《数值分析》4

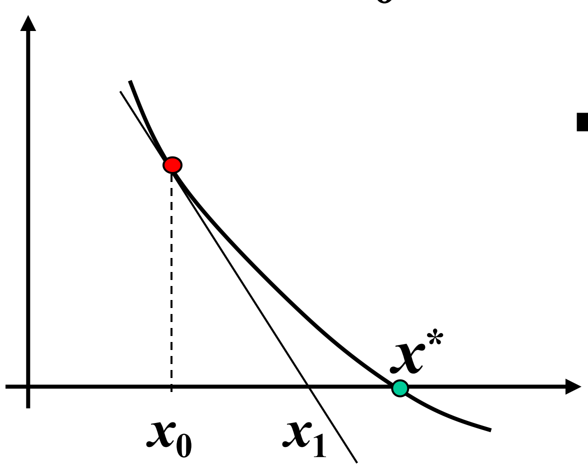
- Newton迭代格式
- Newton迭代法的收敛性
- Newton迭代法收敛速度
- 弦截法迭代格式

设 x^*是方程 $f(x)=0$ 的根, x_0是x^*的近似值.
在 x_0 附近,对函数做局部线性化 (Taylor展开)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$f(x) = 0$ ➔

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$



➔ $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x_1比x_0更接近于x^*

牛顿迭代格式 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

给定初值 x_0，迭代产生数列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$$

应用——求正数平方根算法

设 $C > 0$, $x = \sqrt{C}$ $\Rightarrow$ $x^2 - C = 0$

令 $f(x) = x^2 - C$，则 $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - C}{2x_n} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + \frac{C}{x_n}]$$

引例. 平方根算法求 $\sqrt{2}$

初值: $x_0=1.5$

迭代格式: $x_{n+1}=0.5(x_n+2/x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$

表1 平方根算法实验

x_n	Error
1.416666666666667	2.45e-003
1.414215686274510	2.12e-006
1.414213562374690	1.59e-012
1.414213562373095	2.22e-016
1.414213562373095	2.22e-016

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}[x_n+\frac{2}{x_n}]-\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{2x_n}[x_n^2-2x_n\sqrt{2}+2]=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})^2$$

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{(x_n-\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\sqrt{2}|}{|x_n-\sqrt{2}|^{\boxed{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

由此可知，平方根算法具有 2 阶收敛速度

牛顿迭代法是否都收敛？　条件？

Newton迭代法的局部收敛性

定理2.7： 设 $f(x)$ 在点x^*的某邻域内具有二阶连续导数, 且设 $f(x^*)=0$, $f'(x^*)\neq 0$, 则对充分靠近点x^*的初值x_0, Newton迭代法至少平方收敛.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x^*)=f(x^*)f''(x^*)/[f'(x^*)]^2=0$$

$$\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

所以, Newton迭代法至少平方收敛(第3讲定理2.6)

例2.求 $x^3+10x-20=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根

解:取 $f(x)=x^3+10x-20$

则有 $f'(x)=3x^2+10$

牛顿迭代格式 $$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+10x_n^2-20}{3x_n^2+10}$$

表2 牛顿迭代法实验

n	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$
0	1.5	
1	1.59701492537313	9.7015e-002
2	1.59456374876881	2.4512e-003
3	1.59456211663188	1.6321e-006
4	1.59456211663115	7.2298e-013

