

# 博弈论与信息经济学

## 2. 完全信息静态博弈（一）

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023–2024）

主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士

办公室：粤海校区汇文楼1510      Email: [huangjp@szu.edu.cn](mailto:huangjp@szu.edu.cn)

# 完全信息静态博弈

# 完全信息静态博弈

## Static games of complete information

- **静态博弈 (static game)** 是包含多个参与人的单次决策问题，通常可以分为两个阶段
  - 所有参与人同时且独立地选择自己的行动
  - 根据参与人选择的行动支付相应的回报
- **完全信息 (complete information)** 是指所有参与人都了解博弈的所有细节，可分为下面四点
  - 所有参与人的所有备选行动
  - 所有可能发生的结果
  - 行动的组合如何影响结果
  - 每个参与人的偏好
- **共同知识 (common knowledge)**：事件  $E$  是共同知识是指，
  1. 每个人都知道  $E$
  2. 每个人都知道“每个人都知道  $E$ ”，依此类推直至无穷

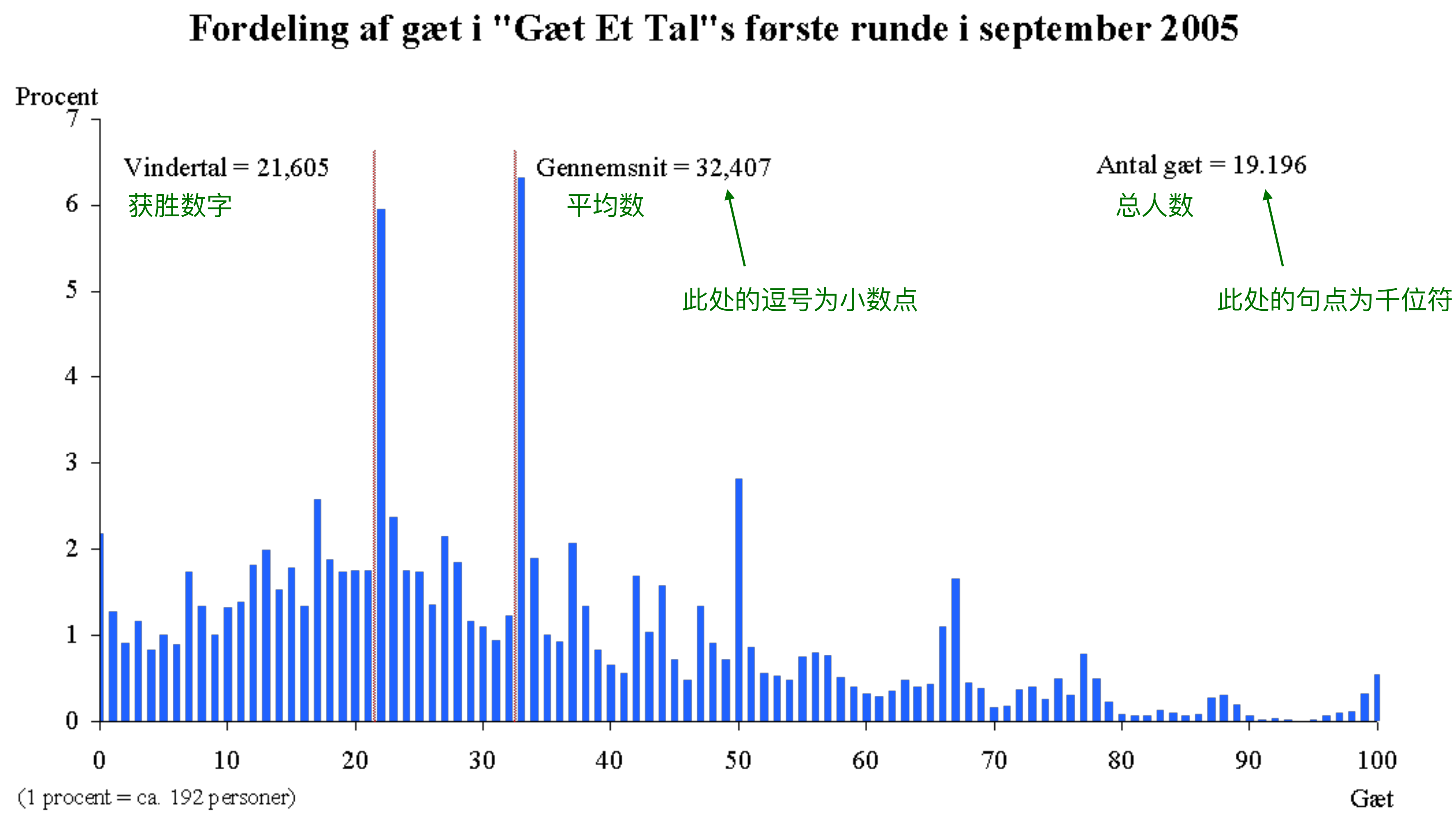
# 现实中的共同知识

- 我预判了你的预判
  - 假设你考虑在下一个黄金周开车离深，为了避免拥堵，你需要选择一个合适的出发日期
  - 已知如果所有有车的深圳人都选择在同一天开车离深，则必然会堵车；如果同时出发的人数减半，则基本不会发生堵车
  - 你会选择在哪一天出发呢？
- 猜数字游戏
  - 每个参与人可以在  $[0, 100]$  中选择一个实数，最接近平均数的  $2/3$  的人获胜
  - 你会选择什么数字呢？

如果假设所有人都随机选择数字，  
则平均数为50，其  $2/3$  是  $100/3 \approx 33.333$

<https://theincidentaleconomist.com/wordpress/analysis-of-whats-23-of-the-average/>

丹麦报纸 *Politiken* 曾经在2005年9月22日报道过一个大规模线上实验的结果：  
共有19196人参与， 获胜奖金为5000丹麦克朗（按当时汇率约合3850元人民币）， 下图为参与人所选数字的分布



# 纯策略标准式博弈

## Normal-form game with pure strategies

- 我们首先忽略不确定性，假设所有参与人都只选择一个确定的行动，且该行动会带来确定的结果

