高级计量经济学

Lecture 7: Hypothesis Testing

黄嘉平

工学博士 经济学博士
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

办公室 粤海校区汇文楼1510
E-mail huangjp@szu.edu.cn
Website https://huangjp.com

假设检验的基础知识

假设检验的思维方式

The Idea of Hypothesis Testing

考虑回归模型

$$y_t = \beta + u_t\ ,\quad u_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2)$$

此时 OLS 估计量满足 $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$，$\mathrm{Var}[\hat{\beta}] = \frac{1}{n}\sigma^2$。

我们想知道总体中的 β 是否满足某种限制条件，例如

$$H_0:\ \beta = \beta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \beta \neq \beta_0$$

H_0 是零假设（null hypothesis），H_1 是备择假设（alternative hypothesis）。

我们要针对 H_0 进行检验，就是要找到一个检验统计量（test statistic），并使其满足：

1. 当零假设正确时，我们知道该统计量服从分布 A；
2. 当零假设错误（即备择假设正确）时，我们知道该统计量服从分布 $B \neq A$。

如果零假设正确时很难获得样本中检验统计量的取值的话，我们就有理由相信零假设是错误的。当理由充分时，我们即可拒绝（reject）零假设，而偏向于接受（accept）备择假设。

统计量的分布

Distribution of Test Statistic

首先我们假定零假设 H_0： $\beta = \beta_0$ 成立（这里的 β_0 就是总体中 β 的真实值）。同时我们假设 u_t 服从正态分布且 σ 已知。

一个常用的检验统计量是

$$z = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\beta}]}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{\beta} - \beta_0)$$

因为 $\hat{\beta}$ 非偏，则在零假设下 $E[z] = 0$。z 的方差为

$$\mathrm{Var}[z] = E[z^2] = \frac{n}{\sigma^2}E[(\hat{\beta} - \beta_0)^2] = \frac{n}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n} = 1$$

如果 u_t 服从正态分布，z 也服从正态分布，所以 $z \sim N(0,1)$。

如果备择假设 H_1： $\beta \neq \beta_0$ 成立，那针对任意 $\beta = \beta_1 \neq \beta_0$，则有 $\hat{\beta} = \beta_1 + \hat{\gamma}$。可知 $\hat{\gamma}$ 服从 $N(0, \sigma^2/n)$，因此 $z \sim N(\lambda,1)$，$\lambda = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\beta_1 - \beta_0)$。

