练习 3.1

一、1. $(0,0,0,0)^T$，若将第二个方程改为 $x_2-x_3+x_4=0$，则通解为 $k(0,1,2,1)^T$， k 任意

2. 通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$， k_1,k_2,k_3 任意

二、1. 通解为 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$， k 任意

2. 通解为 $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$， k_1,k_2 任意

三、$\lambda=-1,\ 3$

四、$\lambda\neq-3$，及 $\lambda=-3,\ \mu=1$ 时

练习 3.2

一、1. $a=-2$　　2. 通解为 $\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， k 任意　　3. $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

二、1. B　　2. C　　3. A

2. 通解为 $\begin{pmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$， k_1,k_2 任意

三、(1) $\lambda=-1,\ a=-2$　　(2) 通解为$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意

四、设 3 阶方阵 $B\neq 0$，且 B 的每列都是齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的解. ……

解 (1) 由题设知方程组有非零解，故其系数矩阵的行列式$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$，

所以$\lambda=1$.

(2) 由题设知 $AB=0$，故 $R(A)+R(B)\leq 3$，又 $B\neq 0$，故 $R(B)\geq 1$，从而 $R(B)<3$，所以$|B|=0$.

五、(1) 用递推法　　(2) $x_1=\dfrac{n}{(n+1)a}$　　(3) 通解为$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$k$ 任意

练习 3.3

一、1. C　　2. D　　3. B　　4. B　　5. B　　6. D

三、(I) $|A|=1-a^4$　　(II) $a=-1$时，$Ax=\beta$ 有无穷多解，通解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意

四、通解为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意