

# 高级计量经济学

## Lecture 4: Frisch-Waugh-Lovell Theorem

黄嘉平

工学博士 经济学博士  
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

办公室	粤海校区汇文楼1510
E-mail	huangjp@szu.edu.cn
Website	<a href="https://huangjp.com">https://huangjp.com</a>

# 分块回归

# 分块回归

## Partitioned Regression

我们可以将解释变量分为两组，即

$$X = [X_1 \quad X_2],$$

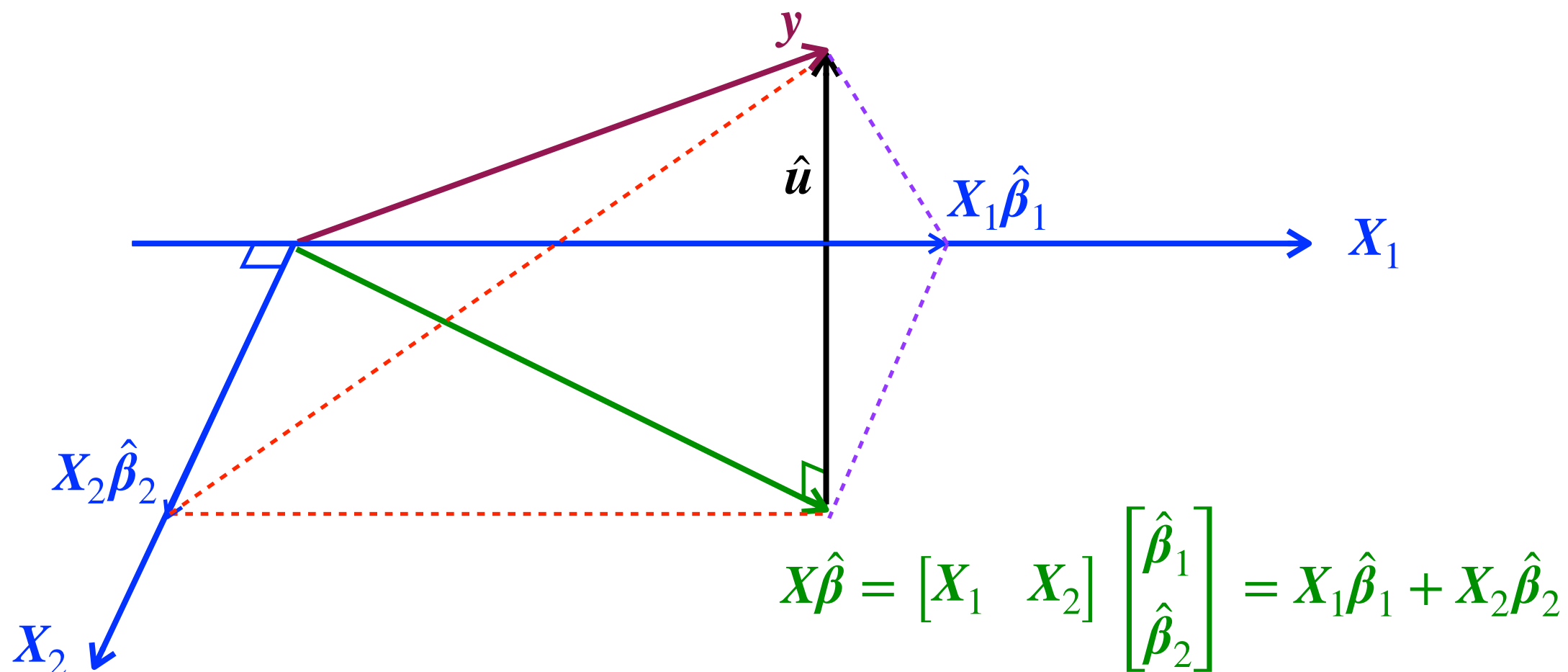
其中  $X_1$  为  $n \times k_1$ ， $X_2$  为  $n \times k_2$ ， $k_1 + k_2 = k$ 。回归模型可以写成