拒绝域和接受域

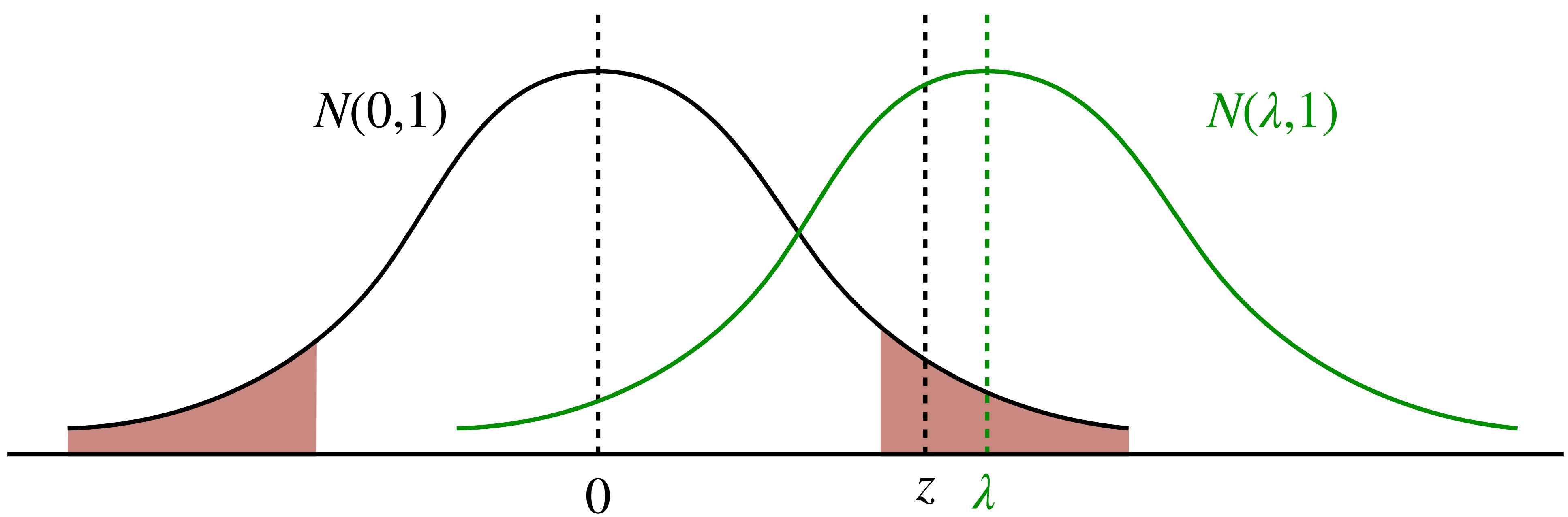
Rejection and Acceptance Regions

$$H_0:\ \beta = \beta_0 \quad \Rightarrow \quad z \sim N(0,1)$$

$$H_1:\ \beta \neq \beta_0 \quad \Rightarrow \quad \text{对任意的}\,\beta = \beta_1,\ z \sim N(\lambda,1),\ \lambda = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\beta_1 - \beta_0)$$

当 n 足够大时，则在备择假设下，大概率可以观测到 z 的取值显著不为零。如果我们确实观测到 $|z| \gg 0$，就可以拒绝零假设。

