

# 《数值分析》 11

- 高斯-赛德尔迭代收敛性
- 超松弛迭代算法
- 分块矩阵的块迭代
- 温度场问题计算实验

矩阵分裂:  $A = D - U - L$

Jacobi 迭代法迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(U+L)$$

特征方程:  $|\lambda D - (U+L)| = 0$

Gauss-Seidel迭代法矩阵:  $B_{G-S} = (D - L)^{-1}U$

特征多项式:

$$|\lambda I - (D - L)^{-1}U| = |(D - L)^{-1}| |\lambda(D - L) - U|$$

特征方程:  $|\lambda(D - L) - U| = 0$

**引理1:** 如果A是严格主对角占优矩阵, 则  $\det(A) \neq 0$ .

证: **用反证法。**

设  $\det(A) = 0$ , 则齐次方程组  $Ax=0$  有非零解  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ .

设  $\|u\|_\infty = |u_k|$ , 考虑  $Au=0$  的第  $k$  个等式  $\rightarrow$

$$a_{k1}u_1 + \dots + a_{kk}u_k + \dots + a_{kn}u_n = 0$$

$$|a_{kk}| \cdot |u_k| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}u_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}u_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \cdot |u_k|$$

两边约去  $|u_k|$ , 得  $|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$

这与主对角占优矛盾, 故  $\det(A) \neq 0$ .

**定理2:** 若 $A$  是严格主对角占优矩阵, 则求解方程组  $AX=b$  的高斯-赛德尔迭代法收敛。

**证:** 高斯-赛德尔迭代矩阵为  $(D-L)^{-1}U$ , 该矩阵的特征方程为

$$|\lambda(D-L) - U| = 0$$

行列式对应的矩阵为

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

当 $|\lambda| >= 1$ 时, 利用 $A$ 矩阵的主对角占优性质, 得

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \times |a_{ii}| > |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\lambda| \times |a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

故 $C(\lambda)$ 也是严格主对角占优矩阵。由于严格主对角占优矩阵的行列式不为零，故 $\lambda$ 不是特征方程

$$C(\lambda) = |\lambda(D-L) - U| = 0$$

的根（矛盾！）。

所以当 $A$ 是严格主对角占优矩阵时， $(D-L)^{-1}U$ 的特征值必然满足：

$$|\lambda| < 1,$$

从而高斯-赛德尔迭代矩阵谱半径小于1，迭代法收敛。

**定理3:** 方程组  $Ax=b$  中, 若  $A$  是实对称正定矩阵, 则 Gauss-Seidel 迭代法收敛

证明: 由  $A = D - L - L^T \Rightarrow B_{G-S} = (D - L)^{-1}L^T$

设  $\lambda$  为  $B_{G-S}$  的任一特征值,  $x$  为其特征向量, 则

$$(D - L)^{-1}L^T x = \lambda x \Rightarrow L^T x = \lambda(D - L)x$$

$$\Rightarrow x^T L^T x = \lambda x^T (D - L)x$$

$A$  正定, 故  $p = x^T D x > 0$ , 记  $x^T L^T x = a$ , 则有

$$x^T A x = x^T (D - L - L^T) x = p - a - a = p - 2a > 0$$

$$(p - a)^2 = p^2 - 2ap + a^2 = p(p - 2a) + a^2$$

$$\lambda = \frac{x^T L^T x}{x^T (D - L)x} = \frac{a}{p - a}$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{p^2 - 2pa + a^2} = \frac{a^2}{p(p - 2a) + a^2} < 1$$

所以, 迭代矩阵  $B_{G-S}$  的谱半径  $\rho(B_{G-S}) < 1$ ,

$\Rightarrow$  方程组  $Ax=b$  的系数矩阵 **A 是实对称正定矩阵**时,  
Gauss-Seidel迭代法收敛.

称  $R = -\ln \rho(B)$  为迭代法的渐近收敛速度.

