《数值分析》3

- 不动点迭代法
- 不动点迭代的收敛性
- 迭代序列的收敛速度
- 序列收敛加速方法

《数值分析》3

- 不动点迭代法
- 不动点迭代的收敛性
- 迭代序列的收敛速度
- 序列收敛加速方法

迭代:将一个计算过程反复进行

迭代法:一类常见常用的计算技术

举例:

方程:　$x = \cos(x)$

- 构造有效的**迭代格式**
- 选取合适的**迭代初值**
- 对迭代格式进行**收敛性分析**

一简单迭代:$x_{n+1} = \cos(x_n)$　(n=1,2,3,⋯⋯)

初值:x_0=0.5

举例1： 方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个根，将方程变换成另一形式

(1) $x = \sqrt{10 - x^3} / 2 \qquad \varphi(x) = \sqrt{10 - x^3} / 2$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

(2) $x = \sqrt{10/(x+4)} \qquad \varphi(x) = \sqrt{10/(x+4)}$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1.5$$

唯一性？构造规律？构造有效？

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.5000	
1	1.2870	2.1e-1
2	1.4025	1.1e-1
3	1.3455	5.7e-2
4	1.3752	2.9e-2
5	1.3601	1.5e-2
6	1.3678	7.7e-3
7	1.3639	3.9e-3
8	1.3659	2.0e-3
9	1.3649	1.0e-3
10	1.3654	5.3e-4

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{10}{x_n + 4}}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	1.5000	
1	1.3484	1.5e-1
2	1.3674	1.8e-2
3	1.3650	2.4e-3
4	1.3653	3.0e-4
5	1.3652	3.9e-5
6	1.3652	4.9e-6

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\varphi(x)$$

若存在 x^*, 使得 $x^*=\varphi(x^*)$, 则称 x^*为$\varphi(x)$的不动点

$\varphi(x)$ —— 迭代函数

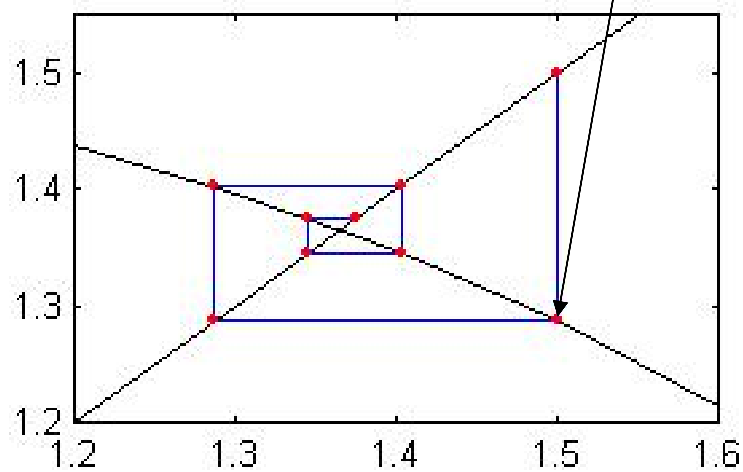
$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_n=\varphi(x_n) \\ x_{n+1}=y_n \end{cases}$$

$$(x_n,y_n)\rightarrow(x_{n+1},y_n)$$
$$\rightarrow(x_{n+1},y_{n+1})$$

…………

$$\varphi(x)=\sqrt{10-x^3}/2$$



不动点迭代蛛网图

引理2.1 如果 $\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a\le\varphi(x)\le b$; (2) $|\varphi'(x)|\le L<1$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 有**唯一**的**不动点** x^*

证: 1)若 $\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$,显然 $\varphi(x)$ 有不动点

设 $\varphi(a)\ne a$, $\varphi(b)\ne b$ 则有 $\varphi(a)>a$, $\varphi(b)<b$

记 $\psi(x)=\varphi(x)-x$ 则有 $\psi(a)\cdot\psi(b)<0$

所以, 存在 x^*, 使得 $\psi(x^*)=0$

即 $x^*=\varphi(x^*)$, 故 x^* 是 $\varphi(x)$的不动点.

2) 如果 $\varphi(x)$ 有两个不同的不动点 $x_1^* \neq x_2^*$ 则有

$$x_1^* = \varphi(x_1^*) \qquad x_2^* = \varphi(x_2^*)$$

两式相减得

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 ξ 介于 x_1^* x_2^* 之间, 使

$$x_1^* - x_2^* = \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*) = \varphi'(\xi)(x_1^* - x_2^*)$$

$\Rightarrow$ $|x_1^* - x_2^*| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_1^* - x_2^*|$

$\Rightarrow$ $|x_1^* - x_2^*| \le L \cdot |x_1^* - x_2^*|$

$\Rightarrow$ $1 \le L$ （与 $L<1$ 条件矛盾 ）

故不动点唯一。

定理2.4 如果$\varphi(x)\in C^1[a,\ b]$,满足条件:

(1) $a \le \varphi(x) \le b$; (2) $|\varphi'(x)| \le L < 1$

则对任意的 $x_0 \in [a, b]$, 迭代格式$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 产生的**序列 $\{x_n\}$ 收敛到不动点 x^***,且有

$$|x^* - x_n| \le \frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

证:

$$\begin{cases} x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ x^* = \varphi(x^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \\ &= |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{n-1} - x^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x_n - x^*| \le L|x_{n-1} - x^*|$$

$$|x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x^*| \le \lim_{n\to\infty} L^n |x_0 - x^*| = 0 \quad (0<L<1)$$

所以， $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 故迭代格式收敛

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|$$

$$\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x_{n+1}| + L|x_n - x^*|$$

$$\Rightarrow \quad (1-L)|x_n - x^*| \le |x_n - x_{n+1}|$$

$$\Rightarrow \quad |x^* - x_n| \le \frac{1}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

不动点迭代序列的收敛速度

数列的 r 阶收敛(概念)：

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$，若存在 $a>0$，$r>0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^r}=a$$

则称数列$\{x_n\}$ r 阶收敛.