**纯策略 (pure strategy)**：参与人  $i$  的纯策略是一个确定的行动计划。参与人  $i$  的所有纯策略的集合记作  $S_i$ 。纯策略向量  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $s_i \in S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  描述了博弈中  $n$  个参与人的策略组合

- 和纯策略相对的概念是混合策略 (mixed strategy)，即随机选择行动。例如当你犹豫晚饭吃什么的时候，通过抛硬币的方式进行决策
- 在完全信息静态博弈中，选择策略等同于选择行动

**标准式博弈 (normal-form game)** 由以下三个部分构成：

标准式博弈也称策略式博弈 (strategic-form game)

1. 有限参与人集合  $N = \{1, 2, \dots, n\}$
2. 参与人的纯策略集合的族  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$
3. 支付函数的集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，其中  $v_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in N$  确定了每一种策略组合给参与人  $i$  带来的回报

# 标准式博弈的例子 1

## 囚徒困境博弈 (the prisoner's dilemma game)

- 两个犯罪嫌疑人分别接受审讯。他们知道如果两个人都保持沉默 ( $M$ )，则警方会因为证据不足而无法起诉。如果一个人招供 ( $F$ ) 而另一个人保持沉默，则保持沉默的人会被重罚，而招供的人会因为配合警方而获得减刑。如果两人都招供，则两人都会被起诉，但会因为无法分辨谁是主犯而受到较轻的惩罚
- 这个博弈的标准式描述是
  - 参与人：  $N = \{1, 2\}$
  - 策略集合：  $S_i = \{M, F\}$ ,  $i \in \{1, 2\}$
  - 支付函数： 令  $v_i(s_1, s_2)$  为策略组合  $(s_1, s_2)$  对应的参与人  $i$  的支付函数，则参与人获得的回报为

$$\begin{aligned} v_1(M, M) &= v_2(M, M) = -2, & v_1(F, F) &= v_2(F, F) = -4, \\ v_1(M, F) &= v_2(F, M) = -5, & v_1(F, M) &= v_2(M, F) = -1 \end{aligned}$$