(谱半径越小越快)

思考:  $\|B\|$  越小越快

# 超松驰(SOR)迭代法

为什么：  
对GS进一步加速！

## Gauss-Seidel迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

$$X^{(k+1)} = (1-\omega)X^{(k)} + \omega D^{-1} (LX^{(k+1)} + UX^{(k)} + b)$$

$$B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1} [(1-\omega)D + \omega U]$$

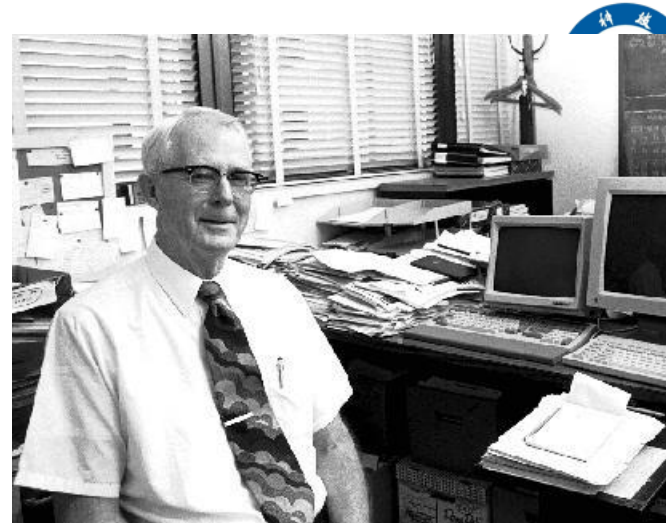
如果： $\omega = 1$  ?  $\Rightarrow$  GS



successive overrelaxation

Prof. David M. Young

1954 美国数学科学学报



Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic

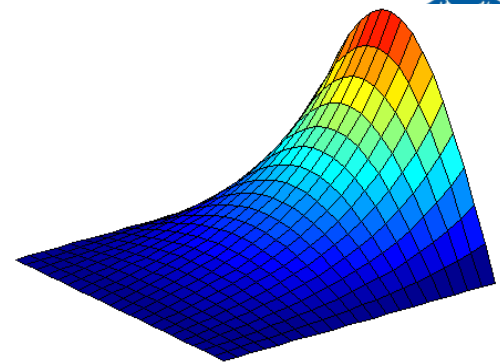
**定理4:** 若  $A$  是对称正定矩阵, 则当  $0 < \omega < 2$  时  
SOR 迭代法解方程组  $Ax = b$  是收敛的

最佳松弛因子选取 
$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$$

$\rho(B_J)$  为 Jacobi 迭代谱半径 (记住)

平面温度  
场问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < 1 \\ u(0, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \\ u(1, y) = \sin \pi y \end{cases}$$



令  $h = 1/(n+1)$ ,  $x_j = jh$ ,  $y_j = jh$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ )

记  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ , ( $i, j = 0, 1, \dots, n+1$ )

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0$$
$$(i, j = 1, \dots, n)$$

线性方程组

$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0$$
$$u_{i,0} = 0, \quad u_{i,n+1} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$
$$u_{0,j} = 0, \quad u_{n+1,j} = \sin \pi y_j$$

## Jacobi迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

## Seidel迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

## SOR迭代格式

$$u_{i,j}^{(k+1)} = (1 - \omega) u_{ij}^{(k)} + \frac{\omega}{4} (u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)})$$

平面温度场问题  $\rightarrow AU=F \quad \rightarrow \begin{bmatrix} B_J \\ B_{GS} \\ B_{SOR} \end{bmatrix}$

$$\rho(B_J) = \cos(h\pi)$$

$$\rho(B_{G-S}) = [\cos(h\pi)]^2$$

$$\rho(B_{SOR}) = \frac{1 - \sin(h\pi)}{1 + \sin(h\pi)}$$

$n$	$\rho(B_J)$	$\rho(B_{G-S})$	$\rho(B_{SOR})$	$\omega_{op}$
4	0.8090	0.6545	0.2596	1.2596
8	0.9397	0.8830	0.4903	1.4903
16	0.9830	0.9662	0.6895	1.6895
32	0.9955	0.9910	0.8264	1.8264
64	0.9988	0.9977	0.9078	1.9078