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

接下来我们首先假设  $X_1$  中的所有变量与  $X_2$  中的所有变量正交，然后再放松这个假设。

若  $X_1$  中的变量与  $X_2$  中的变量正交，则  $X_1^\top X_2 = \mathbf{0}$ 。

# 当 $X_1$ 与 $X_2$ 正交



用  $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$  拟合的  $\hat{\beta}_1$  和  $\hat{\beta}_2$  分别等于  
用  $y = X_1\beta_1 + u_1$  和  $y = X_2\beta_2 + u_2$  拟合的参数值。

如果  $X_1$  和  $X_2$  正交，在研究其中之一时可以不控制另一组变量。

# 正交向量与样本的 Pearson 相关系数

$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$  和  $r_{xy} = 0$  是经常容易混淆的两个概念。

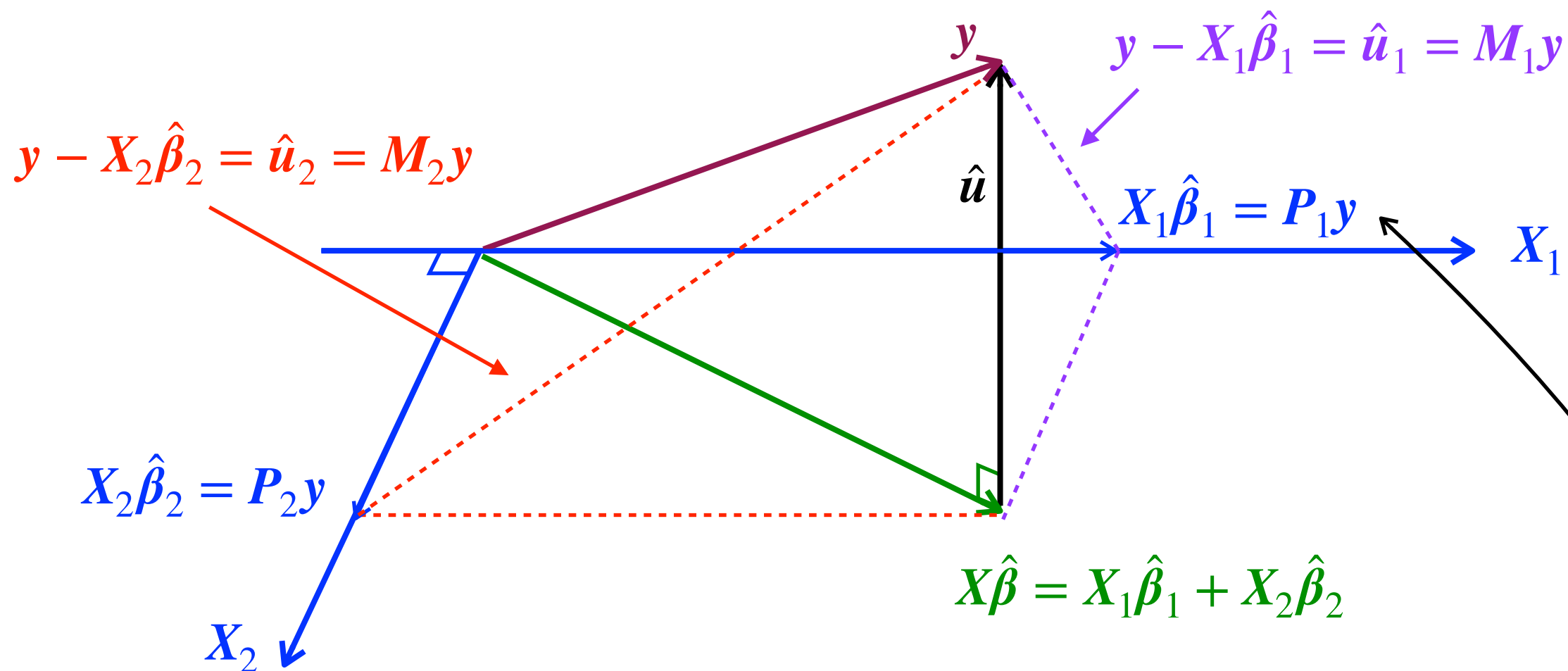
样本相关系数  $r_{xy}$  的定义是

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

可见，只有在  $\bar{x}\bar{y} = 0$  时， $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow r_{xy} = 0$ 。