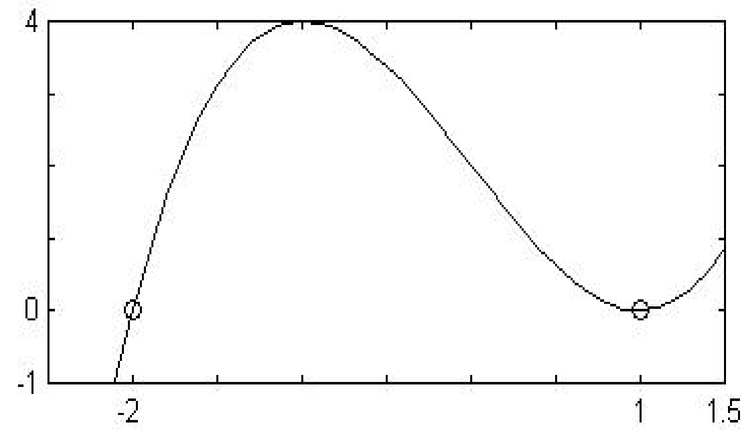
和不动点比，速度如何？（第3讲例2.3）

缺陷

1.被零除错误

$f(x)=x^3-3x+2=0$

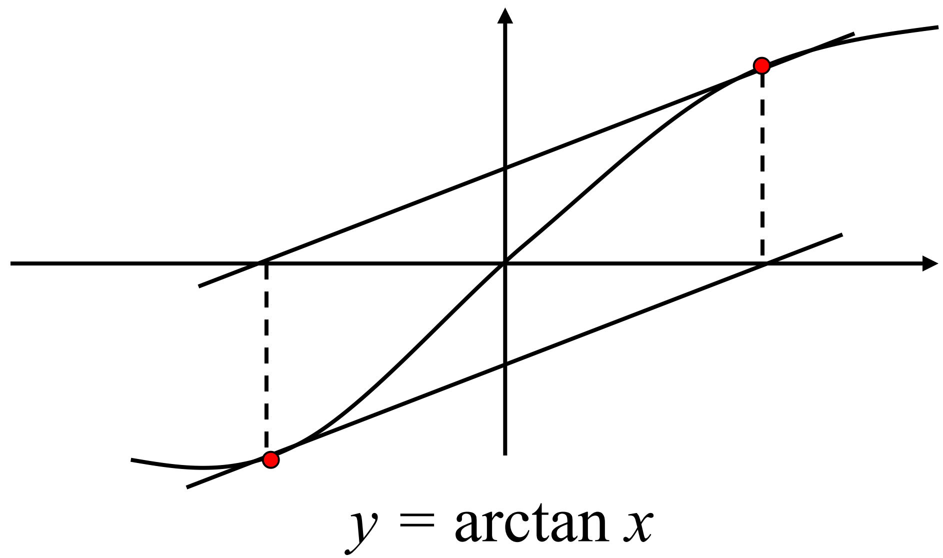
在$x^*=1$附近，$f'(x)\approx 0$



2.程序死循环

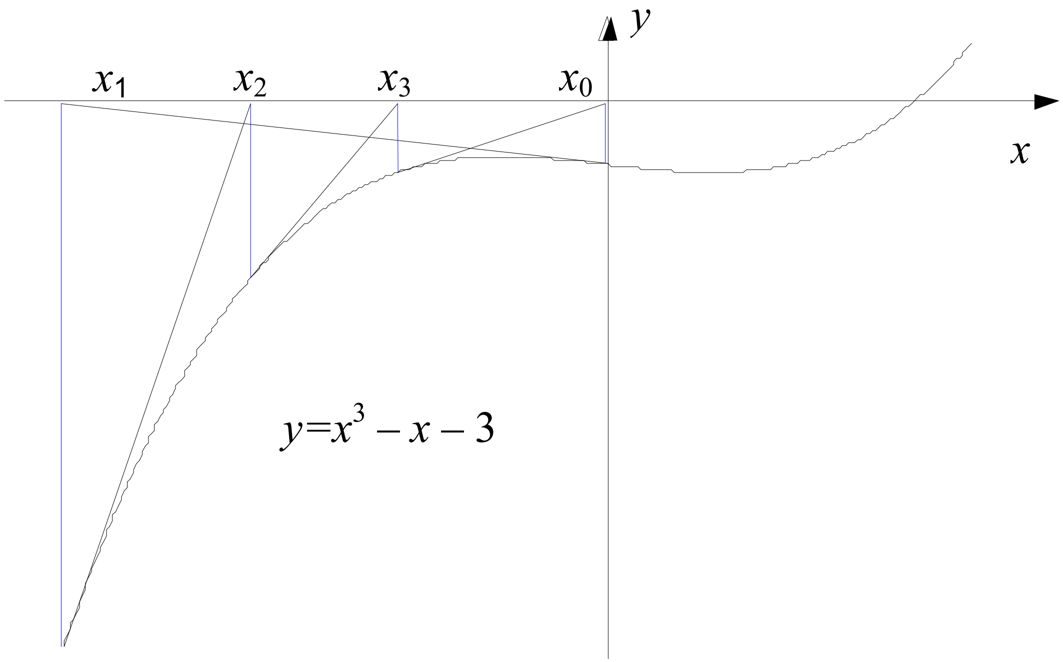
对 $f(x)=\arctan x$

存在 x_0, 使Newton迭代法陷入死循环



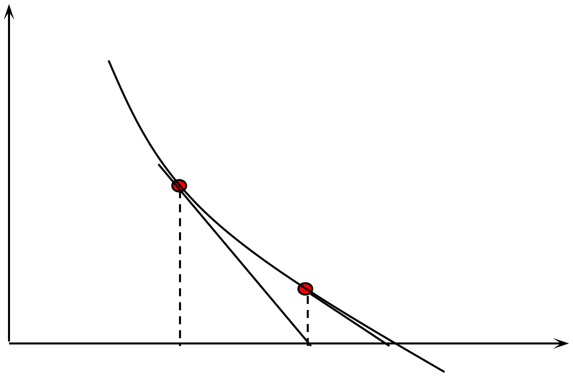
3.其它

取 $x_0=0$, $$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-x_n-3}{3x_n^2-1}\qquad (n=0,1,\cdots\cdots)$$

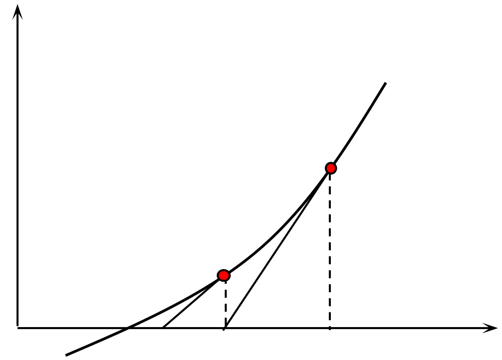


Newton迭代法陷入死循环的另一个例子（可能若干步后才陷入死循环）

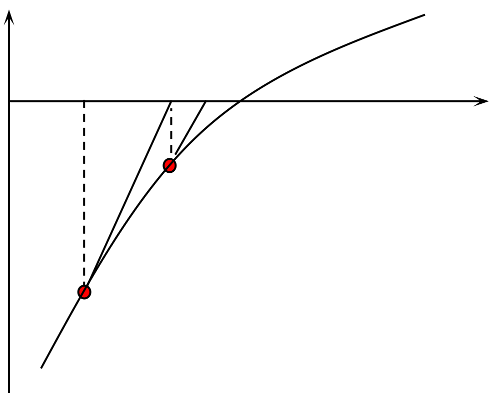
牛顿迭代法收敛的四种情况