# 标准式博弈的例子 2

## 古诺双寡头博弈 (Cournot duopoly)

- 两家公司生产同一种产品。假设该产品固定成本为零，可变成本函数为  $c_i(q_i) = q_i^2$ 。市场需求函数为  $q = 100 - p$ ,  $q = q_1 + q_2$
- 两家公司处于竞争关系，它们可以决定自己的产量  $q_i$ ，并理解总产量能影响市场价格
- 这个博弈的标准式描述是
  - 参与人：  $N = \{1, 2\}$
  - 策略集合：  $S_i = [0, \infty)$ ,  $i \in \{1, 2\}$
  - 支付函数：当  $i, j \in \{1, 2\}$  且  $i \neq j$  时

$$v_i(s_i, s_j) = \begin{cases} (100 - s_i - s_j) \cdot s_i - s_i^2 & \text{if } s_i + s_j < 100 \\ -s_i^2 & \text{if } s_i + s_j \geq 100 \end{cases}$$

当价格为正时，收益等于利润

当价格为零时，收益等于负成本



# 标准式博弈的例子 3

## 投票博弈 (voting game)

- 由三个委员组成的委员会将针对是否采纳一项新政策进行投票
- 每个委员可以投赞成 ( $Y$ )，反对 ( $N$ )，或者弃权 ( $A$ )
- 保持现状给每人的回报均为 0，新政策给委员 1 和 2 带来的回报为 1，给委员 3 带来的回报为 -1。投票遵循少数服从多数原则，即赞成票多于反对票时，视为新政策获得支持

- 这个博弈的标准式描述是

– 参与人：  $N = \{1, 2, 3\}$

– 策略集合：  $S_i = \{Y, N, A\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$

– 支付函数：令  $P$  为新政策获得支持的投票结果的集合， $Q$  为其他投票结果的集合，则

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} (Y, Y, N), & (Y, N, Y), & (N, Y, Y), \\ (Y, Y, A), & (Y, A, Y), & (A, Y, Y), \\ (Y, A, A), & (A, Y, A), & (A, A, Y), \\ (Y, Y, Y) \end{array} \right\}$$

$$v_i(s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} 1 & \text{if } (s_1, s_2, s_3) \in P \\ 0 & \text{if } (s_1, s_2, s_3) \in Q \end{cases} \quad \text{for } i \in \{1, 2\}, \quad v_3(s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} -1 & \text{if } (s_1, s_2, s_3) \in P \\ 0 & \text{if } (s_1, s_2, s_3) \in Q \end{cases}$$

# 矩阵表达

## 两个参与人的有限博弈

- 标准式博弈虽然能够清晰地表达博弈的所有要素，但过于复杂（这种复杂程度很多时候是不必要的）
- 如果仅考虑两个参与人且策略集合为有限的博弈，则可以用我们熟悉的矩阵进行表达

**有限博弈（finite game）**是指参与人为有限，且每个参与人的策略集合都为有限的博弈

- 两人有限博弈的矩阵表达 在部分文献中也称为双矩阵（bi-matrix）
  - 行：每一行代表参与人 1 的一个策略
  - 列：每一列代表参与人 2 的一个策略
  - 要素：矩阵的每个要素都是向量  $(v_1, v_2)$ ，  
分别代表该策略组合对应的两个参与人的回报

		囚徒困境博弈	
		参与人 2	
参与人 1	$M$	-2, -2	-5, -1
	$F$	-1, -5	-4, -4

# 矩阵表达：练习

- 石头剪刀布 (rock-paper-scissors) 博弈
  - 参与人：  $N = \{1, 2, 3\}$
  - 策略集合：  $S_i = \{R, P, S\}, i \in \{1, 2, 3\}$
  - 支付函数：获胜方的回报为 1，失败方的回报为 -1
- 写出这个博弈的矩阵表达