我们需要事先规定一个拒绝零假设的规则。通常我们设定一个拒绝域（rejection region），当 z 的取值在该域中时，就拒绝零假设。检验（test）= 检验统计量 + 拒绝规则。拒绝域以外的区域是接受域（acceptance region）。



检验可能出错

因为样本的随机性，所有检验都可能出现错误。

通常存在两种检验错误：

	检验结果	
	接受零假设	**拒绝零假设**
零假设成立	正确	Type I error
备择假设成立	Type II error	正确

检验的显著性水平（level of significance）： $\alpha = \Pr(\text{ type I error })$

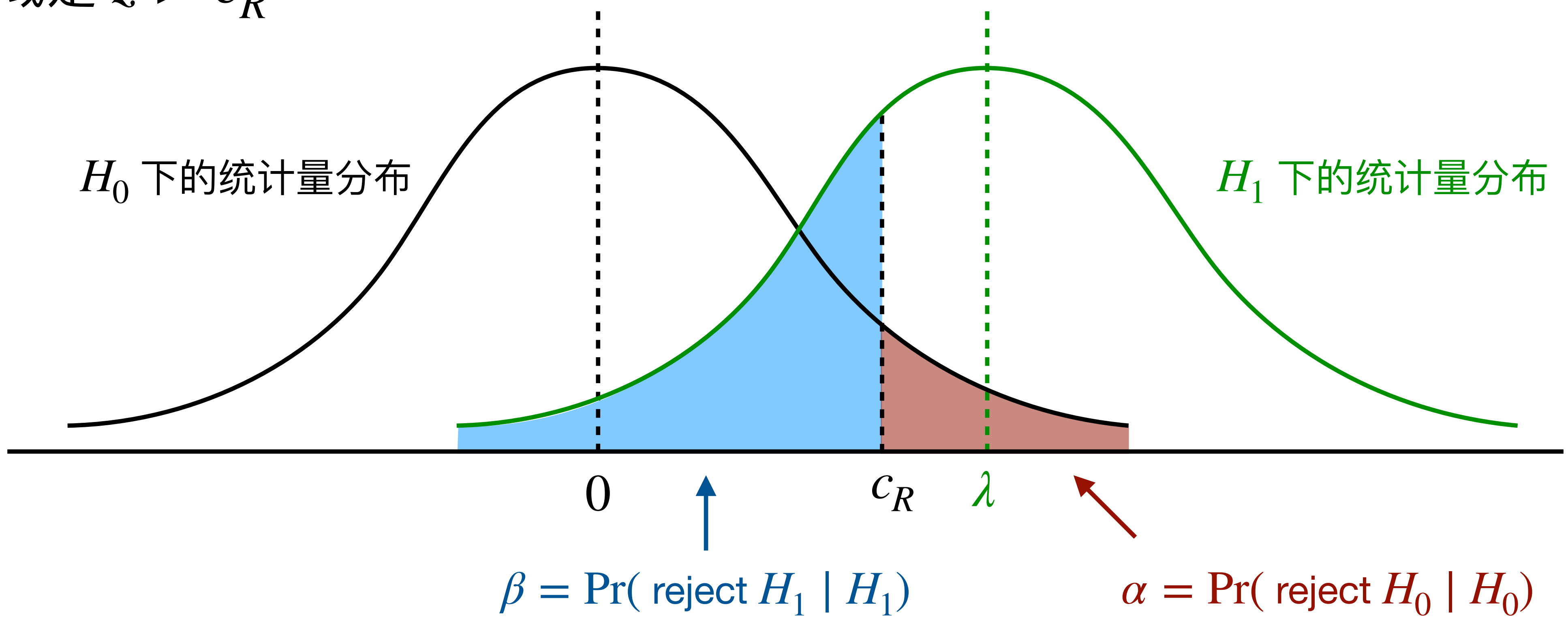
检验的功效（power）： $\Pr(\text{ reject } H_0)$