若将变量进行中心化处理，即  $x_i - \bar{x}$ ，则处理后的样本均值为零，此时**正交**等同于**不相关**。（相同结论在总体层面也成立）

# $y$ 在 $\mathcal{S}(X_1)$ 和 $\mathcal{S}(X_2)$ 上的投影



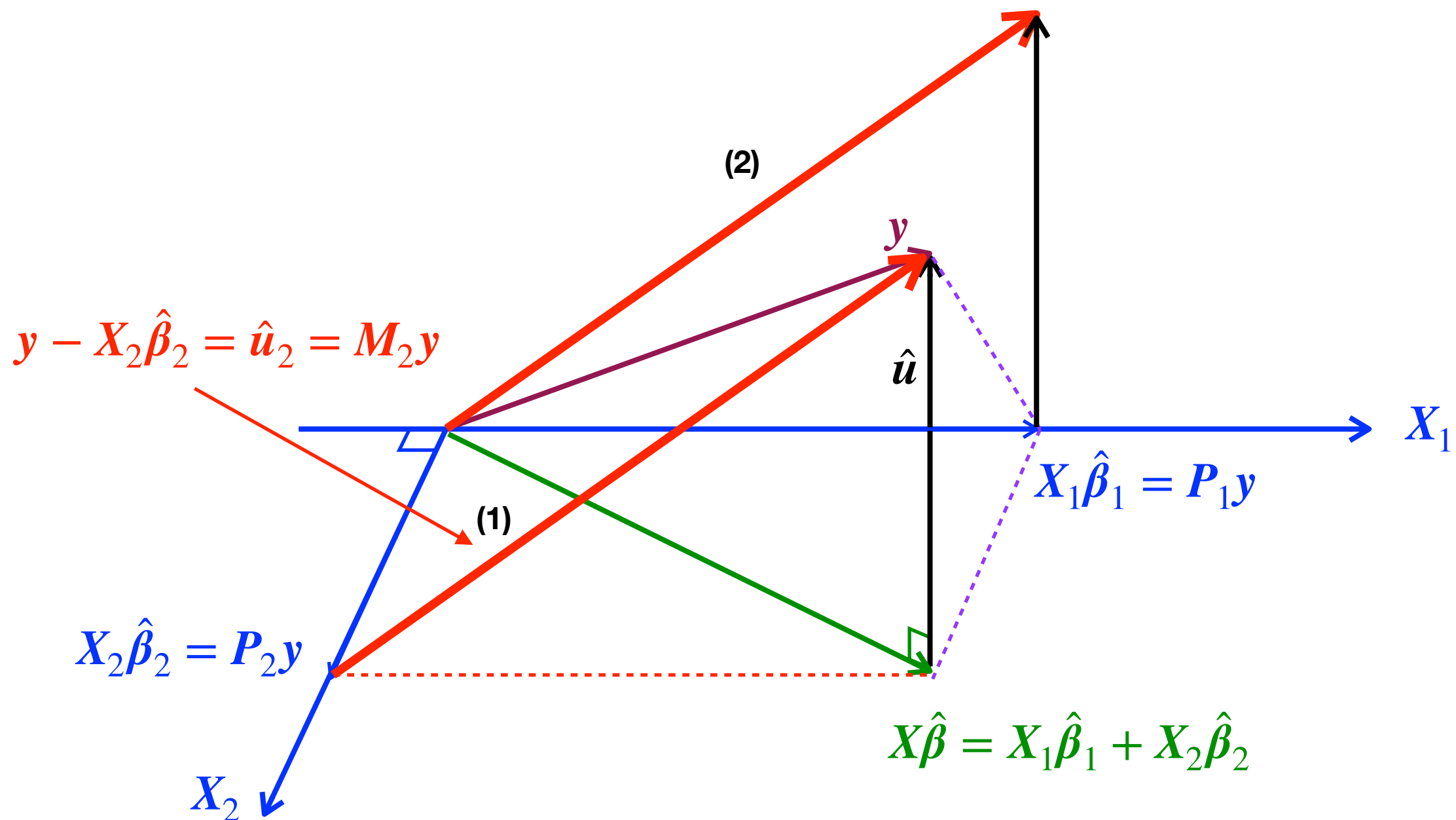
$$\text{令 } P_1 \equiv P_{X_1} = X_1(X_1^\top X_1)^{-1}X_1^\top$$

