;

- 振型函数 $\sin \frac{n}{l} z$ 反映了转子轴线上各点位移的相对比例关系，无论振幅 D 如何变化，这种比例关系不会变化；
- 振型是由转子-支撑系统自身的特点决定的，所以又称为固有振型，不同类型的转子系统的振型函数不同，上述的是均质等截面转子的振型函数。

有关振型的基本概念：

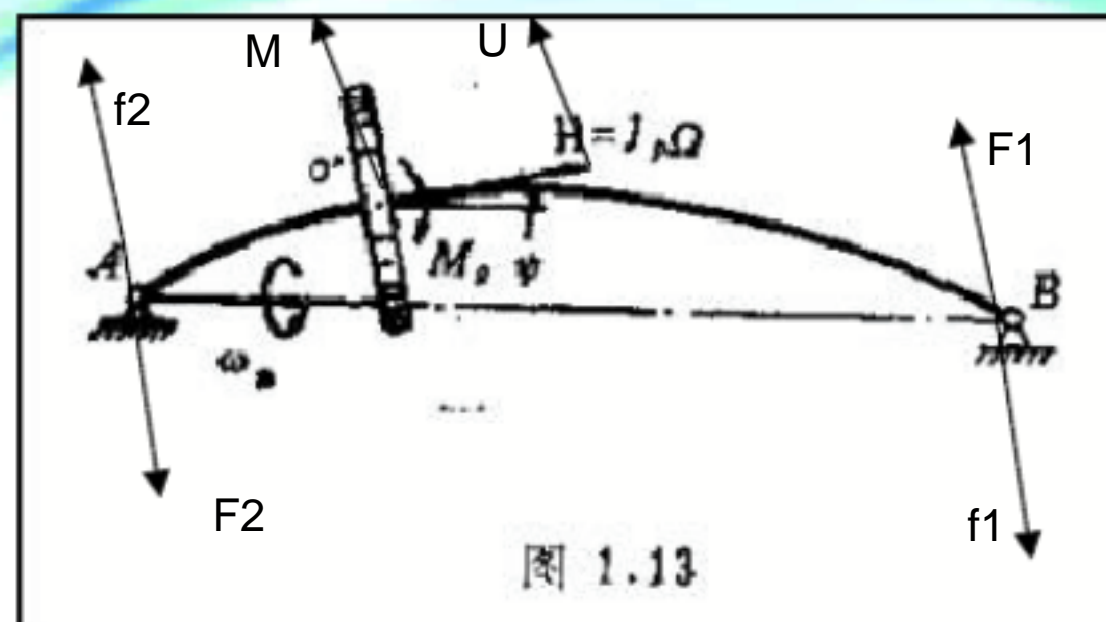
- 节点：轴线上某一点的振型函数值称为该点的振型值，振型值为 0 的点成为节点，阶数越高节点越多，N 阶振型的节点数为 N-1；
- 对称性：对于两端简支的等截面转子，奇数阶振型是对称的，而偶数阶振型是反对称的。因此。在两支座间，奇数阶振型相位相同而偶数阶振型相位相反；
- 正交性：转子的不同阶振型间具有正交性，即第 m 阶振型和第 n 阶振型的乘积在轴长上的积分为 0。
- 理论上，转子的 1、2、3 阶固有频率的比值是 1：4：9,实际 1、2 阶固有频率间的比值为 1:3 左右；
- 理论上，转子-支撑系统经过临界点时，相位变化 180° ，实际上由于阻尼的存在，在临界转速处相位一般变化 90° ，即振动矢量和不平衡矢量间的滞后角为 90° 。
- 如下图所示，由于阻尼的存在，转子中心对不平衡质量的响应在 $w=Wn$ 处不仅不是无限大值，而且不是最大值，最大值发生在 w 略微大于 Wn 时。对于实际的转子系统，有时通过在升速或降速的过程中测量响应的办法来确定转子的临界转速，常常把这个过程中的最大值即峰值的转速作为临界转速。有图可知，通过测量所获得的临界转速在升速上略大于实际的临界转速，而在降速时这略小于实际的临界转速。



1.3 陀螺力矩

基本概念：

- 对质点的动量距：质点 Q 的动量对于点 O 的距定义为质点对于点 O 的动量距，其值为点 O 到质点 Q 的矢量差乘以动量： $M_o(mv) = R \times m v$, 方向按照右手定则判定。
- 对轴的动量距：质点 Q 的动量在 xoy 面内的投影 $m v(xy)$ 对与 O 点的距定义为质点 Q 对 Z 轴的动量距；
- 刚体对轴的转动惯量：刚体的转动惯量是刚体转动时惯性的度量，它等于刚体内各质点的质量与该质点到轴的垂直距离平方的乘机的和。
- 赖柴定理：质点系对固定点的动量距矢量断点的速度等于外力系对同一点的主距。



当圆盘不在两支撑的中点而偏于一边时，转轴变形后，圆盘的轴线和两指点的连线 AB 有一夹角 ψ 。设圆盘的自转角速度为 ω ，极转动惯量为 J_p ，则圆盘对质心的动量距为： $H = J_p \omega$ ，根据右手定则，它与 AB 连线的夹角也为 ψ 。设转轴涡动的频率为 Ω ，则圆盘中心 o 与轴线 AB 所构成的平面绕 AB 轴有进动角速度。由于进动，圆盘的动量距 H 将不断变化，因此动量距矢量的终点将具有速度 U，根据赖柴定理（质点系对固定点的动量距矢量断点的速度等于外力系对同一点的主矩），而圆盘重力距等于 0，显然和动量距矢量终点的速度相等的外力矩只可能是轴承的动反力 F_1 、 F_2 产生的力矩；

