深圳大学
数学科学学院

矩阵理论讲义

孙雪莹

November 6, 2023

自立 自律 自强

目录

定义 (4.1)

若对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 都有一个实数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 与之对应，且满足：

① 正定性：当 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x}\| > 0$; 当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \|\boldsymbol{x}\| = 0$;

② 齐次性：$\forall k \in \mathbf{C}, \|k\boldsymbol{x}\| = |k| \, \|\boldsymbol{x}\|$;

③ 三角不等式:$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$, 都有 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$;

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的向量范数，定义了范数的线性空间称为附范数线性空间.

上述 ①, ②, ③ 称为向量范数三公理.

由向量范数的定义可得范数的性质如下：

性质

- $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$;

由向量范数的定义可得范数的性质如下:

性质

- $\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$;
- $|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.2)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$, 定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}x_k}=\sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *2*-范数.

例 (4.1)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_1$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *1*-范数.

例 (4.2)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}x_k}=\sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的一种范数，称为向量 *2*-范数.

$\|\boldsymbol{x}\|_2$ 也叫 Euclid 范数，就是通常意义下的向量的长度.

向量的 2-范数有如下重要的性质

性质

对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 和任意的酉矩阵 $\boldsymbol{U}$, 有

$$\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^H(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|_2$$

这一性质称为向量 *2*-范数的酉不变性.

例 (4.3)

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \underset{k}{max} |x_k|$$

例 (4.3)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\underset{k}{max}|x_k|$$

证

①, ② 的正定性，齐次性显然.

以下证 ③ 三角不等式:

设 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbf{C}^n$，有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty=\underset{k}{max}|x_k|+\underset{k}{max}|y_k|=\|\boldsymbol{x}\|_\infty+\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

故 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的一种向量范数.

引理 1 (Young 不等式)

对任意实数 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq 0$，都有

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

其中 $p > 1, q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,$p$,$q$ 称为共轭指数.

定理 (Holder 不等式)

对任意 $x_k, y_k \in \mathbf{C}, k = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中，$p > 1, q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

定理 (Holder 不等式)

对任意 $x_k, y_k \in \mathbf{C}, k = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

其中，$p > 1, q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 当 $p = q = 2$，就是有名的 *Cauchy-Schwarz* 不等式.

定理 (Minkowski 不等式)

对任何 $p \geq 1$，有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

定理 (Minkowski 不等式)

对任何 $p \geq 1$，有

$$(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

例 (4.4)

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种向量范数.

对于 $\|\boldsymbol{x}\|_p$,$p=1$ 即为向量的 1-范数，$p=2$ 即为向量的 2-范数,$p=+\infty$ 是否为 ∞-范数呢，有如下定理.

定理 (4.3)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$，则

$$\lim_{p\to+\infty}\|\boldsymbol{x}\|_p=\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

定理 (4.4)

设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$, $\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的一种向量范数，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数.

定理 (4.4)

设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$, $\|\bullet\|_a$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的一种向量范数，对 $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_b = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_a$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数.

由此可见，由一个已知的向量范数可构造出无穷多的新的向量范数.

例 (4.5)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 *Hermite* 正定矩阵，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是一种向量范数.

例 (4.5)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 *Hermite* 正定矩阵，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是一种向量范数.

证：因为 A 是 Hermit 正定矩阵，故存在 n 阶非奇异矩阵 Q，使 $A = Q^H Q$, 于是

$$\| x \|_A = \sqrt{x^{\mathrm{H}} Q^{\mathrm{H}} Q x} = \sqrt{(Qx)^{\mathrm{H}} (Qx)} = \| Qx \|_2$$

例 (4.6)

设 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{\varepsilon_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon_n}$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 的一组基.$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 可唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha}=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{\varepsilon_k},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{C}^n$. 又设 $\|\bullet\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数，定义

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_v=\|\boldsymbol{x}\|$$

则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_\nu$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\mathbf{C})$ 上的向量范数.

例 (4.7)

设 $f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$ 定义

$$\|f(t)\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$$

$$\|f(t)\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f(t)\|_\infty = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$$

则它们都是 $\mathbf{C}[a,b]$ 上的向量范数.

积分形式的 Hölder 不等式 (其中 p,q 为共轭指数)

$$\int_a^b |\, f(t)\, g(t)\,|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |\, f(t)\,|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\, g(t)\,|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

Minkowski 不等式

$$\int_a^b \left(\ f(t)+g(t)\ |^{\,p}\right) |^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \Big|\, f(t)\Big|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \Big|\, g(t)\Big|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geqslant 1$$

例 (4.8)

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，定义

$$\| x \|_p=(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p)^{\frac{1}{p}} \quad 0<p<1$$

由于它不满足定义 *4.1* 中的 ③，故它不是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数。

例如在 $\mathbf{R}^n$ 中，$x=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, y=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, p=\frac{1}{2}$，则

$$\| x+y \|_{\frac{1}{2}}=4, \| x \|_{\frac{1}{2}}=1, \| y \|_{\frac{1}{2}}=1$$

故 $\| x \|_{\frac{1}{2}}$ 不是 $\mathbf{R}^n$ 上的向量范数。

定义 (4.2)

设 $\|\bullet\|_a$ 和 $\|\bullet\|_b$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的两种向量范数，如果存在正数 c_1, c_2，使对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ 都有

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_b \leq \|\boldsymbol{x}_a\| \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_b$$

则称向量范数 $\|\bullet\|_a$ 与 $\|\bullet\|_b$ 等价.