当 H_0 成立时，power = α；当 H_1 成立时 power = $1 - \beta = 1 - \Pr(\text{ type II error})$

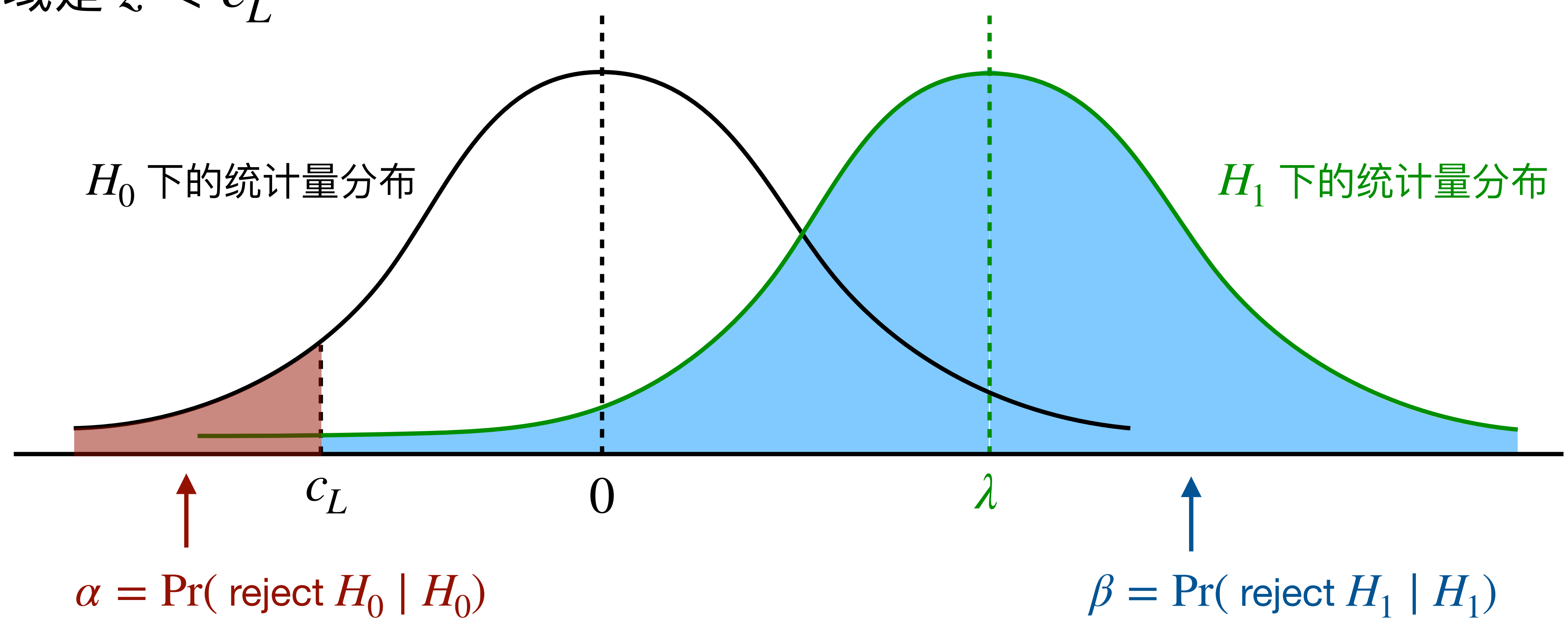
注意：这里的 β 不是回归系数

功效的大小受样本量的影响。当样本量固定时，往往无法同时减小两种错误的概率。因此，我们通常固定 α，即显著性水平，然后选择 β 更小的检验。

当拒绝域是 $z > c_R$



当拒绝域是 $z < c_L$



临界值和 *P* 值

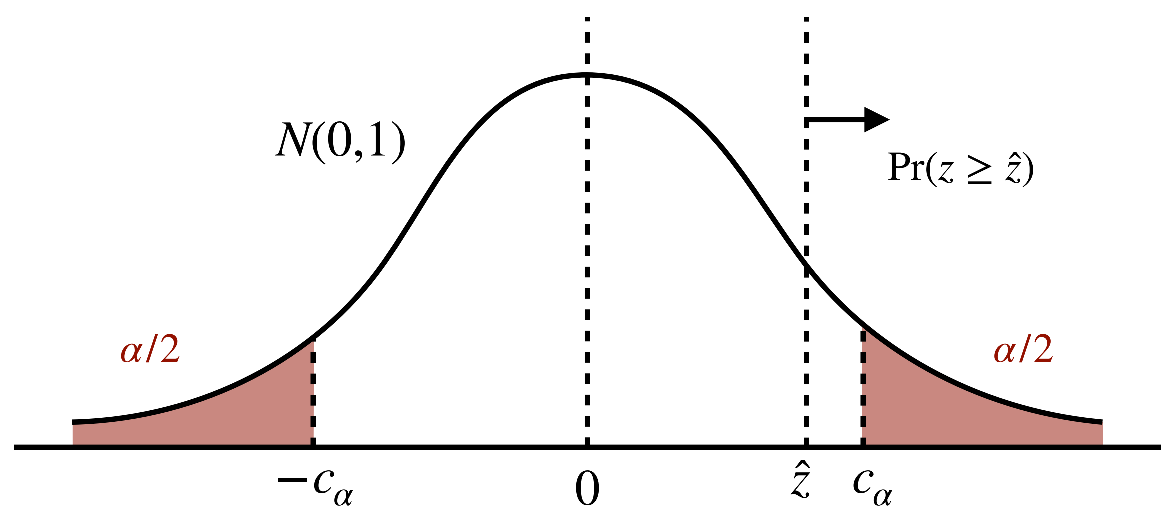
Critical Value and the *P* Value

当给出检验的显著性水平 α 时，我们可以通过确定临界值的方式给出该检验的拒绝域。

z 统计量服从标准正态分布，则双尾检验的临界值 c_α 可以通过下面的隐函数定义

$$\Phi(c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad c_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$$

Φ 是标准正态分布的累积分布函数



当我们观测到估计值 $\hat{z}$ 时，我们将 $2\Pr(z > |\hat{z}|)$ 定义为该检验的 *P* 值（marginal/observed significance level）。*P* 值是临界值为 $\hat{z}$ 的检验所对应的显著性水平。

P 值受样本量影响。样本量 n 越大，*P* 值越小。因此，在大样本下，我们应当审视 5% 或 1% 常用显著性水平的合理性。

常用的概率分布

正态分布
The Normal Distribution

正态分布也称高斯分布（Gaussian distribution），由期望值 μ 和方差 σ^2 两个参数决定。

$N(\mu, \sigma^2)$ 的密度函数是

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

如果 $x \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

- 服从正态分布的独立变量的线性结合也服从正态分布。（pp.130-132）

多变量正态分布

The Multivariate Normal Distribution

随机向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ 服从期望值为 $\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的多变量正态分布可以表达为 $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega})$。其密度函数为

$$f(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\boldsymbol{\Omega}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