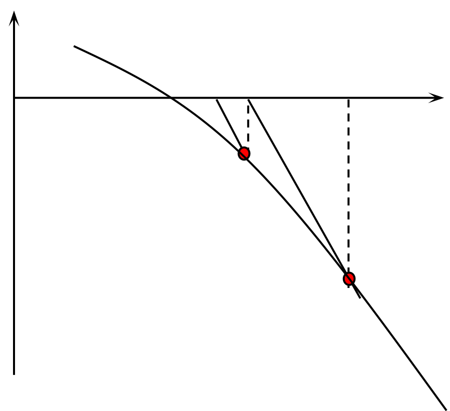
$f'<0$，$f''>0$



$f'>0$，$f''>0$



$f'>0$，$f''<0$



$f'<0$，$f''<0$

定理2.8： 若函数$f(x)$ 在$[a，b]$ 上满足条件

（1）$f(a)\,f(b) < 0$;

（2）$f'(x)$，$f''(x)$ 在$[a，b]$上连续且不变号（恒为正或恒为负）；

（3）取$x_0 \in [a，b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0) > 0$（不证）

则方程 $f(x) = 0$ 在$[a，b]$ 上有唯一根 x^*，且由初值x_0按牛顿迭代公式求得的序列$\{x_n\}$二阶收敛于x^*。

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2 = 0$$

$$x^* - [x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}] = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