# 博弈的解

## Solution concepts

### 囚徒困境博弈

		参与人 2	
		<i>M</i>	<i>F</i>
参与人 1	<i>M</i>	-2, -2	-5, -1
	<i>F</i>	-1, -5	-4, -4

### “利他主义”的囚徒困境博弈

		参与人 2	
		<i>M</i>	<i>F</i>
参与人 1	<i>M</i>	-3, -3	-5.5, -3.5
	<i>F</i>	-3.5, -5.5	-6, -6

### Battle of Sexes

		Chris	
		<i>Opera</i>	<i>Football</i>
Alex	<i>Opera</i>	2, 1	0, 0
	<i>Football</i>	0, 0	1, 2

- 博弈的解（**solution**）是分析博弈的方法，其目的是从所有可能的结果中找到更加“合理”的结果
- 我们通常将博弈解所提示的战略组合称为**均衡（equilibrium）**，并用其预测参与人的行动
- 均衡分析的假设：
  - 参与人是**理性的（rational）**：理性参与人通过最大化自身回报的方式选择行动
  - 参与人是**智慧的（intelligent）**：智慧的参与人了解博弈的所有特征，包括所有参与人的行动、结果和偏好
  - **共同知识（common knowledge）**：“所有参与人都是理性的和智慧的”是共通知识
  - **自执行（self-enforcement）**：任何均衡状态下，参与人的选择都是自愿而非被强迫的

# 解的评价标准

- **存在性 (existence)** : 该解在什么条件下可以保证其存在?
- **唯一性 (uniqueness)** : 该解在什么条件下可以保证其是唯一的?
- **不变性 (invariance)** : 如果博弈的结构发生微小变化 (一般指回报), 该解给出的预测会如何变化?
- 对结果的评价: 帕累托最优
  - 对于策略组合  $s \in S$  和  $s' \in S$ , 当  $\forall i \in N, v_i(s) \geq v_i(s')$  且  $\exists i \in N, v_i(s) > v_i(s')$  时, 我们说  $s$  **帕累托优于 (Pareto dominates)**  $s'$ , 也说  $s'$  **帕累托劣于 (Pareto dominated)**  $s$
  - 当一个策略组合不是帕累托劣于任意其他策略组合时, 我们称之为**帕累托最优 (Pareto optimal)**

# 例题：公共品

## Common goods

- 一个小镇的郊区有三户相邻的人家，由于缺少路灯，夜间出行不便，三户人家分别考虑是否要出钱增设路灯
- 增设路灯给每户带来的收益为 3，而不增设带来的收益为 0
- 通过政府的协调，每户人家可以选择出资或不出资，出资所花费的金额按收益单位换算为 1
- 如果至少两户人家出资，则可以增设路灯；否则不但无法增设，出资人也无法收回资金
- 写出这个博弈的标准式表达

# 理性与共同知识

# 劣势策略

## Dominated strategies

- 我们首先定义几种简化的数学表达
  - 令  $v_i(s)$  为策略组合  $s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$  给参与人  $i$  带来的回报
  - 令  $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  为  $s$  中  $i$  以外的参与人的策略组合, 令  $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$  为  $i$  以外的参与人的策略组合的集合, 则可以写成  $s_{-i} \in S_{-i}$
  - 参与人  $i$  的回报可以写成  $v_i(s) = v_i(s_i, s_{-i})$

令  $s_i \in S_i$  和  $s'_i \in S_i$  为参与人  $i$  的两个策略。如果针对任意的  $s_{-i} \in S_{-i}$ ,

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s_{-i})$$

成立, 则称  $s'_i$  严格劣于 (strictly dominated)  $s_i$ , 记作  $s_i > s'_i$

- 理性参与人绝对不会选择严格劣势策略



囚徒困境博弈

参与人 1

		参与人 2	
		<i>M</i>	<i>F</i>
<i>M</i>		-2, -2	-5, -1
<i>F</i>		-1, -5	-4, -4

参与人 1 的严格劣势策略

↑

参与人 2 的严格劣势策略

两个理性参与人都不会选择策略 *M*，因此 (*F*, *F*) 是最优策略

广告博弈

公司 1

		公司 2		
		<i>L</i>	<i>M</i>	<i>H</i>
<i>L</i>		6, 6	2, 8	0, 4
<i>M</i>		8, 2	4, 4	1, 3
<i>H</i>		4, 0	3, 1	2, 2

