《数值分析》7

- Hilbert矩阵的病态性
- 向量范数与矩阵范数
- 矩阵的条件数概念
- Hilbert矩阵的条件数

Hilbert

引例. Hilbert矩阵的病态性

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.41 \\ 2 \end{bmatrix}$$

方程组 $Ax=b$ 的解为 x

方程组 $Ax=b_1$ 的解为 x_1

$$b_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.42 \\ 2 \end{bmatrix}$$

数据计算结果

$$x-x_1=[\ -2.4 \quad 27.0 \quad -64.8 \quad 42.0\ ]^T$$

定义3.1：设 R^n是n维向量空间,如果对任意$x\in R^n$,都有一个实数与之对应,且满足如下三个条件:

(1)正定性: $\|x\|\geq 0$,且$\|x\|=0 \iff x=0$;

(2)齐次性: $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$　　λ为任意实数

(3)三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$　　$(y\in R^n)$

则称$\|x\|$为向量x的范数.　　为什么定义向量范数

注:向量范数是向量长度概念的推广.例如

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

是向量 x 的范数　　向量2范数

常用的范数：

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}$$

广义：
p范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|=\max(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)$$

例1. 证明 $\|x\|_2$ 是 R^n 上的一种范数

先证明柯西不等式：$|x^Ty|\le\|x\|_2\cdot\|y\|_2$

对任意实数λ，有$(x-\lambda y)^T(x-\lambda y)\ge 0$ →

$$x^Tx-2\lambda x^Ty+\lambda^2y^Ty\ge 0$$

判别式

$$|x^Ty|^2-(x^Tx)(y^Ty)\le 0 \quad\rightarrow\quad |x^Ty|\le\|x\|_2\cdot\|y\|_2$$

根据上式的最小值依然大于0，
求导得到最小值，推导出来

$$\|x+y\|_2^2=(x+y)^T(x+y)$$
$$=x^Tx+x^Ty+y^Tx+y^Ty$$
$$\le\|x\|_2^2+2|x^Ty|+\|y\|_2^2$$
$$\le\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2+\|y\|_2^2$$

$$\|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$$ (三角不等式成立)

$$\|x\|_2=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2}\ge 0$$ (正定性成立)

$$\|\lambda x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2}=|\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|\lambda|\cdot\|x\|_2$$

(齐次性成立)

向量范数的性质

定义： 如果R^n中有两个范数 $\|x\|_s$ 与 $\|x\|_t$，存在常数m，M>0，使对任意n维向量x，有

$$m\|x\|_s \le \|x\|_t \le M\|x\|_s$$

则称这两个范数等价.

性质： 对两种等价范数而言，某向量序列在其中一种范数意义下收敛时，则在另一种范数意义下也收敛。

注： 今后研究向量序列的收敛性时，可在任何一种范数意义下研究。

正交变换下向量2–范数不变性

$A^TA = I$ (正交变换性质), $y = Ax$ ➔ $\| y \|_2 = \| x \|_2$

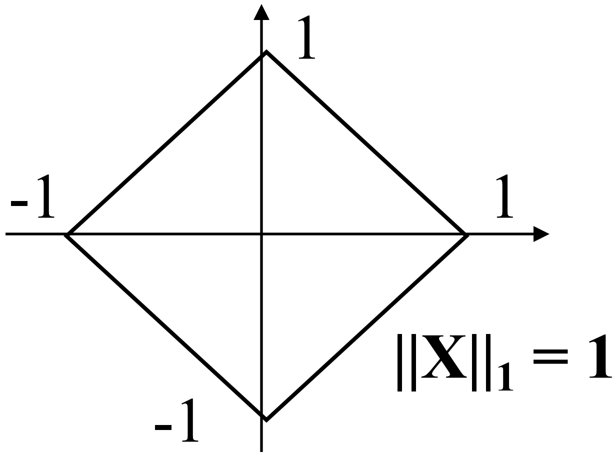
$$y^T y = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T A x = x^T x$$

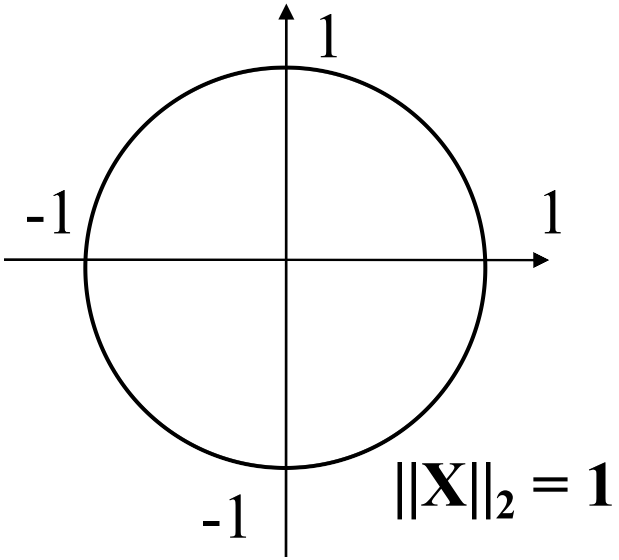
➔ $$\| y \|_2 = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T x} = \| x \|_2$$