因为 $\boldsymbol{\Omega}$ 是协方差矩阵，因此是半正定。
又因 $\boldsymbol{\Omega}$ 可逆，因此是正定矩阵。

- 如果 $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega})$，则 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{a})$。
- 如果 $\boldsymbol{x}$ 服从多变量正态分布，且协方差都为零（要素间相互不相关），则 $x_1, \ldots, x_m$ 相互独立。

相互独立（mutual independence）：
$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_m)$

卡方分布

The Chi-squared Distribution

当随机向量 $z \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ 时，随机变量

$$y \equiv \|z\|^2 = z^\top z = \sum_{t=1}^{m} z_t^2$$

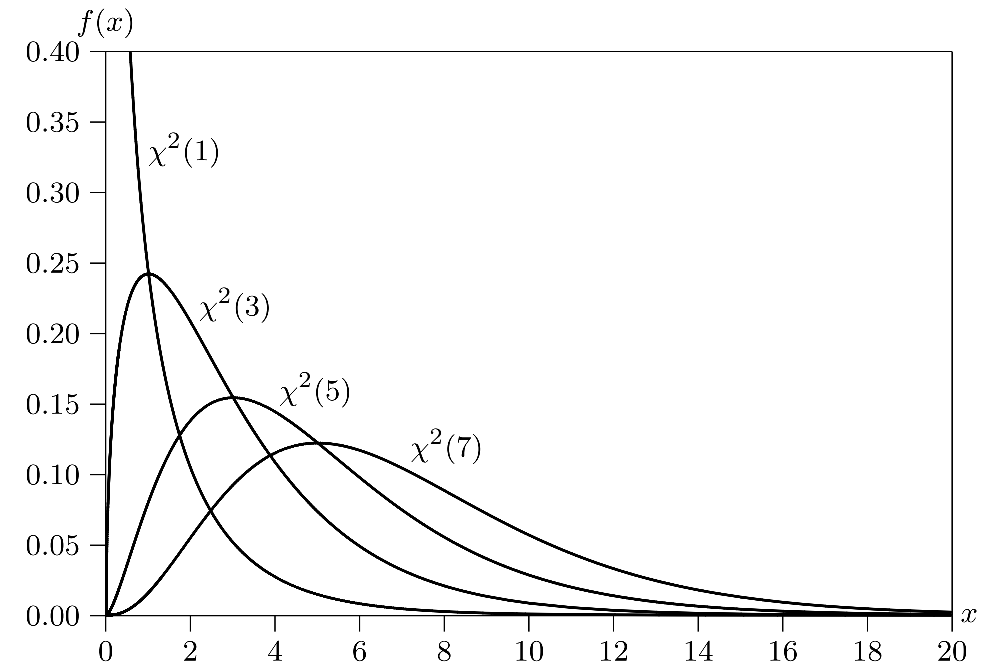


Figure 4.4 Various chi-squared PDFs

服从自由度为 m 的卡方分布（chi-squared distribution with m degrees of freedom），写成 $y \sim \chi^2(m)$。

- $E[y] = \sum_{t=1}^{m} E[z_t^2] = \sum_{t=1}^{m} 1 = m$
- $\mathrm{Var}[y] = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{Var}[z_t^2] = mE[(z_t^2 - 1)^2]$
  $= mE[z_t^4 - 2z_t^2 + 1] = m(3 - 2 + 1) = 2m$
- $y_1 \sim \chi^2(m_1),\ y_2 \sim \chi^2(m_2) \quad \Rightarrow \quad (y_1 + y_2) \sim \chi^2(m_1 + m_2)$

服从卡方分布的随机变量

定理 4.1

1. 如果长度为 m 的随机向量 $\boldsymbol{x} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$，则 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{x} \sim \chi^2(m)$；
2. 如果 $\boldsymbol{P}$ 是投影矩阵且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P}) = r$，$\boldsymbol{z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$ 是长度为 n 的随机向量，则 $\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{P} \boldsymbol{z} \sim \chi^2(r)$。