$$\begin{aligned} P_X P_1 &= P_X X_1 (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top \\ &\rightarrow = X_1 (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top = P_1 \end{aligned}$$

因为  $X_1$  的所有列都包含在  $\mathcal{S}(X)$  中

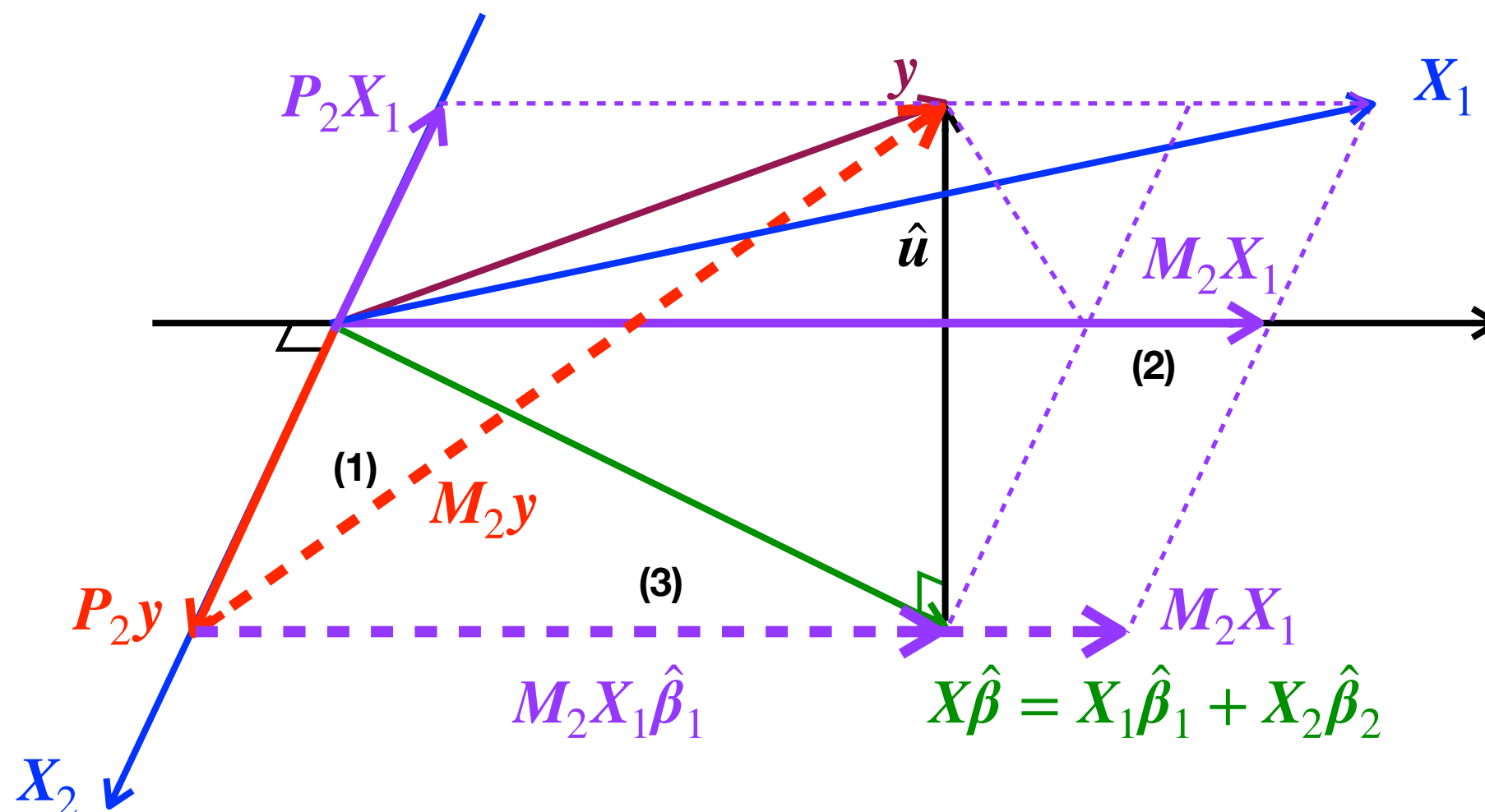
$$\begin{aligned} P_1 y &= P_1 P_X y = P_1 (X_1 \hat{\beta}_1 + X_2 \hat{\beta}_2) \\ &\Rightarrow \rightarrow = P_1 X_1 \hat{\beta}_1 = X_1 \hat{\beta}_1 \end{aligned}$$

