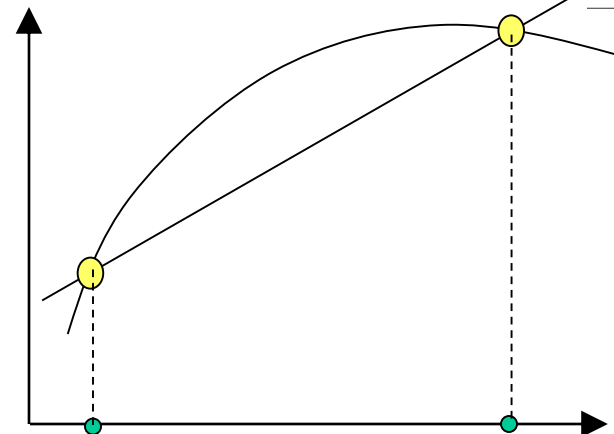


# 《数值分析》14

- 拉格朗日插值误差余项
- 均差与牛顿插值公式
- 均差表的构造计算
- 牛顿多项式求值算法

# 两点线性插值

$$L(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0$$



插值余项(误差):

$$R(x) = f(x) - L(x)$$

由插值条件,知

$$R(x) = C(x) (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\text{即 } f(x) - L(x) = C(x) (x - x_0)(x - x_1)$$

$$C(x) = ???$$

**定理5.2** 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  内具有  $n+1$  阶导数, 取插值结点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

则对任何  $x \in [a, b]$ , 满足  $L_n(x_k) = f(x_k)$  的  $n$  次插值多项式  $L_n(x)$  的误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中,  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

$\xi_n \in (a, b)$  且与  $x$  有关

证明: 记  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

由插值条件

$$L_n(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

知存在  $C(x)$  使得

$$f(x) - L_n(x) = C(x) \omega_{n+1}(x)$$

取定  $x \in (a, b)$ , 设  $t \in (a, b)$ . 为了求  $C(x)$ ,  
构造函数

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - C \omega_{n+1}(t)$$

显然,  $F(x) = 0$ ,  $F(x_j) = 0$ ,  $(j = 0, 1, \dots, n)$

$F(t)$  有  $(n+2)$  个相异零点. 根据Rolle定理,  $F'(t)$  在区间  $(a, b)$  内至少有  $(n+1)$  个相异零点.

依此类推,  $F^{(n+1)}(t)$  在区间  $(a, b)$  内至少有一个零点。故存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - C\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$$

$$f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = 0$$

$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

## 例 分析三次多项式插值误差

$$f(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-2	-4	4

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f^{(4)}(x) = 0 \rightarrow R_3(x) = 0$$

$$L_3(x) = f(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$

例 取被插值函数为正弦函数  $f(x) = \sin x$ ，取三点做二次插值。

$x$	0	$\pi / 2$	$\pi$
$\sin x$	0	1	0

$$L_2(x) = 4x(\pi - x) / \pi^2$$

$$|R_2| = |\cos \xi| \cdot |x(x - \pi / 2)(x - \pi)| / 6$$

思考题：在区间  $[0, \pi]$  内增加插值结点是否会导致Runge现象

例5.3 设  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  内具有2阶导数, 已知  $f(x)$  在区间端点处的值. 如果当  $x \in (a, b)$  时, 有  $|f''(x)| \leq M$ . 试证明

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{8} (b-a)^2$$

证明 由Lagrange插值误差定理

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x-a)(x-b)$$

$$\text{令 } h(x) = |(x-a)(x-b)|$$

$$\max_{a \leq x \leq b} h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} \quad |R_1(x)| \leq \frac{M}{8} (b-a)^2$$



**应用:** 考虑制做  $\sin x$  在  $[0, \pi]$  上等距结点的函数表, 要求用线性插值计算非表格点数据时, 能准确到小数后两位, 问函数表中自变量数据的步长  $h$  应取多少为好?

解: 设应取的步长为  $h$ , 则  $x_j = jh$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ).

