练习 4.1

一、1. A的列（行）向量组是正交单位向量组，或者$A^{-1}=A'$，或者A'(或A^{-1})为正交矩阵

2. $a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$a=-\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　3. 0

二、是

四、当$\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$时，$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$

练习 4.2

一、1. $|4E-A|=0,\ R(4E-A)<n,\ (4E-A)x=0$一定有非零解

2. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$；6, 11, 18　　3. $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$　　4. $-3,\ 0$

二、1. C　　2. B

三、$\lambda_1=0,\ k_1p_1=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$不为零；$\lambda_2=-1,\ k_2p_2=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$k_2$不为零；

$\lambda_3=9,\ k_3p_3=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$k_3$不为零.

四、$a=-5,\ b=4$

练习 4.3

一、1. n　　2. $P^{-1}AP=B$　　3. 24

二、1. A　　2. B　　3. A

三、（1）$-4,-6,\ -12$　　（2）$\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}$　　（3）-288　　（4）-72

四、已知 $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$，求 A^{100}. 答：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

五、（1） $a=4,\ b=5$．（2） $P=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

练习 4.4

一、1. $n-r$，r　　2. 0，0　　3. $A=0$

二、$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

三、（1）$k=1$　　（2）$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$　　（3）$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

四、$\varphi(A)=-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

五、（1）略　　（2）$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

练习 4.5

一、1. $(x_1,x_2,x_3)^T\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$　　2. 1　　3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

二、C

三、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2$

四、$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$

六、（1）$a = -1$；（2）$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

练习 4.6

一、1. $-2 < t < 2$　　2. $a > \frac{1}{2}$　　3. $k > 4$

二、1. D　　2. D　　3. C

三、1. 负定　　2. 正定

四、1. $c = 3$ 特征值为 0，4，9　　2. 椭圆柱面

五、（1）$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（2）$A^{2009} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2^{2009} & 0 & 1+2^{2009} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1+2^{2009} & 0 & 1-2^{2009} \end{pmatrix}$

（3）不是正定二次型