框(Frame of discernment)。设Ω的元素个数为N，则Ω的幂集合2^Ω的元素个数为2^N，每个集合的元素对应于一个关于x取值情况的命题(子集)。

定义1：对任一个属于Ω的子集A(命题)，命它对应一个数m∈[0，1]，而且满足：

$$m(\phi)=0$$
$$\sum_{A\subseteq\Omega} m(A)=1$$

称函数m为2^Ω上的基本概率分配函数bpa(Basic probability assignment)，称m(A)为A的基概率数。m(A)的意义为

· 若A⊂Ω且A≠Ω，则m(A)表示对A的精确信任程度。

· 若A=Ω，则m(A)表示这个数不知如何分配。

定义2：若A⊆Ω 且m(A)≠0，称A为m的一个焦元(Focal element)。

例如，设Ω={红，黄，白}，2^Ω上的基本概率分配函数m为

$$m(\{红\},\{黄\},\{白\},\{红,黄\},\{红,白\},\{黄,白\},\{红,黄,白\},\{\ \})=(0.3,\ 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.2,\ 0,\ 0.2,\ 0)$$

中，

m({红})=0.3表示对命题{红}的精确信任程度。

m({红，黄，白})=0.2表示不知道这0.2如何分配。

值得注意的是

$$m(\{红\})+m(\{黄\})+m(\{白\})=0.3+0+0.1=0.4<1$$

此m不是概率，因为概率函数P要求

$$P(红)+P(黄)+P(白)=1$$

定义3：命题的信任函数(Belief function)Bel：$2^\Omega\to[0,1]$为

$$Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B) \qquad \forall A\subseteq\Omega$$

Bel(A)表示对A的总的信任。如在上例中

$$Bel(\{红\},\{白\})=m(\{红\})+m(\{白\})+m(\{红,白\})=0.3+0.1+0.2=0.6$$

据定义可以看出

$$Bel(\phi)=0$$
$$Bel(\Omega)=1$$

定义4：命题的似然函数(plausibility functiom)pl：$2^\Omega\to[0,1]$为

$$Pl(A)=1-Bel(\overline{A})=\sum_{B\cap A\neq\phi} m(B) \qquad \forall A\subseteq\Omega$$

其中$\overline{A}=\Omega-A$。Pl(A)表示不否定A的信任程度。

信任函数与似然函数的关系：

$$Pl(A)\geqslant Bel(A)$$

证明：因为

$$Bel(A)+Bel(\overline{A})=\sum_{B\subseteq A} m(B)+\sum_{D\subseteq\overline{A}} m(D)\leqslant\sum_{E\subseteq\Omega} m(E)=1$$

所以

$$Pl(A)-Bel(A)=1-Bel(\overline{A})-Bel(A)=1-[Bel(\overline{A})+Bel(A)]\geqslant 0$$

证毕。

Bel(A)和Pl(A)分别为命题A的下限函数和上限函数，记作A[Bel(A), Pl(A)]。如在上例中

$$Bel(\{红\})=m(\{红\})+m(\{\ \})=0.3+0=0.3$$
$$\begin{aligned}Pl(\{红\})&=1-Bel(\{\overline{红}\})\\&=1-Bel(\{黄,白\})\\&=1-[m(\{黄\})+m(\{白\})+m(\{黄,白\})]\\&=1-(0+0.1+0)\\&=0.9\end{aligned}$$

所以 {红}[0.3, 0.9]。同理可得

{黄}[0, 0.4]　　{白}[0.1, 0.5]

{红，黄}[0.5, 0.9]　　{红，白}[0.6, 1]

{黄，白}[0.1, 0.7]　　{红，黄，白}[1, 1]

{ }[0, 0]

命题的上限和下限反映了命题的许多重要信息。下面列举一些典型值的含义。

A[0, 1]：说明对A一无所知。这是因为Bel(A)=0，说明对A缺少信任。因为$Pl(A)=1-Bel(\overline{A})=1$，从而$Bel(\overline{A})=0$，说明对$\overline{A}$也缺少信任。

A[0, 0]：说明A为假。这是因为Bel(A)=0且$Bel(\overline{A})=1$

A[1, 1]：说明A为真。这是因为Bel(A)=1且$Bel(\overline{A})=0$。

A[0.6, 1]：说明对A部分信任。这是因为Bel(A)=0.6，且$Bel(\overline{A})=0$

A[0, 0.4]：说明对$\overline{A}$部分信任。这是因为Bel(A)=0，且$Bel(\overline{A})=0.6$。

A[0.3, 0.9]：说明同时对A和$\overline{A}$部分信任。

2. 证据的组合

对于同样的证据，由于来源不同，会得到不同的概率分配函数。Dempster提出用正交和来组合这些函数。

定义5：设$m_1, m_2, \cdots, m_n$为2^Ω上的n个基本概率分配函数，它们的正交和$m=m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n$为

$$\begin{cases}m(\phi)=0\\ m(A)=k\cdot\sum\limits_{\cap A_i=A}\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_i(A_i), & A\neq\phi\end{cases}$$

其中

$$k^{-1}=1-\sum_{\cap A_i=\phi}\prod_{1\leqslant i\leqslant n} m_i(A_i)$$