证明：

1. $\boldsymbol{\Omega}$ 是对称正定矩阵，因此存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ （Section 3.4）。此时考虑 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$：$E[\boldsymbol{z}] = E[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{A}^{-1}E[\boldsymbol{x}] = \mathbf{0}$，且
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\boldsymbol{z}] &= \operatorname{Var}[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}] = E[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^\top)^{-1}] \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top](\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = \boldsymbol{I}_m\end{aligned}$$
因此 $\boldsymbol{z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$。而 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^\top)^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{z}$，所以 $\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{x} \sim \chi^2(m)$。
2. 假设 $\boldsymbol{P}$ 投影到 $n \times r$ 矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的列空间，因此 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^\top$，
$$\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{z}$$
如果令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{z}$，则 $E[\boldsymbol{x}] = \mathbf{0}$, $\operatorname{Var}[\boldsymbol{x}] = E[\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{Z}] = \boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{Z}$，因此 $\boldsymbol{x} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{Z})$。可见 $\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{x} \sim \chi^2(r)$。

Student's *t* 分布

The Student's *t* Distribution

如果 $z \sim N(0,1)$，$y \sim \chi^2(m)$，且 z 和 y 相互独立，则

$$t_m \equiv \frac{z}{\sqrt{\frac{y}{m}}}$$

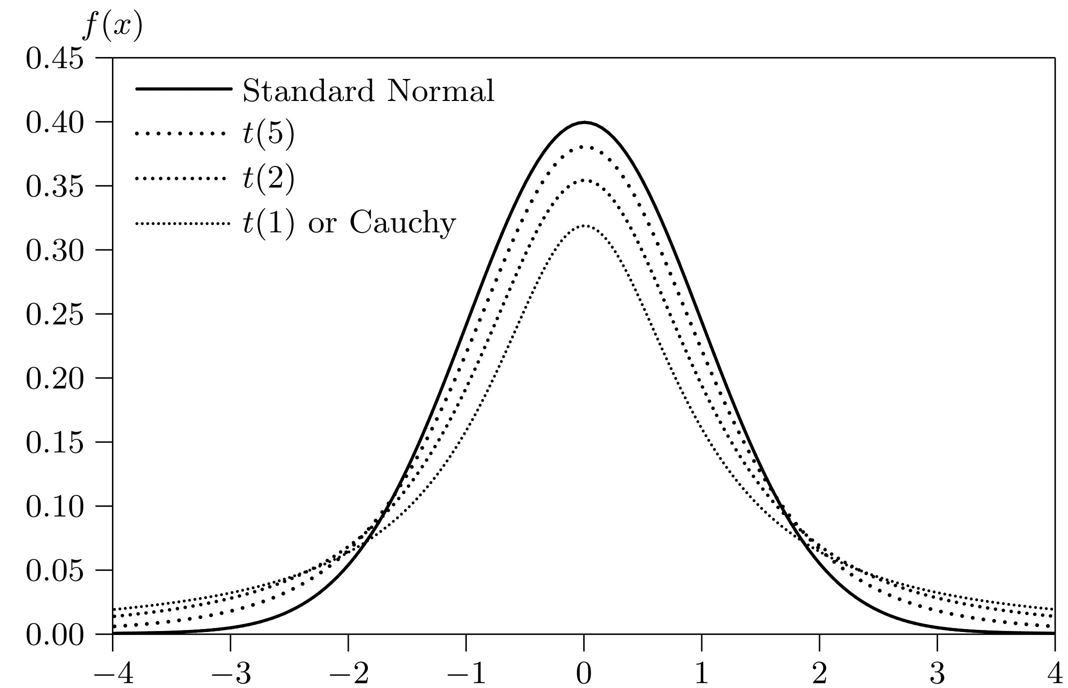


Figure 4.5 PDFs of the Student's t distribution

服从自由度为 m 的 Student's t 分布，写成 $t_m \sim t(m)$。

- 自由度为 m 的 t 分布存在前 $m-1$ 个矩。因此 $t(1)$ 没有矩，$t(2)$ 仅有期望值。
- 若存在，则 $E[t_m]=0$，$\text{Var}[t_m]=m\big/(m-2)$。
- 当 $m \to \infty$ 时，t 分布的方差趋近于 1，分布自身趋近于正态分布。