$X_1$  与  $X_2$  正交



- (1) 拟合  $y = X_2\beta_2 + u_2$  并得到残差  $M_2y$ 。
- (2) 用  $X_1$  对  $M_2y$  进行回归，则得到的参数为  $\hat{\beta}_1$ ，残差为  $\hat{u}$ ，与  $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$  的拟合结果一致。

# 当 $X_1$ 与 $X_2$ 非正交



- (1) 用  $X_2$  对  $y$  进行回归并得到残差  $M_2y$ 。
- (2) 用  $X_2$  对  $X_1$  的每一列进行回归并得到残差  $M_2X_1$ 。
- (3) 用  $M_2X_1$  对  $M_2y$  进行回归，则得到的参数为  $\hat{\beta}_1$ ，残差为  $\hat{u}$ ，与  $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$  的拟合结果一致。



# The Frisch-Waugh-Lovell Theorem

# The Frisch-Waugh-Lovell Theorem

考虑下面三个回归模型：

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \quad (1)$$

$$M_2y = M_2X_1b_1 + v \quad (2)$$

$$y = M_2X_1d_1 + w \quad (3)$$

1. 关于  $X_1$  的系数，模型 (1-3) 的 OLS 估计值相同，即  $\hat{\beta}_1 = \hat{b}_1 = \hat{d}_1$ 。
  2. 模型 (1) 和 (2) 的 OLS 残差相同，和模型 (3) 的残差不同，即  $\hat{u} = \hat{v} \neq \hat{w}$ 。
- 我们通常称 (1) 为长模型，(2) 和 (3) 为短模型。
  - 短模型的作用可以理解为：虽然在长模型中  $X_1$  与  $X_2$  非正交，但我们可以想办法找到两个正交矩阵，那就是  $M_2X_1$  和  $X_2$ 。同时， $\mathcal{S}(X_1, X_2) = \mathcal{S}(M_2X_1, X_2)$ 。因此用  $(X_1, X_2)$  回归  $y$  得到的参数等同于用  $(M_2X_1, X_2)$  回归  $y$  或  $M_2y$  得到的参数，而后者可以不控制  $X_2$ 。
  - 如果样本量很大，则长模型的 OLS 拟合需要用更长的时间和更多的资源去计算  $(X^\top X)^{-1}$ 。短模型则可以节省时间和资源。Frisch & Waugh 在 1933 年率先发现了这个结论，当时还没有电子计算机。

# FWL 定理的证明

## $X_1$ 和 $X_2$ 正交

根据标准方程  $X^\top X \hat{\beta} = X^\top y$ ，由模型  $y = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + u$  可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1^\top \\ X_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1^\top \\ X_2^\top \end{bmatrix} y \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1^\top X_1 & X_1^\top X_2 \\ X_2^\top X_1 & X_2^\top X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1^\top y \\ X_2^\top y \end{bmatrix} \quad \text{--- (#)} \end{aligned}$$