定理 (4.5)

设 $\|\bullet\|$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任一向量范数，$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_n}$ 为 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 的一组基.$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 可唯一表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon_k}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{F}^n$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数.

定理 (4.5)

设 $\|\bullet\|$ 是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任一向量范数，$\boldsymbol{\varepsilon_1}, \boldsymbol{\varepsilon_2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon_n}$ 为 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 的一组基.$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 可唯一表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{\varepsilon_k}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \boldsymbol{F}^n$，则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续函数.

定理 (4.6)

n 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{F})$ 上的任意两个向量范数都是等价的.

定义 (4.3)

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量序列，其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_i^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$，若 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是收敛的，并说 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的极限为向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)^T$，记为

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$$

向量序列不收敛时称为发散的.

与数列收敛相类似，很容易证明向量序列的收敛性具有以下性质：

性质

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}, \{\boldsymbol{y}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个向量序列,λ, μ 是两个复常数,$\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{x}^{(k)}\} = \boldsymbol{x}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{y}^{(k)}\} = \boldsymbol{y}$, 则：

① $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda\boldsymbol{x}^{(k)} + \mu\boldsymbol{y}^{(k)}) = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}$;

② $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

与数列收敛相类似，很容易证明向量序列的收敛性具有以下性质：

性质

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\},\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个向量序列,λ,μ 是两个复常数,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且

$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}=\boldsymbol{x}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}\{\boldsymbol{y}^{(k)}\}=\boldsymbol{y}$，则：

① $\lim\limits_{k\to+\infty}(\lambda\boldsymbol{x}^{(k)}+\mu\boldsymbol{y}^{(k)})=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}$;

② $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

定理 (4.7)

$\mathbf{C}^n$ 中向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$ 的充分必要条件是，对于 $\mathbf{C}^n$ 上任一向量范数 $\|\bullet\|$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|=0$$

目录

在许多场合需要度量矩阵的"大小"，比如矩阵序列的收敛、解线性方程组时的误差分析。一个自然的想法就是将矩阵"拉直"，将其视作一个 mxn 维的向量。
若 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 则可将 A 看作 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 的向量，可以按照向量范数三公理来定义它的向量范数

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_p} = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{p}} \quad 1 < p < +\infty$$

$$\| \boldsymbol{A} \|_{v_\infty} = \max_{i,j} | a_{ij} |$$

定义 (4.4)

若 $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都有一个实数 $\| A \|$ 与之对应，且满足:

$$\text{正定性: 当} A \neq \boldsymbol{O}, \| A \| > 0; \text{当} A = \boldsymbol{O}\text{时}, \| A \| = 0;$$

$$\text{齐次性: } \forall k \in \mathbf{C}, \| k\mathbf{A} \| = | k | \| \mathbf{A} \|;$$

$$\text{三角不等式:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| A + B \| \leqslant \|A \| + \|B \|;$$

$$\text{相容性:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| AB \| \leqslant \|A \| \|B \| .$$

则称 $\|A\|$ 为 $C^{n\times n}$ 上矩阵 A 的矩阵范数.

定义 (4.4)

若 $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都有一个实数 $\| A \|$ 与之对应，且满足:

$$\text{正定性: 当} A \neq \boldsymbol{O}, \| A \| > 0; \text{当} A = \boldsymbol{O}\text{时}, \| A \| = 0;$$

$$\text{齐次性: } \forall k \in \mathbf{C}, \| k\mathbf{A} \| = | k | \| \mathbf{A} \|;$$

$$\text{三角不等式:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| A + B \| \leqslant \|A \| + \|B \|;$$

$$\text{相容性:} \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \text{都有} \| AB \| \leqslant \|A \| \|B \| .$$

则称 $\|A\|$ 为 $C^{n\times n}$ 上矩阵 A 的矩阵范数.

性质 1 $\| -A \| = \| A \|$.

性质 2 $| \|A\| - \|B\| | \leqslant \|A - B\|.$

例 (4.9)

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$\| A \|_{m_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}| a_{ij} |$$

则 $\| A \|_{m_1}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的一种矩阵范数，称为矩阵的 m_1- 范数。

例 (4.10)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，定义

$$\| A \|_F = \| A \|_{m_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2} = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^H A)}$$

则 $\| A \|_F$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$，上的一种矩阵范数，称为矩阵的 ***Frobenius*** 范数，简称 $F-$ 范数。

定理 (4.8)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathbf{C}^n,j=1,2,\cdots,n$, 则:

① $\| A \|_F^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\| \alpha_j \|_2^2$;

② $\| \mathbf{A} \|_F^2=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})$; 其中$\lambda_i(A\ A)(i=1,2,\cdots,n)$ 表示$A\ A$ 的第 i 个特征值.

③ 对任意的 n 阶酉阵U,V 有

$\| UA \|_F=\| AV \|_F=\| UAV \|_F=\| U^HAV \|_F=\| A \|_F$.称之为 F- 范数的酉不变性.

Q&A

感谢您的聆听和反馈

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was so
unprocessed data that should have been added to the final page this extra page
has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away,
because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.