当  $x \in (x_j, x_{j+1})$  时

$$\sin x \approx \frac{1}{h} [(x - x_j) \sin x_{j+1} + (x_{j+1} - x) \sin x_j]$$

$$|R(x)| \leq \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |f''(x)| \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{8} = \frac{h^2}{8}$$

只须 
$$\frac{h^2}{8} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad h \leq 0.2$$

# 牛顿插值问题

取 $x_0, x_1, x_2$ , 求二次函数

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

满足条件

$$P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2)$$

插值条件引出关于 $a_0, a_1, a_2$ 方程

$$\begin{cases} a_0 & = f(x_0) \\ a_0 + a_1(x_1 - x_0) & = f(x_1) \\ a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & = f(x_2) \end{cases}$$

# 解下三角方程组过程中引入符号

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f[x_0, x_1], \quad a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

牛顿插值公式:

$$P(x) = f(x_0) + f[x_1, x_2](x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

**定义5.3** 若已知函数  $f(x)$  在点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  处的值  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . 如果  $i \neq j$ , 则

一阶均差 
$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

二阶均差 
$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n-2)$$

$n$ 阶均差 
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

例 由函数表  
求各阶均差

$x$	-2	-1	0	1	3
$y$	-56	-16	-2	-2	4

解:按公式计算一阶均差、二阶均差、三阶均差

$x$	$f(x)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-2	-56			
-1	-16	40		
0	-2	14	-13	
1	-2	0	-7	2
3	4	3	1	2

# MATLAB程序计算

```
x=[-2 -1 0 1 3]';  
y=[-56 -16 -2 -2 4]';  
data=[x,y];dy=y;  
n=length(x);  
for k=1:n-1  
    dx=x(k+1:n)-x(1:n-k)  
    dy=diff(dy)./dx;  
    f=zeros(n,1);f(k+1:n)=dy;  
    data=[data,f];  
end  
data
```

-2	-56				
-1	-16	40			
0	-2	14	-13		
1	-2	0	-7	2	
3	4	3	1	2	0

$$N_3(x) = -56 + 40(x + 2) - 13(x + 2)(x + 1) + 2(x + 2)(x + 1)x$$

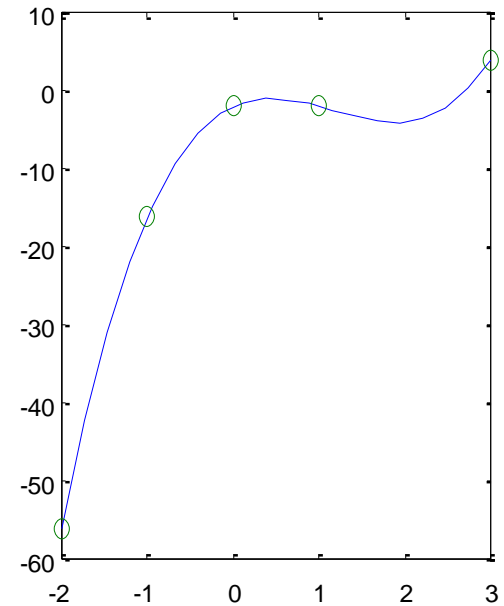
$$a_0 = -56 + 80 - 26 = -2$$

$$a_1 = 40 - 39 + 4 = 5$$

$$a_2 = -13 + 6 = -7$$

$$a_3 = 2$$

$$P_3(x) = -2 + 5x - 7x^2 + 2x^3$$



函数值的计算:

$$N_3(x) = -56 + (x + 2) [40 + (x + 1) [-13 + 2x]]$$



**牛顿多项式算法:** 记插值节点为  $x_0, x_1, \cdots, x_n$ ,  $f(x)$  的各阶差商为  $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$

(1)  $s \leftarrow f_n$

(2) 计算  $s \leftarrow f_k + s * (x - x_k) \quad (k = n-1, n-2, \cdots, 0)$

(3)  $N(x) = s$

根据代数插值存在唯一性定理,  $n$  次牛顿插值公式恒等于  $n$  次拉格朗日插值公式, 误差余项也相等, 即

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$



## 小 结

前面已经学过两种插值方法：

Langrange插值法、Newton插值法。

共同点： 1) 插值条件相同，即

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$y_i = f(x_i)$	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_n$

2) 求一个次数不超过n的代数多项式

不同点：构造方法（思想）不同

Langrange插值法采用基函数的思想

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

Newton插值法采用承袭性的思想

均差表

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

注：两种方法的结果相同（唯一性）！