特别: (1) 收敛阶$r=1$时,称为**线性收敛**

(2) 收敛阶$r>1$时,称为**超收敛**;

(3) 收敛阶$r=2$时,称为**平方收敛**

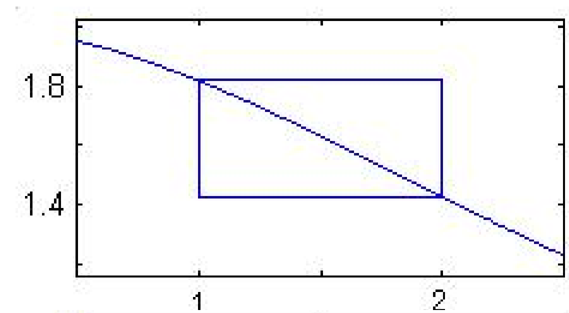
序列的收敛**阶数越高**, 收敛速度**越快**

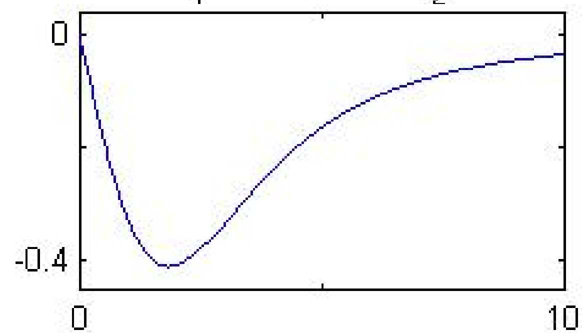
例2.3 方程 $x^3+10x-20=0$,取 $x_0=1.5$, 证明迭代法在[1, 2]上，$x_{n+1}=20/(x_n^2+10)$ 是线性收敛

证:令 $\varphi(x)=20/(x^2+10)$

$\rightarrow$ $\boxed{\varphi(1)\approx 1.82 \quad \varphi(2)\approx 1.43}$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) = -40x/(x^2+10)^2 \\ \varphi''(x) = 40\dfrac{3x^2-10}{(x^2+10)^3} \end{cases}$$





$\varphi''(x)=0 \rightarrow \hat{x}=\sqrt{10/3}$

$\varphi'(\hat{x})\approx$ -0.4108 $\rightarrow |\varphi'(x)|\le 0.411$

显然,在x^*附近 $|\varphi'(x)|<1$ $\varphi'(x)\neq 0$

利用Lagrange中值定理, 有

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_n)||x_n-x^*|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\lim_{n\to\infty}|\varphi'(\xi_n)|=|\varphi'(x^*)|$$

由此可知,这一序列的收敛阶数为1,即迭代法是线性收敛.

n	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n \rvert$	$\dfrac{\lvert x_{n+2}-x_{n+1} \rvert}{\lvert x_{n+1}-x_n \rvert}$
0	1.5000000	1.3265e-001	4.0381e-001
1	1.6326530	5.3567e-002	4.0594e-001
2	1.5790858	2.1745e-002	4.0521e-001
3	1.6008308	8.8113e-003	4.0553e-001
4	1.5920195	3.5732e-003	4.0540e-001
5	1.5955927	1.4486e-003	4.0545e-001
6	1.5941442	5.8733e-004	4.0543e-001
7	1.5947315	2.3812e-004	4.0544e-001
8	1.5944934	9.6545e-005	4.0544e-001
9	1.5945899	3.9143e-005	4.0544e-001
10	1.5945508	1.5870e-005	4.0544e-001
11	1.5945666	6.4343e-006	
12	1.5945602		

定理2.6 设x^*是 $\varphi(x)$ 的不动点,且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$$

而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$ 则 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ p阶收敛

由Taylor公式

$$|x_{n+1}-x^*|=|\varphi(x_n)-\varphi(x^*)|=\frac{|x_n-x^*|^p}{p!}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|$$

其中, ξ_n 介于x_n和x^*之间. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p}=\frac{1}{p!}\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(p)}(\xi_n)|=\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x^*)|$$

故迭代法p阶收敛.

理一下思路

计算基本常识：误差、有效数字、计算中数的规则

算法的稳定概念：引迭代格式重要性

迭代法的引入：二分法（区间迭代、误差定理）

迭代法深入：不动点迭代（初值点迭代、收敛性条件、收敛误差、收敛速度，定理2.4）

经典迭代法：牛顿迭代（推导、几何、优缺点.....）

这章迭代法的对象（干什么）？