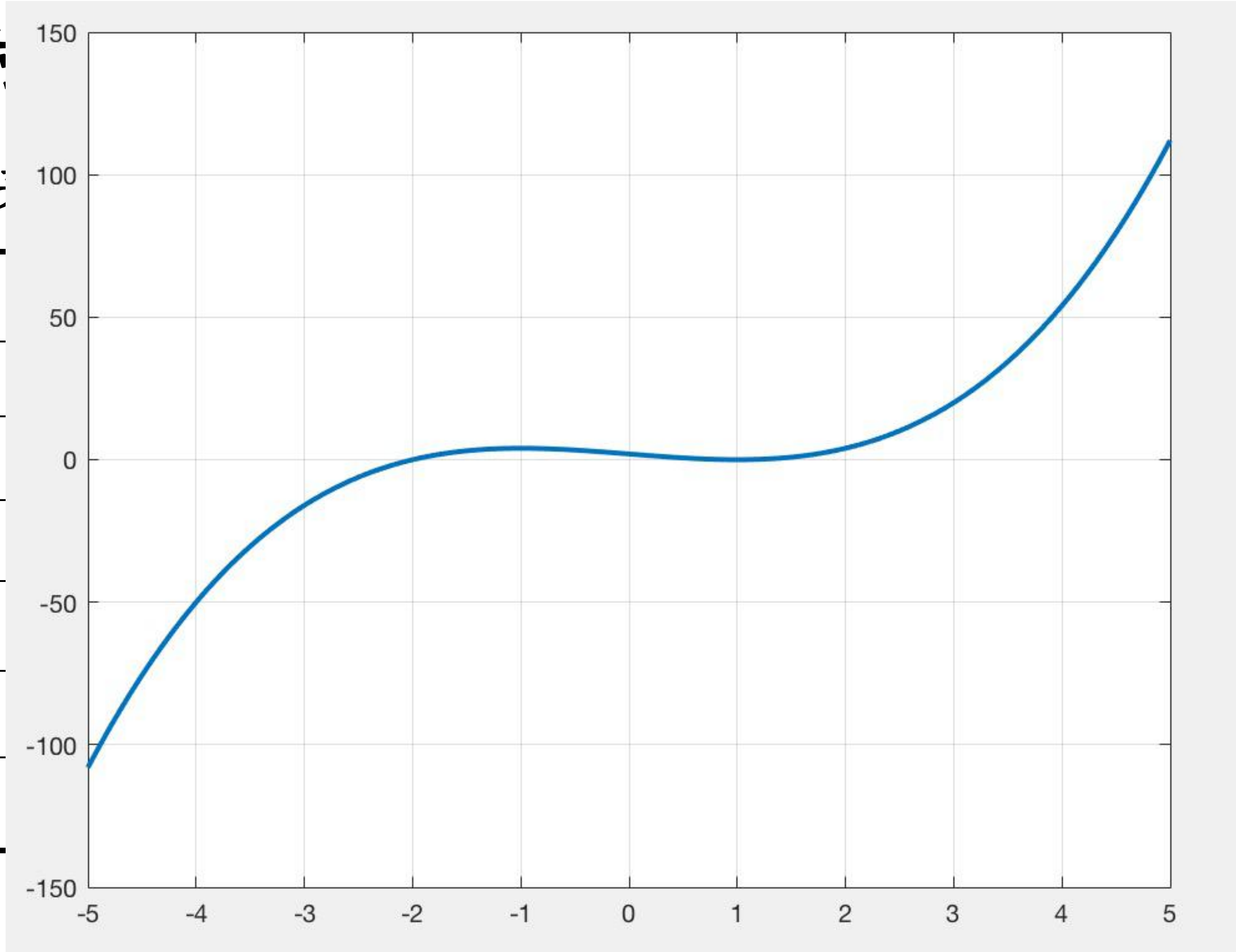
$$x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{(x_k - x^*)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