# Gauss-Seidel迭代实验 (误差限 $10^{-8}$ ):

结点数 $n^2$	$10^2$	$20^2$	$40^2$
迭代次数	182	606	2077
CPU时间(s)	0.97	4.328	58.531
误差	0.0023	$6.4274e-4$	$1.6814e-4$

# SOR迭代实验 (误差限 $10^{-8}$ ):

结点数 $n^2$	$10^2$	$20^2$	$40^2$
迭代次数	40	74	137
CPU时间(s)	0.11	0.6560	4.9530
误差	0.0023	$6.4306e-4$	$1.6944e-4$

# 块迭代法简介

设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $x \in R^n$ ,  $b \in R^n$

将方程组  $Ax = b$  中系数矩阵  $A$  按行列分块

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}$$

其中,  $A_{ii} \in R^{n_i \times n_i}$ ,  $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ ,  $x_i \in R^{n_i}$ ,  $b_i \in R^{n_i}$

将A分解,  $A = D_B - L_B - U_B$

## (1) Jacobi块迭代

$$D_B X^{(k+1)} = (L_B + U_B) X^{(k)} + b$$

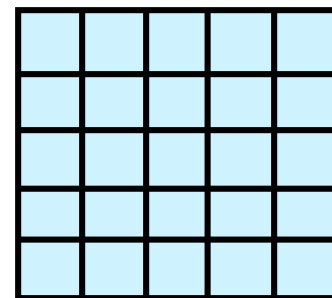
$$A_{ii} X_i^{(k+1)} = B_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} X_j^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

## (2) Gauss-Seidel块迭代

$$D_B X^{(k+1)} = L_B X^{(k+1)} + U_B X^{(k)} + b$$

$$A_{ii} X_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^r A_{ij} X_j^{(k)} \\ (i=1, 2, \dots, r)$$

边值问题: 
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < 1 \\ u(0, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \\ u(1, y) = \sin \pi y \end{cases}$$



$$u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$AU = F \quad A = \begin{bmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ & I & B & I \\ & & I & B \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \end{bmatrix}, \dots, U_4 = \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \\ u_{44} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} B_1 & I & & \\ I & B_2 & I & \\ & I & B_3 & I \\ & & I & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ I & B_2 & & \\ & I & B_3 & \\ & & I & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & I & & \\ & & I & \\ & & & I \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_1 U_1^{(k+1)} = -U_2^{(k)} + F_1$$

$$\Rightarrow B_2 U_2^{(k+1)} = -U_1^{(k+1)} - U_3^{(k)} + F_2$$

$$\Rightarrow B_3 U_3^{(k+1)} = -U_2^{(k+1)} - U_4^{(k)} + F_3$$

$$\Rightarrow B_4 U_4^{(k+1)} = -U_3^{(k+1)} + F_4$$

# 五点差分格式 Gauss-Seidel 迭代实验 (误差限: $1e-008$ )

$n^2$	$10^2$	$20^2$	$40^2$
迭代次数	107	339	1135
CPU时间(s)	0.3750	4.3750	58.0470
误差	0.0023	$6.42e-4$	$1.68e-4$

## 五点差分格式 Gauss-Seidel 迭代实验 (误差限: $1e-008$ ) :

结点数 $n^2$	$10^2$	$20^2$	$40^2$
迭代次数	182	606	2077
CPU时间(s)	0.97	4.328	58.531
误差	0.0023	$6.42e-4$	$1.68e-4$

三种迭代格式:

雅克比、高斯赛德尔、超松弛(高斯赛德尔为基础)。

收敛性分析(五个角度去思考):

- 是否迭代矩阵B的范数小于1?
- 是否迭代矩阵B的极限为零矩阵?
- 是否系数矩阵A为严格对角占优?
- 是否迭代矩阵B的谱半径小于1?
- 是否系数矩阵A为实对称正定? (针对GS迭代)

## 参考资料

**[1] Applied Iterative Methods,.1981**

**[2]实用迭代法,蔡大用、施妙根译1984,清华**

**[3]Iterative Solution of Large Linear systems,  
David M. Young, 1971.**

**[4]David M. Young主页:**

**<http://www.cs.utexas.edu/users/young/>**