《数值分析》1

- 科学计算的背景
- 关于计算误差讨论
- 浮点数与有效数字
- 算术运算的误差估计

如要使用注明版权：数值分析课程组

➢数值分析——研究用计算机求解数学问题的数值计算方法及其理论

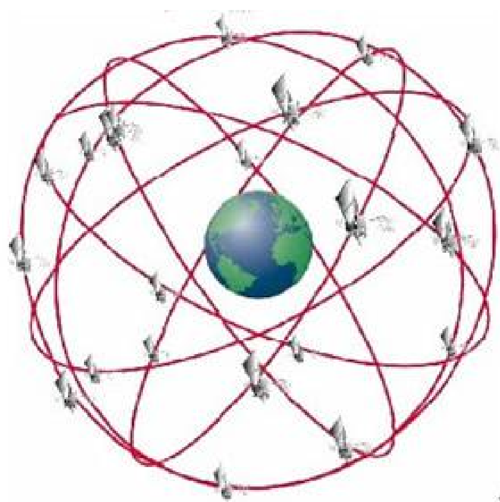
1. 方程组求解
2. 方程求根
3. 数据插值
4. 数据拟合
5. 数值积分
6. 微分方程求解

1. 不能进行实验的问题(如：宇宙模拟)
2. 实验代价太大的问题(如：核爆)
3. 大规模问题

近似解!(Not 精确解)

1. 误差多大？
2. 收敛？
3. 收敛速度？
4. 解是否稳定？

- ➢1958年, 前苏联载人飞船
- ➢1969年, 美国Apollo 登月
- ➢1994年, 美国GPS运行



➢求未知数据的迭代计算技术步骤：

1) 初始猜测数据;
2) 迭代计算格式;
3) 迭代序列的收敛性分析;
4) 计算复杂性分析，……

评价算法的主要指标:

速度和精度

如要使用注明版权：数值分析课程组

➢通信卫星覆盖地球面积

将地球考虑成一个球体, 设R为地球半径,h为卫星高度,D为覆盖面在切痕平面上的投影(积分区域)

$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

参考P.190

实际问题

↓

数学模型

↓

获取数据

↓

数值方法、程序

↓

数据结果

➢误差分类一(种类)：

模型误差：建立数学模型时所引起的误差；（模型合理？）

观测误差：测量工具的限制或在数据的获取时随机因素所引起的物理量的误差；（获取数据准确？）

截断误差：求解数学模型时，用简单代替复杂, 或者用有限过程代替无限过程所引起的误差

（例：非线性问题的线性化）

舍入误差：计算机表示的数的位数有限，通常用四舍五入的办法取近似值，由此引起的误差.

（四舍五入误差，不可避免）

如要使用注明版权：数值分析课程组

➢误差分类二(数学定义)：

绝对误差： 假设某一数据的准确值为 x^*, 其近似值为 x，则称

$$\mathbf{e}(x) = x - x^*$$

为x的绝对误差

相对误差： 而称

$$\mathbf{e}_r(x) = \frac{\mathbf{e}(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*}, \quad (x^* \neq 0)$$

为 x 的相对误差

如要使用注明版权：数值分析课程组

➢误差限：

绝对误差限： 如果存在一个适当小的正数 ε ，使得

$$|e(x)| = |\ x^* - x\ | \le \varepsilon$$

则称 ε 为绝对误差限。

数

相对误差： 如果存在一个适当小的正数 ε_r ，使得

$$|e_r(x)| = \left|\frac{e(x)}{x^*}\right| = \left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| \le \varepsilon_r$$

称 ε_r为相对误差限。

如要使用注明版权：数值分析课程组

➢十进制浮点数表示

✓一台微机价格:￥3999.00,
　浮点数表示:0.3999×10^4

✓地球半径: 6378137m, (6.378137e+006)
　浮点数表示: 0.6378137×10^7

✓光速: 2.99792458e+008
　浮点数表示: 0.299792458×10^9

$$x = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

尾数部　　　阶码部

有效数字概念：

π 的有限位数如下（$\pi \approx 3.1415926$）

取 $x_1 = 3$，　$\pi - x_1$ 绝对误差限不超过0.5;

取 $x_2 = 3.14$, 绝对误差限不超过0.005 ；

取 $x_3 = 3.1416$, 绝对误差限不超过0.00005 ；

若近似值 x 的绝对误差限是某一位上的半个单位，该位到 x 的第一位非零数字一共有 n 位，则称近似值 x 有 n 位有效数字.

