《数值分析》8

- 三对角矩阵的*LU*分解
- 对称正定矩阵三角分解
- *MATLAB*矩阵分解命令

常微分方程两点边值问题

P1:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = f(x), \quad x \in (0,1) \\ y(0) = \alpha, y(1) = \beta. \end{cases}$$

P2:

$$\begin{cases} [k(x)y']' + q(x)y = f(x), \quad x \in (0,1) \\ y(0) = \alpha, y(1) = \beta. \end{cases}$$

P3:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,L) \\ X(0) = 0, X(L) = 0. \end{cases}$$

二阶常微分方程：$\begin{cases} y''+y+x=0, \quad x\in(0,1) \\ y(0)=0, y(1)=0. \end{cases}$

令 $h=1/(n+1)$， $x_j=jh, y_j=y(x_j)$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$

$$\frac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}+y_j+x_j=0 \qquad \underline{(j=1,2,\cdots\cdots,n)}$$

三对角方程组 $\quad -y_{j-1}+(2-h^2)y_j-y_{j+1}=x_jh^2$

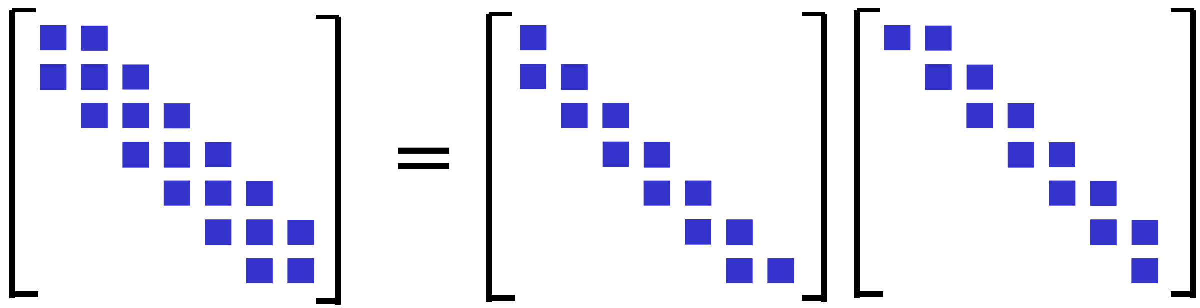
$$\begin{bmatrix} 2-h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2-h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2-h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2-h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

一般形式

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

三角分解:

$$A = LU$$



三对角矩阵　　单位下三角阵　上三角阵

$$AX=F \Rightarrow \quad L\underline{U\,X} = F$$

① $L\,Y=F$　　② $U\,X = Y$

LU分解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -2 & 4 & -2 & \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1/2 & 5/2 & -2 & \\ & -2 & 4 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1/2 & 5/2 & -2 & \\ & -4/5 & 12/5 & -2 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1/2 & 5/2 & -2 & \\ & -4/5 & 12/5 & -2 \\ & & -5/4 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1/2 & 1 & & \\ & -4/5 & 1 & \\ & & -5/4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & 5/2 & -2 & \\ & & 12/5 & -2 \\ & & & 5/2 \end{bmatrix}$$

三对角矩阵的三角分解 $A = L\,U$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix}$$

算法I:
$$\begin{cases} \beta_1 = b_1 \\ \alpha_k = a_k / \beta_{k-1}, \beta_k = b_k - \alpha_k c_{k-1} \end{cases}$$

$$(\, k = 2, 3, \cdots, n \,)$$

格式相对简单
因为三对角

下三角方程组 $LY=f$　上三角方程组 $UX=Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & \beta_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

算法II: $$\begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_k = (f_k - \alpha_k y_{k-1}),\ (k=2,\cdots n) \end{cases}$$

算法III: $$\begin{cases} x_n = y_n / \beta_n \\ x_k = (y_k - c_k x_{k+1}) / \beta_k,\ (k=n-1,\cdots,1) \end{cases}$$

```
function f=triGauss(a,b,c,f)
%TriDiag(a,b,c)systems
n=length(b);
for k=1:n-1
   d=a(k)/b(k);
   b(k+1)=b(k+1)-d*c(k);
   f(k+1)=f(k+1)-d*f(k);
end
f(n)=f(n)/b(n);
for k=n-1:-1:1
   f(k)=(f(k)-c(k)*f(k+1))/b(k);
end
```

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

对称正定矩阵的Cholesky分解

$A^T = A$，A的各阶顺序主子式大于零.

A的LU分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$u_{ii} > 0\ (i = 1, \cdots, n)$，有如下关系

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & r_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$A = LU \rightarrow A=LDR \rightarrow A^T = R^T D L^T$

$A^T=A \rightarrow R^T D L^T = LDR \rightarrow R^T = L \rightarrow R = L^T$

(1) 对称矩阵的 LDL^T 分解：$A = LDL^T$

(2) 对称矩阵的LL^T分解

由 $u_{kk} > 0$，记 $D^{\frac{1}{2}} = diag(\sqrt{u_{11}}, \cdots, \sqrt{u_{nn}})$ 得

$A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ 其中 $\tilde{L} = LD^{\frac{1}{2}}$

在不引起符号混乱时仍记为: $A = LL^T$

例 设 $A\in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, $x, y\in R^n$.定义

$$(x, y)_A = x^T A y$$

证明: $\|x\|_A=\sqrt{x^T Ax}$ 是R^n上的向量范数.

证: 由于A对称正定, 故存在非奇异上三角矩阵R（类似非奇异下三角矩阵L的形式）, 使

$$A = R^T R$$

所以，$x^T Ax = x^T (R^T R)\, x = (Rx)^T (Rx)$

$$\|x\|_A=\sqrt{x^T Ax}=\sqrt{(Rx)^T (Rx)}=\|Rx\|_2^2$$

故, $\|x\|_A$ 是R^n上的向量范数

MATLAB中矩阵分解命令

(1)特征值分解命令： [*P* *D*]=eig(*A*)

特征值矩阵 $D = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$

特征向量矩阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$

(2) *LU*分解命令： [*L* *U* *P*]=lu(*A*)

*L*下三角阵, *U*上三角阵, *P*初等矩阵 $PA = LU$

(3)Cholesky分解命令： *R*=chol(*A*)

*R*是上三角矩阵 $R^T R = A$

(4)QR分解 [Q R]=qr(A)

Q正交矩阵,R上三角矩阵 QR=A

(5)A的奇异值分解: [U,S,V] = SVD(A)

概念:设 $A \in C^{n\times m}$, $A^H A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

令 $\lambda_i = \sigma_i^2$, 称实数 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为 A 的奇异值