例3. 已知方程 $x^3 - 3x + 2 = 0$

有两根：$x_1^* = -2$　　$x_2^* = 1$

取根附 … 。



n
0
1
2
3
4
5

表4 初值取 1.5 时牛顿迭代法速度

n	x_n	$\|e_n\|$	$\|e_{n+1}\|/\|e_n\|$
0	1.5	5.00e-001	为什么这么慢?
1	1.2666666	2.66e-001	0.5333
2	1.1385620	1.38e-001	0.5196
3	1.0707773	7.07e-002	0.5108
4	1.0357918	3.57e-002	0.5057
5	1.0180008	1.80e-002	0.5029
6	1.0090271	9.02e-003	0.5015
7	1.0045203	4.52e-003	0.5007
8	1.0022618	2.26e-003	0.5004
9	1.0011313	1.13e-003	0.5002
10	1.0005657	5.65e-004	0.5001
11	1.0002829	2.82e-004	0.5000

引理1 设 x^*是 $f(x)=0$ 的二重根，则牛顿迭代法只具有一阶收敛

证：x^*是二重根 ➔ $f(x)=(x-x^*)^2g(x)$

$$f'(x)=(x-x^*)[2g(x)+(x-x^*)g'(x)]$$

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-x^*)g(x)}{2g(x)+(x-x^*)g'(x)}$$

➔ $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{1}{2}$　牛顿迭代法只是一阶收敛.

表明：当有重根时，传统牛顿法二阶收敛性质不成立！

怎么办？

引理2 若 x^*是 $f(x)=0$ 的 m 重根,修正的牛顿迭代法

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

为至少二阶收敛

回到例3： $m=2$ ➔ $$x_{n+1}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

表5 x^*为二重根时修正的牛顿迭代实验 (例3)

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert e_{n+1} \rvert / \lvert e_n \rvert^2$
0	1.5	5.00e-001	
1	1.03333333333	3.33e-002	0.1333
2	1.00018214936	1.85e-004	0.1639
3	1.00000000552	5.52e-009	0.1667

总结

优点：

- 牛顿法有 $\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}=\left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$ ， $f'(x^*)\neq 0$ (无重根)就有 $p\geq 2$。重根是线性收敛的。

- 相对简单。

缺点：

- 牛顿法收敛性依赖于 x_0 的选取。初值充分接近根以保证局部收敛性。

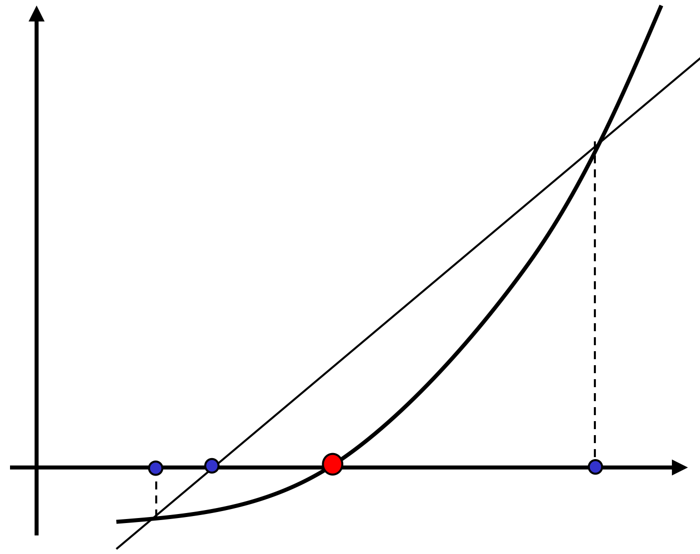
- 公式中需要求 $f(x)$ 的导数。若 $f(x)$比较复杂，则使用牛顿公式就大为不便。

- 零除、死循环

➢Newton迭代法的变形—弦截法(为避免计算导数)

由于

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



代入牛顿迭代格式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

表6 弦截法收敛速度实验（解例3）

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert e_{n+1} \rvert / \lvert e_n \rvert^{1.618}$
1	-1.5	5.00e-001	
2	-2.5	5.00e-001	1.5347
3	-1.83783783783	1.62e-001	0.4978
4	-1.95420890762	4.57e-002	0.8691
5	-2.00552244119	5.52e-003	0.8109
6	-1.99982796307	1.72e-004	0.7742
7	-1.99999936831	6.31e-007	0.7785
8	-2.00000000007	7.24e-011	0.7778