F 分布

The F Distribution

当 $y_1 \sim \chi^2(m_1)$，$y_2 \sim \chi^2(m_2)$，且 y_1 与 y_2 相互独立时，

$$F_{m_1,m_2} = \frac{y_1 \big/ m_1}{y_2 \big/ m_2}$$

服从自由度为 m_1 和 m_2 的 F 分布，写成 $F_{m_1,m_2} \sim F(m_1, m_2)$。

- $E[F_{m_1,m_2}] = (m_2 - 1)\big/(m_2 - 3)$。
- 当 $m_2 \to \infty$ 时，$m_1 F_{m_1,m_2} \to y_1 \sim \chi^2(m_1)$。
- 由 t 分布的定义可知，当 $x \sim t(m_2)$ 时，$x^2 \sim F(1, m_2)$。

古典正态模型下的精确检验

精确检验与古典正态模型

Exact Tests and the Classical Normal Linear Model

当检验统计量在 H_0 下的分布为已知时，该检验被称为精确检验（exact test）。

假设古典正态线性模型：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 独立于 $\boldsymbol{X}$（$\boldsymbol{X}$ 固定或在 $\boldsymbol{y}$ 之前生成）。

“古典” 一般指 $\boldsymbol{X}$ 为固定变量或 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 独立，在此假设下我们只需要考虑普通的期望值。“正态” 指 $\boldsymbol{u}$ 服从正态分布。只有在针对 $\boldsymbol{\beta}$ 进行假设检验时才需要关于分布的完整信息。

单一约束的检验

Tests for a Single Restriction

首先我们考虑针对单个系数的假设检验。我们可以把系数向量写成 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^\top, \beta_2]^\top$，并针对 $H_0 : \beta_2 = 0$ 进行检验。

这里的 $\beta_2 = 0$ 可以看作系数的线性约束条件，而零假设和备择假设分别是在有约束和没有约束下的回归。

原回归模型可以写成

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{x}_2\beta_2 + \boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$$

$\boldsymbol{X}_1$ 是 $n \times (k-1)$ 矩阵，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $n \times 1$ 向量，$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{x}_2]$。

根据 FWL 定理，$\hat{\beta}_2$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 可以从下面的短模型获得

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2\beta_2 + \boldsymbol{v} \ , \quad \boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{X}_1^\top\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1^\top$$

此时可得 $\quad \hat{\beta}_2 = \dfrac{\boldsymbol{x}_2^\top\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_2^\top\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2}, \qquad \mathrm{Var}[\hat{\beta}_2] = \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_2^\top\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_2}$

单一约束的检验：σ^2 已知

当 σ^2 已知时，我们可以用下面的统计量检验 $H_0 : \beta_2 = 0$

$$z_{\beta_2} \equiv \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{\beta}_2]}} = \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2} \cdot \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}}{\sigma} = \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}}{\sigma \sqrt{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}}$$

当 $H_0 : \beta_2 = 0$ 成立时，$\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}$，因此

$$z_{\beta_2} = \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}}{\sigma \sqrt{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}}$$

z_{β_2} 是 $u_1, \ldots, u_n$ 的线性结合，因此服从正态分布。$E[z_{\beta_2}] = 0$,

$$\mathrm{Var}[z_{\beta_2}] = \frac{E[\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u} \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2]}{\sigma^2 \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2} = \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 E[\boldsymbol{u} \boldsymbol{u}^\top] \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}{\sigma^2 \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2} = \frac{\sigma^2 \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}{\sigma^2 \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2} = 1$$

所以 $z_{\beta_2} \sim N(0,1)$。

单一约束的检验：σ^2 未知

当 σ^2 未知时，我们可以用回归标准误 s 替代 σ。因为 $s^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 = \frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}}{n-k}$，我们可以定义下面的统计量

$$t_{\beta_2} \equiv \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}}{s\sqrt{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}} = \sqrt{\frac{n-k}{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}}} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{x}_2}} = \frac{z_{\beta_2}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}}{(n-k)\sigma^2}}}$$

已知 $z_{\beta_2} \sim N(0,1)$，如果我们能证明 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-k)$，且 z_{β_2} 和 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}/\sigma^2$ 独立，即可得到 $t_{\beta_2} \sim t(n-k)$。

$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-k)$：因为 $\boldsymbol{M}_X$ 是投影到 $\mathcal{S}^\perp(\boldsymbol{X})$ 的投影矩阵，所以

$$\frac{\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}}{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}}{\sigma^2} = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u}/\sigma \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

