

# 《数值分析》12

- → 初等变分原理
- → 最速下降法

#### 初等变分原理



I 方程组问题: Ax = b

II 极值问题: 
$$\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

设
$$x,y \in \mathbb{R}^n$$
,记 $(x,y) = x^T y$ 

- (x, y) = (y, x);
- (tx, y) = t(x, y);
- (x+y,z)=(x,z)+(y,z);
- $\bullet$ (x, x) ≥ 0,  $\bot$ (x, x) = 0  $\Leftrightarrow$  x = 0;

### 设A是n 阶对称正定阵

- -(Ax, y) = (x, Ay); (对称)
- $\blacksquare (Ax, x) \ge 0$ ,  $\underline{\mathbb{H}}(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (正定)

定理4.10 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为实对称正定矩阵,  $x,b \in R^2$ 

则 x 使二次函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

取极小值  $\Leftrightarrow x$  是线性方程组 Ax = b 的解。

证明: (<=) 设  $u \in Ax = b$ 的解

对任意  $x \in \mathbb{R}^n$ , 只须证明  $f(x) - f(u) \ge 0$ 

$$f(x) - f(u) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + \frac{1}{2}(Au, u)$$
$$= \frac{1}{2}(A(x - u), (x - u)) \ge 0$$



(=>) 设 u 使 f(x) 取极小值. 取非零向量  $x \in \mathbb{R}^n$ , 对任意  $t \in \mathbb{R}$ ,有

$$f(u+tx) = \frac{1}{2}(A(u+tx), u+tx) - (b, u+tx)$$
$$= f(u) + t(Au-b, x) + \frac{t^2}{2}(Ax, x)$$

令 g(t) = f(u + tx), 当 t=0 时, g(0)=f(u)达到极小值, 所以 g'(0) = 0,即

$$(Au-b,x)=0 \rightarrow Au-b=0$$

所以, u 是方程组 Ax = b 的解.

#### 最速下降法 (解对称正定方程组Ax = b)



从初值点  $x^{(0)}$  出发,以负梯度方向 r 为搜索方向 选择步长  $t_0$ , 使  $x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 r$  为 f(x) 极小值点

在x处,梯度方向是f(x)增长最快方向 负梯度方向是f(x)下降最快方向

梯度:  $\nabla f = \text{grad}f(x) = [f_{x1}, f_{x2}, \dots, f_{xn}]^T$ 

$$\nabla f = Ax - b$$



方向
$$l: l = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, g(t) = f(x+tl)$$
  
其中, $||l|| = 1, x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 

方向导数: 
$$g'(0) = f_{x1}v_1 + f_{x2}v_2 + \cdots + f_{xn}v_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot l = ||\nabla f|| \cos < \nabla f, l >$$

 $l = \nabla f$  方向一致时,方向导数取得最大值

 $\nabla f$  是 f(x) 增长最快方向

 $l \supset \nabla f$  方向相反时,方向导数取得最小值

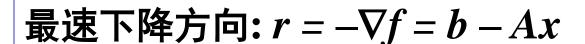
 $-\nabla f$  是 f(x) 下降最快方向

值分析

$$g'(0) = f_{x1}v_1 + f_{x2}v_2 + \cdots + f_{xn}v_n$$

$$g(t) = f(x+tl) = f(x) + t(Ax-b,l) + \frac{t^2}{2}(Al,l)$$
$$g'(0) = (Ax-b,l)$$

$$\nabla f = Ax - b$$





## 取初值点 $x^{(0)}$ , 取负梯度方向 $r_0 = b - A x^{(0)}$

求点: 
$$x^{(1)} = x^{(0)} + t_0 r_0$$
 使得 
$$f(x^{(0)} + t_0 r_0) = \min_{t \in R} f(x^{(0)} + t r_0)$$

记 
$$g(t) = f(x^{(0)}) + t(Ax^{(0)} - b, r_0) + t^2(Ar_0, r_0)/2$$

为选取最佳步长  $t_0$ , 令

$$g'(t) = (Ax^{(0)} - b, r_0) + t(Ar_0, r_0) = 0$$

求解, 得 
$$t_0 = (r_0, r_0) / (Ar_0, r_0)$$



## 解对称正定方程组Ax = b 的最速下降算法:

第一步: 取初值  $x^{(0)} \in R^{(n)}$ ,  $\varepsilon > 0$ , 计算

$$r_0 = b - Ax^{(0)}$$
 , k  $\leftarrow 0$ ;

第二步: 计算  $t_k = (r_k, r_k) / (Ar_k, r_k)$ 

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k r_k; r_{k+1} = b - Ax^{(k+1)};$$

第三步:  $k \leftarrow k+1$ , 如果  $||r_k|| \ge \varepsilon$ ,转第二步;

否则,输出: $x^{(k)}$ ,结束.