两家生产同一产品的公司面临选择广告规模的博弈：  
*L* 为小规模，*M* 为中规模，*H* 为大规模

*L* 是严格劣势策略，但是 *M* 和 *H* 不是

# 优势策略均衡

策略  $s_i \in S_i$  如果满足如下条件，则称之为  $i$  的**严格优势策略** (strictly dominant strategy)：针对任意的  $s'_i \in S_i, s_i \neq s'_i$  及任意的  $s_{-i} \in S_{-i}$

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s_{-i})$$

即任意其他策略  $s'_i$  都严格劣于  $s_i$

如果策略组合  $s^D \in S$  中所有要素  $s_i^D \in S_i$  都是参与人  $i \in N$  的严格优势策略，则称  $s^D$  为**严格优势策略均衡** (strict dominant strategy equilibrium)

- 囚徒困境博弈中的  $(F, F)$  即为严格优势策略均衡

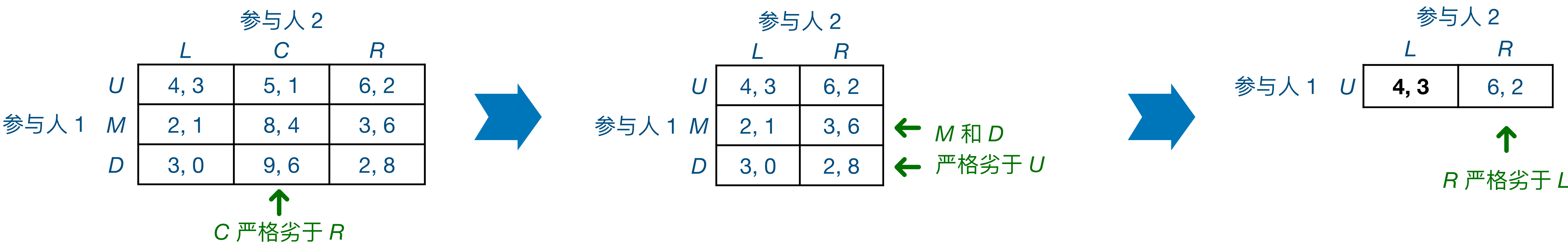
定理：如果博弈  $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$  中存在严格优势策略均衡  $s^D$ ，则  $s^D$  是唯一的

- 无法保证严格优势策略均衡的存在性  $\rightarrow$  Battle of Sexes
- 由于定义中使用了  $>$  关系，严格优势策略均衡在回报的微小变化下是稳定的
- 严格优势策略均衡产生的结果可能不是帕累托最优  $\rightarrow$  囚徒困境博弈中  $(-4, -4)$  帕累托劣于  $(-2, -2)$

# 重复剔除严格劣势策略

## Iterated elimination of strictly dominated strategies (IESDS)

- 理性参与人绝对不会选择严格劣势策略
- 从共同知识假设可知，每个理性参与人都知道其他参与人是理性的，因此他们不会选择严格劣势策略，同时其他参与人也知道这个推论
  - 因此，如果博弈中某个参与人存在严格劣势策略，则所有人都知道该参与人不会选择这个策略 → 我们可以将其剔除，从而形成一个新的博弈
  - 重复上一操作，直至不存在严格劣势策略



执行重复剔除严格劣势策略后，任何剩余的策略组合  $s^{ES} = (s_1^{ES}, \dots, s_n^{ES})$  都被称为重复剔除均衡 (iterated-elimination equilibrium)

# 简化版古诺双寡头博弈

- 我们将前面的古诺双寡头博弈中的可变成本函数简化为线性函数： $c_i(q_i) = 10q_i, i \in \{1,2\}$

1. 此时，公司 1 的支付函数为  $v_1(q_1, q_2) = (100 - q_1 - q_2) \cdot q_1 - 10q_1 = -q_1^2 + (90 - q_2)q_1$