$\dim(\mathcal{S}^\perp(\boldsymbol{X})) = n-k \;\Rightarrow\; \text{rank}(\boldsymbol{M}_X) = n-k$，因此 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-k)$。

单一约束的检验：σ^2 未知

z_{β_2} 和 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y} \big/ \sigma^2$ 独立：两个变量中随机要素全都来自 $\boldsymbol{u}$。$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y} \big/ \sigma^2$ 只通过 $\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$ 受 $\boldsymbol{u}$ 的影响，而由

$$\boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{P}_X \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_2^\top (\boldsymbol{P}_X - \boldsymbol{P}_X \boldsymbol{P}_1) \boldsymbol{u} \overset{\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_X}{=} \boldsymbol{x}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$$

可知 z_{β_2} 只通过 $\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$ 受 $\boldsymbol{u}$ 的影响。

$\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$ 的期望值都为 $\boldsymbol{0}$，因此它们的协方差是

$$E[\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u} \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{P}_X] = \boldsymbol{M}_X E[\boldsymbol{u} \boldsymbol{u}^\top] \boldsymbol{P}_X = \sigma^2 \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{P}_X \overset{\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{M}_X = \boldsymbol{O}}{=} \boldsymbol{O}$$

因此 $\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$ 不相关。因为 $\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$ 都服从正态分布，所以 $\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$ 独立于 $\boldsymbol{P}_X \boldsymbol{u}$，所以。$\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y} \big/ \sigma^2$ 独立于 z_{β_2}。

综上，我们可得 $t_{\beta_2} \sim t(n-k)$。

多重约束的联合检验

Joint Tests for Multiple Restrictions

当存在 r 个线性约束条件时（$r \leq k$），我们可以将其写成 $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$。此时，在不同的假设下我们可以得到下面的回归模型：

$$H_0 : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$$
$$H_1 : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{u} \ , \quad \boldsymbol{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$$

因为需要检验的参数大于 1，我们不能继续使用 z 检验或 t 检验，而需要找到另一个合适的检验统计量。这里我们用有约束（restricted）回归和无约束（unrestricted）回归的拟合（fit）结果来建立检验统计量，并用两个回归的残差平方和作为拟合的指标。

若将有约束回归的残差平方和写为 RSSR，将无约束回归的写为 USSR，我们可以定义下面的统计量

$$F_{\boldsymbol{\beta}_2} \equiv \frac{(\mathrm{RSSR} - \mathrm{USSR})\big/r}{\mathrm{USSR}\big/(n-k)}$$

如果 H_0 不成立，RSSR 将大于 USSR。
因此当 F_{β_2} 取值很大时，我们倾向于拒绝 H_0。

多重约束的联合检验

Joint Tests for Multiple Restrictions

我们将要证明 $F_{\boldsymbol{\beta}_2} \equiv \dfrac{(\mathrm{RSSR}-\mathrm{USSR})/r}{\mathrm{USSR}/(n-k)}$ 在 H_0 下服从 $F(r, n-k)$。

$\mathrm{RSSR} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}$，$\mathrm{USSR} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y}$。根据 FWL 定理，USSR 等于短模型 $\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{v}$ 的残差平方和

$$\hat{\boldsymbol{v}}^\top \hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2 (\boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2)^{-1} \boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}$$

勾股定理

因此，$\mathrm{RSSR} - \mathrm{USSR} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2 (\boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2)^{-1} \boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y}$。一般情况下 $\boldsymbol{M}_X \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{u}$，在 H_0 成立时 $\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{u}$，则

$$F_{\boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2 (\boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2)^{-1} \boldsymbol{X}_2^\top \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{\varepsilon} \big/ r}{\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{\varepsilon} \big/ (n-k)}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u}/\sigma \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_2) = r$

已知 $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{M}_X \boldsymbol{\varepsilon} \sim \chi^2(n-k)$，而分子可以写成 $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2} \boldsymbol{\varepsilon}$ 并服从 $\chi^2(r)$。又因为 $\boldsymbol{M}_X$ 和 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_2}$ 正交，加上 $\boldsymbol{u}$ 服从正态分布可得分子与分母相互独立。因此 $F_{\boldsymbol{\beta}_2} \sim F(r, n-k)$。