若  $X_1^\top X_2 = \mathbf{O}$ ，则  $X_2^\top X_1 = \mathbf{O}$ 。此时 (#) 可写成

$$\begin{bmatrix} X_1^\top X_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X_2^\top X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^\top y \\ X_2^\top y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top y \\ (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top y \end{bmatrix}$$

因此，当  $X_1$  和  $X_2$  正交时，回归系数  $\hat{\beta}_1$  和  $\hat{\beta}_2$  可以分别由两个短模型  $y = X_1 \beta_1 + u_1$  和  $y = X_2 \beta_2 + u_2$  获得。

# FWL 定理的证明

## 系数的 OLS 估计值相同

一般情况下, 由 (#) 可得

$$X_1^\top X_1 \hat{\beta}_1 + X_1^\top X_2 \hat{\beta}_2 = X_1^\top y \quad \dots\dots (a)$$

$$X_2^\top X_1 \hat{\beta}_1 + X_2^\top X_2 \hat{\beta}_2 = X_2^\top y \quad \dots\dots (b)$$

由 (b) 可得  $\hat{\beta}_2 = (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top (y - X_1 \hat{\beta}_1)$ 。将此式代入 (a) 可得

$$X_1^\top X_1 \hat{\beta}_1 + X_1^\top X_2 (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top (y - X_1 \hat{\beta}_1) = X_1^\top y$$

$$(X_1^\top X_1 - X_1^\top X_2 (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top X_1) \hat{\beta}_1 = (X_1^\top - X_1^\top X_2 (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top) y$$

$$X_1^\top (I - X_2 (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top) X_1 \hat{\beta}_1 = X_1^\top (I - X_2 (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top) y$$

$$X_1^\top M_2 X_1 \hat{\beta}_1 = X_1^\top M_2 y$$

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^\top M_2 X_1)^{-1} X_1^\top M_2 y$$

$$\Rightarrow = (X_1^\top M_2^\top M_2 X_1)^{-1} X_1^\top M_2^\top M_2 y \quad \leftarrow M_2 \text{ 对称且幂等}$$

$$= [(M_2 X_1)^\top M_2 X_1]^{-1} (M_2 X_1)^\top M_2 y = [(M_2 X_1)^\top M_2 X_1]^{-1} (M_2 X_1)^\top y$$

模型 (2) 的 OLS 估计  $\hat{b}_1$

模型 (3) 的 OLS 估计  $\hat{d}_1$

# FWL 定理的证明

## OLS 残差相同

模型 (1) 的 OLS 残差是

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = y - X_1\hat{\beta}_1 - X_2\hat{\beta}_2$$

针对最左侧和最右侧的表达式，分别从左边乘以  $M_2$  可得

$$M_2\hat{u} = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1 - M_2X_2\hat{\beta}_2 \quad \leftarrow$$

$$\curvearrowright \hat{u} = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1 \quad M_2X_2 = 0$$

$$\hat{u} \in \mathcal{S}^\perp(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp(X_2)$$

模型 (2) 和 (3) 的残差分别为

$$\hat{v} = M_2y - M_2X_1\hat{b}_1 = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1$$

$$\hat{w} = y - M_2X_1\hat{d}_1 = y - M_2X_1\hat{\beta}_1$$

因此，一般情况下  $\hat{u} = \hat{v} \neq \hat{w}$ ，仅当  $y \in \mathcal{S}^\perp(X_2)$  时  $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w}$ 。

# 如何理解 FWL 定理

- 以模型 (1) 和 (3) 为例：

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \quad (1)$$

$$y = M_2X_1d_1 + w \quad (3)$$

- 如果我们的主要研究对象是  $X_1$ ，则模型 (1) 中的  $X_2$  有可能和  $X_1$  存在相关性。
- 模型 (3) 中的  $M_2X_1$  是用  $X_2$  解释了  $X_1$  后剩下的部分，即  $X_1$  中无法被  $X_2$  解释的变化。此时的 OLS 估计量  $\hat{d}_1$  就是  $X_1$  自身的变动部分对  $y$  的变动的的影响，与  $X_2$  无关。
- 因此，为了准确估计 (3) 中的  $\hat{d}_1$ ，我们可以直接估计长模型 (1) 中的系数。也就是所谓的控制了  $X_2$  中的变量。