力矩 -M (根据作用和反作用) 称为陀螺力矩，它是圆盘施加与转轴的力矩，相当于弹性力矩。在正进动 ($0 < \psi < \pi/2$) 时，它是转轴的变形减小，从而提高了转轴的弹性刚度，即提高了转子的临界转速；在反进动 ($\pi/2 < \psi < \pi$) 时，它是转轴的变形增大，从而降低了转轴的弹性刚度，即降低了转子的临界转速。

当机械中的高速转动部件的对称轴被迫在空间中改变方位时，即对称轴被迫进动时，转动部件必须对约束作用一个附加力偶，这种现象称为陀螺效应。当陀螺效应严重时，可能使机械产生故障，尤其是轴承。

1.4 弹性支撑对转子临界转速的影响

Jeffcott 转子：这种转子模型是对真实转子的简化，刚性支承的单盘转子，单盘位于支承的中间，分析临界转速和陀螺力矩等，是转子动力学的基础。假设盘在平面内运动，不考虑轮盘的偏转，轴是无重轴。

临界转速计算 :2 0.2

1. 基本参数 :截面惯性矩 :J= 4.9 1 E-10,弹性模量 E=2 E 11,右端质量m 3 = 0.0 96g= 0.1k g ,
两个盘的质量 m 1 =m 2 =0.8k g , I p m₁ r₁² r₂² /2= 5.7 3 E - 4 , I d= I p / 2 =

2.86E - 4。

2. 各轴段的传递矩阵 :

第一段 :l=0.04 5 m,J= 9.82 E -10 , a₁₁=1.55E-7,a₁₂ = a₂₁ =5.16 E -6 ,

$$a_{22}=2.29 E-4, \begin{bmatrix} 1 & 0.045 & 5.16 \times 10^{-6} & 7.73 \times 10^{-8} \\ 0 & 1 & 2.29 \times 10^{-4} & 5.16 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 1 & 0.045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二段 : l=0.11 m ,J=9.82 E - 10 , a₁₁ =2.26E-6, a₁₂= a₂₁ = 3.08E-5 ,

$$a_{22}=5.6 E - 4 , \begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 3.08 \times 10^{-5} & 1.128 \times 10^{-6} \\ 0 & 1 & 5.6 \times 10^{-4} & 3.08 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第三段 :l = 0.15m , J = 9.82E - 10,a₁₁=5.73E-6 , a₁₂ = a₂₁ = 5.73E- 5 ,

$$a_{22}=7.64E-4 , \begin{bmatrix} 1 & 0.15 & 5.73 \times 10^{-5} & 2.865 \times 10^{-6} \\ 0 & 1 & 7.64 \times 10^{-4} & 5.73 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第四段 :l=0.11m, J = 9.82 E -10,a₁₁=2.26 E - 6,a₁₂=a₂₁=3.08

$$E-5,a_{22}=5.6E-4, \begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 3.08 \times 10^{-5} & 1.128 \times 10^{-6} \\ 0 & 1 & 5.6 \times 10^{-4} & 3.08 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第五段 : l=0.01 ,J=9.82 E - 10 ,a₁₁ = 1.70E-9,a₁₂ = a₂₁=2.55E - 7,a₂₂=

$$5.09 E -5 \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 2.55 \times 10^{-7} & 8.5 \times 10^{-10} \\ 0 & 1 & 5.09 \times 10^{-5} & 2.54 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X₀₁

初始参数列阵为 : $\begin{bmatrix} 0^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 令 X₀₁=1, 选取 P= 2 0 5 0r / s , 用第一段的矩阵乘此矩阵 , 即可

得此段的终端参数：

$$\begin{matrix} X_{k1} & 1 & 0.045 & 0 \\ & k1 & 01 & 22.22 \\ & M_{k1} & 0 \\ & Q_{k1} & 0 \end{matrix}$$

第二段的始端参数列阵为：

$$\begin{matrix} X_{02} & 0 \\ & 02 & 22.22 \\ M_{02} & 0 \\ Q_{02} & -R_A \end{matrix}$$

，用第二段的传递矩阵乘此列阵

，得终端参

数：

$$\begin{matrix} X_{k2} & 2.4442 & 1.128 \times 10^6 R_A \\ & k2 & 22.22 & 3.08 \times 10^5 R_A \\ M_{k2} & 0.11 R_A \\ Q_{k2} & R_A \end{matrix}$$

,

通过转盘的传递矩阵：

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \times 10^3 & 1 & 0 \\ 3.362 \times 10^6 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

，用此矩阵乘以第二段的终端矩阵得第三段的起始参数

:

$$\begin{matrix} X_{03} & 2.4442 & 1.128 \times 10^6 R_A \\ & 03 & 22.22 & 3.08 \times 10^5 R_A \\ M_{03} & 2.67 \times 10^4 & 0.147 R_A \\ Q_{03} & 8.22 \times 10^6 & 4.79 R_A \end{matrix}$$

第三段的终端参数：

$$\begin{matrix} X_{k3} & -30.854 - 2.789 \times 10^5 R_A \\ & k3 & 513.62 & 4.18 \times 10^4 R_A \\ M_{k3} & 1.26 \times 10^6 & 0.8655 R_A \\ Q_{k3} & 8.22 \times 10^6 & 4.79 R_A \end{matrix}$$

通过转盘的传递矩阵：

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \times 10^3 & 1 & 0 \\ 3.362 \times 10^6 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

，用此矩阵乘以第三段的终端矩阵得第四段的起始参数

:

$$\begin{matrix} X_{04} & -30.854 - 2.789 \times 10^5 R_A \\ & 04 & 513.62 & 4.18 \times 10^4 R_A \\ M_{04} & 1.876 \times 10^6 & 1.367 R_A \\ Q_{04} & 1.12 \times 10^8 & 98.556 R_A \end{matrix}$$

