《数值分析》10

- 向量序列收敛性
- 迭代法收敛性条件
- 迭代误差估计定理

平面点列: $\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix}$ ······$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$ ······

$$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1^*)^2+(x_2^{(k)}-x_2^*)^2}=0$$

$X^{(k)} \in R^n$:　$X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}, \cdots\cdots$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^* \|_2 = 0$$

利用向量范数等价性, 对任意范数 $\|\cdot\|$

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^* \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \| X^{(k)} - X^* \| = 0$$

$$AX = b \rightarrow (M-N)X = b \rightarrow MX = NX + b$$

计算格式: $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f \quad (B = M^{-1}N)$

设方程组的精确解为 X^*,则有

$$X^* = BX^* + f \quad \rightarrow$$

$$X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)$$

记 $\varepsilon^{(k)} = X^{(k)} - X^* \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

则有 $\varepsilon^{(k+1)} = B\varepsilon^{(k)}$

$$\varepsilon^{(k)} = B\varepsilon^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

定理1：若$\|B\|<1$, 则迭代法 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 收敛

证：由$\varepsilon^{(k)} = B\,\varepsilon^{(k-1)}$,得

$$\|\varepsilon^{(k)}\| \le \|B\|\,\|\varepsilon^{(k-1)}\| \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$\Rightarrow \quad \|\varepsilon^{(k)}\| \le \|B\|^k\,\|\varepsilon^{(0)}\|$$

$$\|B\| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\|\varepsilon^{(k)}\| \le \lim_{k\to\infty}\|B\|^k\|\varepsilon^{(0)}\| = 0$$

所以 $$\lim_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)} = 0$$

定理2：迭代格式 $X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f$ 序列收敛的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

证明：(必要性) 设X* 为方程组(I - B)X = f 的精确解，即：$X^*=B X^*+f$

两式相减:$X^{(k+1)} - X^* =B (X^{(k)} - X^*)$; 设 $e^{(k+1)} =X^{(k+1)} - X^*$

则有：$e^{(k+1)} = B^{(k+1)} e^{(0)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0$

(充分性) 因为$(I - B)(I + B + B^2 + \cdots\cdots + B^k) = I - B^{k+1}$

则有：$(I - B)^{-1}(I - B^{k+1}) = (I + B + B^2 + \cdots\cdots + B^k)$

$X^{(k+1)}=B X^{(k)}+f = B(B X^{(k-1)}+f)+f = \cdots = B^{k+1} X^{(0)} + (I + B + \cdots + B^k)f$ 因为 $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$

$\Rightarrow \lim X^{(k)} = (I - B)^{-1} f$,即序列收敛至(I - B)X = f 的解

定义4.1： $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

则称A为严格对角占优阵.

定理3： 若$Ax=b$的系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵，则Jacobi迭代收敛.

证: 由于矩阵 A 严格对角占优

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1$$

而

$$B_J=D^{-1}(D-A)=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

故Jacobi迭代矩阵$B_J = D^{-1}(D-A)$ 第 i 行绝对值求和

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < 1 \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

所以 $\|B_J\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\{\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\} < 1$

故Jacobi迭代 $X^{(k+1)} = B_J X^{(k)} + f$ 收敛.

矩阵B 的谱

设n阶方阵B 的n个特征值为：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

则称集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$

为B 的谱. 记为 **ch B**

特征值取模最大

矩阵B的谱半径 $\rho(B) = \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda_k|$

注1: 当B是对称矩阵时, $\|B\|_2 = \rho(B)$

注2: 对 $R^{n\times n}$ 中的范数$\|\cdot\|$,有

$$\rho(B) \le \| B \|$$

定理4：迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径$\rho(B) < 1$

迭代矩阵谱半径的计算是十分困难的，因而用谱半径判别迭代的收敛性很不方便，可用一些其他实用的判别条件。但迭代矩阵谱半径常用于理论证明。

比如：

1) 因为对 $R^{n\times n}$ 中的范数$\|\cdot\|$,有$\rho(B) \le \| B \|$,可用定理1!

2) 或其它如定理2，定理3！

定理1：若$\|B\|<1$, 则迭代法 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 收敛

定理5: 设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若$\|B\|<1$,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

(1) $$\| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|}{1-\| B \|} \| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|$$

(2) $$\| X^{(k)} - X^* \| \le \frac{\| B \|^k}{1-\| B \|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$$

证 由$\|B\|<1$,有 $$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$$

$$X^{(k+1)} - X^* = B(X^{(k)} - X^*)$$

$$\| X^{(k+1)} - X^* \| \le \|B\| \, \| X^{(k)} - X^* \|$$

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| = \|(X^{*} - X^{(k)}) - (X^{*} - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^{*} - X^{(k)})\| - \|(X^{*} - X^{(k+1)})\|$$

$$\geq \|(X^{*} - X^{(k)})\| - \|B\|\,\|(X^{*} - X^{(k)})\|$$

$$= (1 - \|B\|)\,\|(X^{*} - X^{(k)})\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^{*}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^{*}\| \leq \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|$$

$$\Rightarrow \quad \|X^{(k)} - X^{*}\| \leq \frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

收敛性小结(5个定理)

定理1： 若$\|B\|<1$，则迭代法 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 收敛

定理2： 迭代格式 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 序列收敛的充分必要条件是：

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

定理3： 若$Ax=b$的系数矩阵 A 是严格对角占优矩阵，则Jacobi迭代收敛.

定理4： 迭代法 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 谱半径$\rho(B)<1$

定理5: 设X^*为方程组 $AX=b$ 的解

若$\|B\|<1$,则对迭代格式 $X^{(k+1)} = B X^{(k)} + f$ 有

(1) $\| X^{(k)} - X^* \| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|} \| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|$

(2) $\| X^{(k)} - X^* \| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|$

参考资料

[1]张凯院,Toeplitz矩阵快速算法

[2]Numerical Analysis of Differential Eq.

[3]余德浩，微分方程数值解法