一个有n 位有效数字的数

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$$

绝对误差限满足：

$$e(x) = \left| x - x^* \right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

相对误差限满足：

$$\left| e_r(x) \right| \le \frac{5}{a_1} \times 10^{-n}$$

例1 已知$\sqrt{30}$的十进制浮点数第一位是5，要使近似值的相对误差限小于0.1%，问浮点数的有效数字的位数至少应该为多少？

解: a_1=5,利用不等式

$$|e_r(x)| \le \frac{5}{a_1} \times 10^{-n} = 10^{-n}$$

取$n \ge 3$,有

$$|e_r(x)| \le 10^{-3}$$

所以,浮点数的有效数字位数至少应取3位。

1.一元函数 $y=f(x)$误差分析(准确值 $y^*=f(x^*)$)

由Taylor 公式

$$f(x^*)-f(x)=(x^*-x)f'(x)+\frac{(x^*-x)^2}{2}f''(\xi)$$

$$|e(y)|=|y^*-y|\approx|x^*-x||f'(x)|\le|f'(x)|\varepsilon(x)$$

所以 $\varepsilon(y)\approx|f'(x)|\varepsilon(x)$

同理: $\varepsilon_r(y)\approx\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\varepsilon_r(x)$

反问题:估计 $\varepsilon_r(x)$

如要使用注明版权：数值分析课程组

2.多元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$误差分析

$$\varepsilon(z)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\varepsilon(x_k)$$

数据误差对算术运算影响

(1) $$\varepsilon(x_1+x_2)=\varepsilon(x_1)+\varepsilon(x_2)$$

(2) $$\varepsilon(x_1\cdot x_2)\approx|x_1|\varepsilon(x_2)+|x_2|\varepsilon(x_1)$$

(3) $$\varepsilon(x_1/x_2)\approx\frac{|x_1|\varepsilon(x_2)+|x_2|\varepsilon(x_1)}{x_2{}^2}$$

例2. 二次方程 $x^2-16x+1=0$, 取$\sqrt{63}\approx 7.937$

用不同算法计算 $x_1=8-\sqrt{63}$ ，有效数字如何变化？

解：直接计算 $x_1\approx 8-7.937=0.063$

$$\varepsilon(x_1)=\varepsilon(8)+\varepsilon(7.937)=0.0005$$

计算出的x_1 具有两位有效数

修改算法 $x_1=\dfrac{1}{8+\sqrt{63}}\approx\dfrac{1}{15.937}$

$$\varepsilon(x_1)=\frac{\varepsilon(15.937)}{(15.937)^2}=\frac{0.0005}{(15.937)^2}\le 0.000005$$

n=4, 4位有效数字

如要使用注明版权：数值分析课程组

参考文献

[1]李庆扬 关治 白峰杉, 数值计算原理(清华)
[2]蔡大用 白峰杉, 现代科学计算
[3]蔡大用, 数值分析与实验学习指导
[4]孙志忠,计算方法典型例题分析
[5]车刚明等, 数值分析典型题解析(西北工大)
[6]David Kincaid,数值分析(第三版)
[7] John H. Mathews,数值方法(MATLAB版)

 如要使用注明版权：数值分析课程组

练习与思考

一、通过网络查找相关资料：

1.关于圆周率的计算方法;

2. IEEE754浮点数标准(如：二进制浮点数表示).

二、回顾微积分内容

1. 球冠面积和体积计算公式及变形;

2. 一元函数及多元函数台劳展式.

三、了解重要数据

1.地球半径、地月距离、太阳半径、……

2.微处理器尺度、普朗克常数、……