– 如果已知公司 2 的产量为  $q_2$ ，公司 1 的最优策略为  $q_1 = (90 - q_2)/2$

– 因为  $q_2 \geq 0$ ，可得  $q_1 \leq 45$ ，即  
对于公司 1，任何超过 45 的产量都是严格劣势策略

– 同样的分析也适用于公司 2  $\Rightarrow q_i \in [0, 45], i \in \{1, 2\}$

2. 将  $q_i \leq 45$  代入  $q_i = (90 - q_j)/2$  可得  $q_i \geq 22.5$

$\Rightarrow q_i \in [22.5, 45], i \in \{1, 2\}$

3. 将  $q_i \geq 22.5$  代入  $q_i = (90 - q_j)/2$  可得  $q_i \leq 33.75$

$\Rightarrow q_i \in [22.5, 33.75], i \in \{1, 2\}$

4. 重复以上步骤

$\Rightarrow$  参考右图，重复剔除均衡是直线  $q_1 = q_2$  和  
 $q_1 = (90 - q_2)/2$  的交点，即  $(q_1, q_2) = (30, 30)$

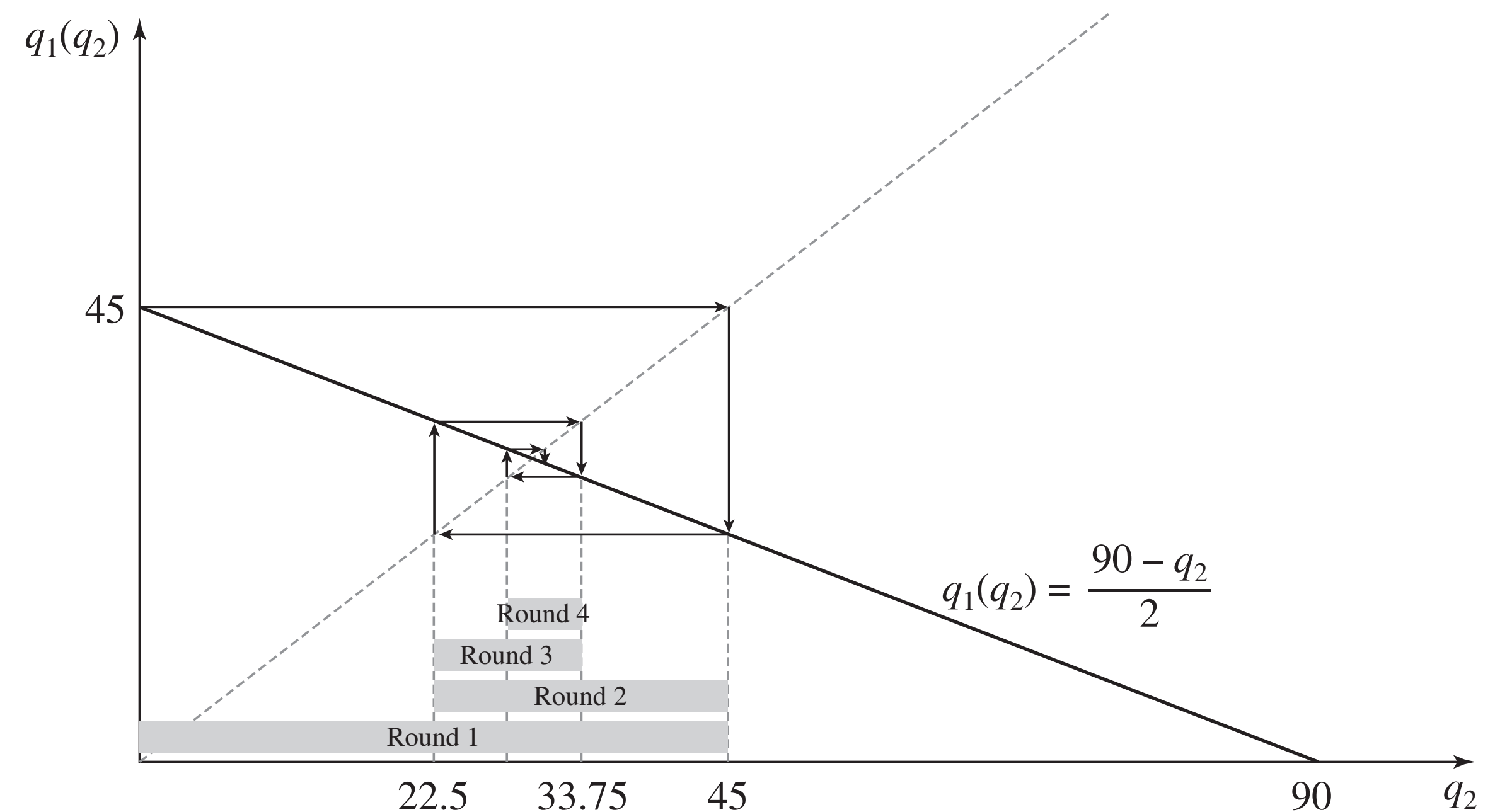


FIGURE 4.1 IESDS convergence in the Cournot game.

# 对重复剔除均衡的评价

- 重复剔除均衡需要假设参与人的理性是共同知识
- 重复剔除均衡永远存在
- 重复剔除均衡不能保证解的唯一性 → 广告博弈
- 重复剔除均衡的结果不一定是帕累托最优 → 囚徒困境博弈

广告博弈

		公司 2		
		L	M	H
公司 1	L	6, 6	2, 8	0, 4
	M	8, 2	4, 4	1, 3
	H	4, 0	3, 1	2, 2

定理：如果策略组合  $s^*$  是博弈  $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$  的严格优势策略均衡，那么它也是该博弈唯一的重复剔除均衡

# 信念和最优反应

## Beliefs and best response

- 在 Battle of Sexes 博弈中，严格优势策略均衡和重复剔除均衡都无法预测参与人的行动
