深圳大学
数学科学学院

矩阵理论讲义

黄松

November 6, 2023

自立 自律 自强

目录

范数理论
范数

范数理论

向量范数

定义 (4.1)

若对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 都有一个实数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 与之对应，且满足：

① 正定性：当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x}\| > 0$; 当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x}\| = 0$;

② 齐次性：$\forall k \in \mathbf{C}, \|k\boldsymbol{x}\| = |k| \, \|\boldsymbol{x}\|$;

③ 三角不等式:$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$，都有 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$;

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的向量范数，定义了范数的线性空间称为附范数线性空间.

上述 ①, ②, ③ 称为向量范数三公理.

由向量范数的定义可得范数的性质如下:

性质

- $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$;

由向量范数的定义可得范数的性质如下：

性质

- $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$;
- $|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.2)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}x_k}=\sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *2*-范数.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.2)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}x_k}=\sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *2*-范数.

$\|\boldsymbol{x}\|_2$ 也叫 Euclid 范数，就是通常意义下的向量的长度

向量的 2-范数有如下重要的性质

性质

对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 和任意的酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 有

$$\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^H(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|_2$$

这一性质称为向量 2-范数的酉不变性.

例 (4.3)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\underset{k}{max}|x_k|$$

例 (4.3)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\underset{k}{max}|x_k|$$

证

①, ② 的正定性，齐次性显然.

以下证 ③ 三角不等式:

设 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbf{C}^n$，有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty=\underset{k}{max}|x_k|+\underset{k}{max}|y_k|=\|\boldsymbol{x}\|_\infty+\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

故 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一种向量范数.

引理 1 (Young 不等式)

对任意实数 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$, 都有

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

其中 $p > 1, q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,$p$,$q$ 称为共轭指数.

定理 (Hölder 不等式)

对任意 $x_k, y_k \in \mathbf{C}, k = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中，$p > 1, q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

定理 (Hölder 不等式)

对任意 $x_k, y_k \in \mathbf{C}, k = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中，$p > 1, q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 当 $p = q = 2$，就是有名的 *Cauchy-Schwarz* 不等式.

定理 (Minkowski 不等式)

对任何 $p \geq 1$，有

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

定理 (Minkowski 不等式)

对任何 $p \geq 1$，有

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

例 (4.4)

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种向量范数.

对于 $\|\boldsymbol{x}\|_p$,$p=1$ 即为向量的 1-范数，$p=2$ 即为向量的 2-范数,$p=+\infty$ 是否为 ∞-范数呢，有如下定理.

定理 (4.3)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，则

$$\lim_{p\to+\infty}\|\boldsymbol{x}\|_p=\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

定理 (4.4)

设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$, $\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的一种向量范数，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数.

定理 (4.4)

设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$, $\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的一种向量范数，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数.

由此可见，由一个已知的向量范数可构造出无穷多的新的向量范数.

例 (4.5)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 *Hermite* 正定矩阵，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是一种向量范数.

例 (4.5)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 *Hermite* 正定矩阵，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是一种向量范数.

证：因为 A 是 Hermit 正定矩阵，故存在 n 阶非奇异矩阵 Q，使 $A = Q^H Q$, 于是

$$\| x \|_A = \sqrt{x^{\mathrm{H}} Q^{\mathrm{H}} Q x} = \sqrt{(Qx)^{\mathrm{H}}(Qx)} = \| Qx \|_2$$

例 (4.6)

设 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_n}$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 的一组基.$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 可唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon_k}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$. 又设 $\|\bullet\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，定义

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_v = \|\boldsymbol{x}\|$$

则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\nu$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 上的向量范数.

例 (4.7)

设 $f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$ 定义

$$\|f(t)\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$

$$\|f(t)\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f(t)\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$$

则它们都是 $\mathbf{C}[a,b]$ 上的向量范数.

范数理论
向量范数

积分形式的 Hölder 不等式 (其中 p,q 为共轭指数)

$$\int_a^b |\, f(t)\, g(t)\,|\, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |\, f(t)\,|^p\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\, g(t)\,|^q\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

Minkowski 不等式

$$\int_a^b \left(f(t)+g(t)\,|^{\,p} \right) |^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \left| f(t) \right|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left| g(t) \right|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geqslant 1$$

例 (4.8)

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$, 定义

$$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p)^{\frac{1}{p}} \quad 0 < p < 1$$

由于它不满足定义 *4.1* 中的 ③, 故它不是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数。

例如在 $\mathbf{R}^n$ 中, $x = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, y = (0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, p = \frac{1}{2}$, 则

$$\| x + y \|_{\frac{1}{2}} = 4, \| x \|_{\frac{1}{2}} = 1, \| y \|_{\frac{1}{2}} = 1$$

故 $\| x \|_{\frac{1}{2}}$ 不是 $\mathbf{R}^n$ 上的向量范数。

定义 (4.2)

设 $\|\bullet\|_a$ 和 $\|\bullet\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的两种向量范数，如果存在正数 c_1, c_2，使对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 都有

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_b \leq \|\boldsymbol{x}_a\| \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_b$$

则称向量范数 $\|\bullet\|_a$ 与 $\|\bullet\|_b$ 等价.

定理 (4.5)

设 $\|\bullet\|$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任一向量范数，$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_n}$ 为 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 的一组基.$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 可唯一表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon_k}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{F}^n$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数.

定理 (4.5)

设 $\|\bullet\|$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任一向量范数，$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_n}$ 为 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 的一组基.$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 可唯一表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon_k}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{F}^n$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数.