# FWL 定理的应用

## 中心化 (deviation from the mean, or centering)

这里考虑单变量回归模型

$$y = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{x} + u$$

$\mathbf{x}$  和  $\mathbf{1}$  非正交，但是如果对  $\mathbf{x}$  进行中心化，即定义  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}$ ，则  $\mathbf{z}$  和  $\mathbf{1}$  正交：

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{z} = \mathbf{1}^\top (\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}) = \mathbf{1}^\top \mathbf{x} - \mathbf{1}^\top \bar{x}\mathbf{1} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

又因  $M_{\mathbf{1}} = \mathbf{I} - \mathbf{1}(\mathbf{1}^\top \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^\top = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ ,

$$M_{\mathbf{1}} \mathbf{x} = \mathbf{I} \mathbf{x} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1} = \mathbf{z}$$

可知  $\mathbf{x}$  的中心化可以通过用  $\mathbf{1}$  回归  $\mathbf{x}$  的 OLS 残差获得。因此，根据 FWL 定理，

$$y = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{x} + u \quad \text{和} \quad M_{\mathbf{1}} \mathbf{y} = M_{\mathbf{1}} \mathbf{x} b + \mathbf{v} \quad (\text{对 } \mathbf{x} \text{ 和 } \mathbf{y} \text{ 分别进行了中心化处理})$$

中  $\mathbf{x}$  系数的 OLS 估计值相同，残差相同，即  $\hat{\beta}_2 = \hat{b}$ ， $\hat{u} = \hat{v}$ 。

# FWL 定理的应用

## Adjusting seasonality

时间序列数据的季节性特征一般可以通过加入季节虚拟变量（seasonal dummy）来实现，下面是一个具体模型：

$$y = \delta_1 s_1 + \delta_2 s_2 + \delta_3 s_3 + \delta_4 s_4 + X\beta + u = S\delta + X\beta + u,$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

令  $M_S = I - S(S^T S)^{-1} S^T$ ，则根据 FWL 定理，可以通过以下模型

$$M_S y = M_S X b + v$$

获得相同的系数估计值和残差。这种先将数据用  $M_S$  进行投影（用季节虚拟变量进行回归）的操作叫做季节性调整（seasonal adjustment）。FWL 定理告诉我们，进行季节性调整和加入季节虚拟变量的效果是一样的。



# 一些有用的公式和性质

- 模型  $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$  的 OLS 估计可以表达为

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^\top M_2 X_1)^{-1} X_1^\top M_2 y$$

$$\hat{\beta}_2 = (X_2^\top M_1 X_2)^{-1} X_2^\top M_1 y$$

- 若  $\iota$  是解释变量之一，或  $\iota \in \mathcal{S}(X)$ ，则 OLS 残差  $\hat{u}$  与  $\iota$  正交，因此残差的均值为零

$$\bar{\hat{u}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t = \frac{1}{n} \iota^\top \hat{u} = 0$$

- OLS 残差  $\hat{u}$  与每个解释变量  $x_i$  正交，加上  $\bar{\hat{u}} = 0$ ，可知  $\hat{u}$  与每个  $x_i$  的相关系数都为零

$$r_{x_i, \hat{u}} = \frac{x_i^\top \hat{u} - n \bar{x}_i \bar{\hat{u}}}{\sqrt{\sum_t (x_{ti} - \bar{x}_i)^2 \sum_t (u_t - \bar{\hat{u}})^2}} = 0$$

# 课外阅读

- Frisch, R. and Waugh, F. V. (1933).  
**Partial Time Regressions as Compared with Individual Trends.**  
*Econometrica*, 1:4, 387-410.  
<https://www.jstor.org/stable/1907330>
- Lovell, M. C. (1963).  
**Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis.**  
*Journal of the American Statistical Association*, 58:304, 993-1010.  
<https://www.jstor.org/stable/2283327>