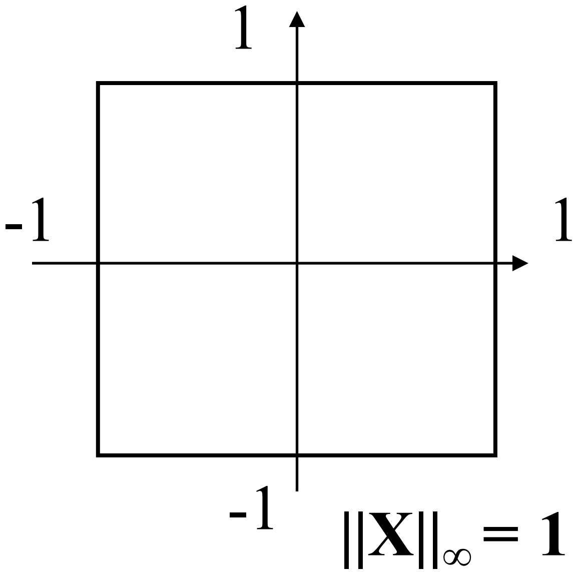
举例:

$$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

例1. 范数意义下的单位向量: $X=[x_1, x_2]^T$







$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

如要使用注明版权：数值分析课程组

例2. 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,证明

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

证明: $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$\max_{1\le k\le n} |x_k| \le \|x\|_1 \le n \times \max_{1\le k\le n} |x_k|$$

所以 $$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

三角不等式的变形: $$\|x-y\| \ge \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \qquad \|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$$

$$-\|x-y\| \le \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

如要使用注明版权：数值分析课程组

定义3.2 对 $A \in R^{n\times n}$,存在实数||A||满足:

(1)正定性: $\|A\|\geq 0$,且 $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$;

(2)齐次性: $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$ λ为任意实数

(3)三角不等式: $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$ $(B \in R^{n\times n})$

(4)相容性: $\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$ $(\forall A, B \in R^{n\times n})$

则称 $\|A\|$ 是矩阵 A 的一个范数.

Frobenius范数 $\|A\|_F = (\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\;2})^{1/2}$

矩阵算子范数的概念

设 $\|x\|$是R^n上的向量范数,$A\in R^{n\times n}$,则A的非负函数

$$\|A\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

称为矩阵A的<u>算子范数</u>

注1:矩阵算子范数由向量范数诱导出, 如

$$\|A\|_2=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad \text{或} \quad \|A\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

注2: A^{-1}的算子范数可表示为 $\left(\min_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1}$

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}=\max_{y\neq 0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|}=\frac{1}{\min_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$$

如要使用注明版权：数值分析课程组

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ “1-范数”(列和范数)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ 无穷大范数(行和范数)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

证:由算子范数概念 $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$

$$\|Ax\|_2^2 = x^T A^T A x$$

由于A^TA是对称矩阵,故存在正交特征向量系

$v_1,\cdots\cdots,v_n$设对应的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

如要使用注明版权：数值分析课程组

单位向量 x 可被特征向量系所表示 $x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$

$$x^T x = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k v_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1$$

$$\| Ax \|_2^2 = x^T A^T A x = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k v_k^T\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \lambda_k \le \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \lambda_{\max}(A^T A) = \lambda_{\max}(A^T A)$$

$$\rightarrow \quad ||Ax||_2 \le \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

根据定义，取对应特征向量 $\rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

如要使用注明版权：数值分析课程组

矩阵的条件数概念

方程组 $Ax=b$, 右端项 b 有一扰动 δb

引起方程组解 x 的扰动 δx

设 x 是方程组 $Ax=b$ 的解,则有

$$A(x+\delta x)=b+\delta b$$

化简,得 $A\delta x=\delta b$ $\qquad \delta x=A^{-1}\delta b$

$$\|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

由 $Ax=b$ 得 $\|b\|\le\|A\|\|x\|$ $\qquad \dfrac{1}{\|x\|}\le\dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

所以 $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le(\|A\|\cdot\|A^{-1}\|)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

如要使用注明版权：数值分析课程组

定义: 条件数

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

或 $$C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

当条件数很大时,方程组 $Ax = b$ 是病态问题;

当条件数较小时,方程组 $Ax = b$ 是良态问题

如要使用注明版权：数值分析课程组

著名病态矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

阶数	2	4	6
条件数1	27	19.4×10^{5}	9.8×10^{8}
条件数2	19.2815	1.5×10^{4}	1.4×10^{7}
条件数∞	27	19.4×10^{5}	9.8×10^{8}