定理 (4.6)

n 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任意两个向量范数都是等价的.

定义 (4.3)

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量序列，其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_i^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$，若 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是收敛的，并说 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的极限为向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)^T$，记为

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$$

向量序列不收敛时称为发散的.

与数列收敛相类似，很容易证明向量序列的收敛性具有以下性质：

性质

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\},\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个向量序列,λ,μ 是两个复常数,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且

$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}=\boldsymbol{x}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}=\boldsymbol{y}$，则：

① $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda\boldsymbol{x}^{(k)}+\mu\boldsymbol{y}^{(k)})=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}$;

② $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

与数列收敛相类似，很容易证明向量序列的收敛性具有以下性质：

性质

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\},\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个向量序列,λ,μ 是两个复常数,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且

$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}=\boldsymbol{x}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}=\boldsymbol{y}$，则：

① $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda\boldsymbol{x}^{(k)}+\mu\boldsymbol{y}^{(k)})=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}$;

② $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

定理 (4.7)

$\mathbf{C}^n$ 中向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$ 的充分必要条件是，对于 $\mathbf{C}^n$ 上任一向量范数 $\|\bullet\|$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|=0$$

目录

在许多场合需要度量矩阵的“大小”，比如矩阵序列的收敛、解线性方程组时的误差分析。一个自然的想法就是将矩阵“拉直”，将其视作一个 mxn 维的向量。
若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 则可将 A 看作 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 的向量，可以按照向量范数三公理来定义它的向量范数

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_p} = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{p}} \quad 1 < p < +\infty$$

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_\infty} = \max_{i,j} | a_{ij} |$$

定义 (4.4)

若 $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都有一个实数 $\| A \|$ 与之对应，且满足:

$$\text{正定性: 当} A \neq \boldsymbol{O}, \| A \| > 0; \text{当} A = \boldsymbol{O}\text{时}, \| A \| = 0;$$

$$\text{齐次性: } \forall k \in \mathbf{C}, \| k\mathbf{A} \| = | k | \| \mathbf{A} \|;$$

$$\text{三角不等式:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|;$$

$$\text{相容性:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| AB \| \leqslant \| A \| \| B \| .$$

则称 $\|A\|$ 为 $C^{n\times n}$ 上矩阵 A 的矩阵范数.

定义 (4.4)

若 $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都有一个实数 $\| A \|$ 与之对应，且满足:

$$\text{正定性: 当} A \neq \boldsymbol{O}, \| A \| > 0; \text{当} A = \boldsymbol{O}\text{时}, \| A \| = 0;$$

$$\text{齐次性: } \forall k \in \mathbf{C}, \| k\mathbf{A} \| = | k | \| \mathbf{A} \|;$$

$$\text{三角不等式:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| A + B \| \leqslant \|A \| + \|B \|;$$

$$\text{相容性:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| AB \| \leqslant \|A \| \|B \| .$$

则称 $\|A\|$ 为 $C^{n\times n}$ 上矩阵 A 的矩阵范数.

性质 1 $\quad \| -A \| = \| A \| .$

性质 2 $\quad | \|A\| - \|B\| | \leqslant \|A - B\|.$

例 (4.9)

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 定义

$$\| A \|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}| a_{ij} |$$

则 $\| A \|_{m_1}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，称为矩阵的 m_1- 范数。

例 (4.10)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$\| A \|_F=\| A \|_{m_2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\operatorname{tr}(A^HA)}$$

则 $\| A \|_F$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$，上的一种矩阵范数，称为矩阵的 ***Frobenius*** 范数，简称 $F-$ 范数。

定理 (4.8)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), \boldsymbol{\alpha}_j \in \mathbf{C}^n, j = 1, 2, \cdots, n$, 则:

① $\| A \|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \| \alpha_j \|_2^2$;

② $\| \mathbf{A} \|_F^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})$; 其中$\lambda_i(A\ A)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示$A\ A$ 的第 i 个特征值.

③对任意的n阶酉阵U, V有 $\| UA \|_F = \| AV \|_F = \| UAV \|_F = \| U^H AV \|_F = \| A \|_F$.称之为 F- 范数的酉不变性.

例 (4.11)

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$\| A \|_{m_\infty} = n\max_{i,j} | a_{ij} |$$

则 $\| \mathbf{A} \|_{m_\infty}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，称为矩阵的 $m_\infty-$ 范数。

定理 (4.9)

$\| \cdot \|_m$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则：

① $\| \mathbf{A} \|$ 是a_{ij} 的连续函数, $i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n;$

①$\mathbf{C}^{n\times n}$ 上任意两个矩阵范数等价.

定义 (4.12)

设 $\|\cdot\|_m$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$\|\cdot\|_v$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的向量范数，若 $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $\forall x\in\mathbb{C}^n$ 都有

$$\| Ax \|_v \leqslant \| A \|_m \| x \|_v$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_m$ 与向量范数 $\|\cdot\|_v$ 是相容的。

例 (4.12)

求证 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵 m_1- 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上向量的 *1*-范数相容。

例 (4.13)

求证 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的矩阵 $F-$ 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上向量的 *2*-范数相容。

例 (4.14)

求证 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上矩阵的 $m_\infty-$ 范数与 $\mathbb{C}^n$ 上向量的 $\infty-$ 范数相容。

定理 (4.10)

设 $\|\cdot\|_m$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，则在 $\mathbb{C}^n$ 上必存在与它相容的向量范数。

Q&A

感谢您的聆听和反馈