随机需求的单商品存贮问题

每个月，仓库经理都会清点某种商品的当前库存量，从而决定是否要从供应商那里进货，进货的话要进多少。在此过程中，他需要权衡该商品库存带来的成本，和不能满足消费者对该商品的需求所带来的损失。他的目标就是最大化各月所得收益和的期望值。我们设商品的需求量是一个已知概率分布的随机变量，且积压订单是不允许的，故库存量不会为负数

s_t：第t个月月初库存量，它是状态变量；

a_t：第t个月订货量，它是决策变量；

D_t：第t个月的随机需求量，假定该需求满足一个时间齐次的分布$p_j = p(D_t = j), j = 0,1,2,\cdots$

由状态转移方程 $s_{t+1} = \max\{s_t + a_t - D_t, 0\} \equiv [s_t + a_t - D_t]^+$

每个月月初作出是否订货和订货数量的决策，并假定定货可以及时送到；

对商品的需求贯穿整个月，但是在该月的最后一天所有订单必须得到满足；

如果顾客对某商品的需求超过该商品的库存量（即顾客需求得不到满足），顾客可以到别处去购买他所需的商品。因此不会有因供货不足而造成订单积压；

收益和成本，以及需求分布不会按月改变；

产品售出量都是整数；

仓库容量为M个单位。

决策阶段： $t = 1,2,\cdots,T$；

状态空间： $S = \{0,1,2,\cdots,s\}$；

决策集合： $A\ (i) = \{0,1,2,\cdots,s-i\}, i \in S$，令 $A = \bigcup_{i\in S} A\ (i)$；

转移概率：

$$p_t(j|i,a) = \begin{cases} 0, M \ge j > i+a \\ p_{i+a-j}, M \ge i+a \ge j > 0 \\ q_{i+a}, M \ge i+a, j = 0 \end{cases}$$

期望报酬： $r_t(i,a) = F(i+a) - O(a) - h(i+a), t = 1,2,\cdots,T-1$

$r_T(i) = g(i), t = T$

其中 $O(u)$：当前月订购u个单位商品的成本 ；

$h(u)$：月库存量为u个单位时库存成本；

$g(u)$：有限阶问题中最后一个决策阶段的剩余库存价值；

$f(u)$：需求为u个单位时的收入；

$$F(u) = \sum_{j=0}^{u-1} f(j)p_j + f(u)q_u \qquad q_u = \sum_{j=u}^{\infty} p_j$$