- 如果我们假设 Alex 相信 Chris 会选择 Opera，则理性的 Alex 也会选择 Opera

参与人  $i$  的信念 (belief) 是  $i$  以外其他参与人的一种策略组合  $s_{-i} \in S_{-i}$

如果策略  $s_i \in S_i$  满足

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s'_i \in S_i$$

则称其为参与人  $i$  对其他参与人的策略组合  $s_{-i} \in S_{-i}$  的**最优反应 (best response)**。  $s_{-i}$  的最优反应的集合记作  $BR_i(s_{-i})$

- 每一个信念  $s_{-i}$  都可以对应一个或多个最优反应，因此我们可以把  $BR_i(s_{-i})$  看作一种函数（实际上是函数的扩展概念，数学上称为**对应 correspondence**）
- 理性参与人在每一个信念下一定会选择最优反应；严格劣势策略不会成为任何信念的最优反应
- 理性参与人不会选择无法成为最优反应的策略 → 我们可以重复剔除无法成为最优反应的策略，其结果称为**可理性化策略 (rationalizable strategies)**
- 在有限标准式博弈中，如果存在严格优势策略均衡  $s^*$ ，则对所有参与人  $i \in N$ ，  $s_i^*$  是  $s_{-i}^*$  的最优反应

		Battle of Sexes	
		Chris	
Alex	Opera	2, 1	0, 0
	Football	0, 0	1, 2



# 例题：第一价格拍卖

## First-price auction

- 两个参与人参加了一件艺术品的拍卖会
- 参与人 1 认为该艺术品的价值是 3，参与人 2 认为其价值是 5
- 两人各有一次出价机会，均可出价 0, 1, 或 2
- 出价高者为赢家，赢家获得该艺术品并支付所出价格，输家不需要支付任何费用；如果出价相同则通过抛硬币决定谁是赢家
- 回答下面的问题：
  1. 写出这个博弈的矩阵表达
  2. 存在严格劣势策略吗？
  3. 找到重复剔除均衡