第二章　矩阵的初等变换与向量空间

2.1　矩阵的初等变换

一、填空题

1．设方阵 A,B 满足：$A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为单位矩阵，A^* 为 A 伴随矩阵，则 $B=$__________.　$\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}$

2．3

二、用初等变换将下列矩阵化为标准形

解　利用矩阵的等价的阶梯形矩阵与行最简阶梯形矩阵及标准型的非零行行数不变的性质，用初等变换将矩阵化为标准形时，只需化到阶梯形矩阵，求得非零行行数即可写出其标准型。

1. $\begin{pmatrix}3&2&-4\\3&2&-4\\1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，非零行行数为 2，所以其标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2.

$$\begin{pmatrix}1&7&-1&3\\-1&4&0&2\\1&7&-1&3\\3&-1&-1&-1\\5&1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1\\r_4-3r_1\\r_5-5r_1}}\begin{pmatrix}1&7&-1&3\\0&11&-1&5\\0&0&0&0\\0&-22&2&-10\\0&34&8&-15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&-1&3\\0&11&-1&5\\0&34&8&-15\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3. 标准形为：$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

三、求解下列矩阵方程

1．$X=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$　　　　2．$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

2.2 矩阵的秩

一、填空题

1．$t=4$　　2.　2　　3.　$E(1,3(-3))=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、选择题

1．D　　2.　A　　3.　B

三、求下列矩阵的逆矩阵

1．$\begin{pmatrix}2&1&7\\5&3&-1\\-4&-3&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}-3&23&22\\6&-32&-37\\3&-2&-1\end{pmatrix}$

2．$\begin{pmatrix}3&-1&0&5\\2&0&5&0\\3&1&5&4\\3&0&5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-7&-2&9\\-2&-6&-1&7\\\frac{4}{5}&3&\frac{4}{5}&-\frac{18}{5}\\1&3&1&-4\end{pmatrix}$

四、$k\neq 17$时, $R(A)=3$；$k=17$时, $R(A)=2<3$

2.3 向量组及其线性相关性

一、填空题

1．$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$　　2.　$a=-1$　　3.　$abc\neq 0$

二、选择题

1．(3) 任何$n+k$个n维向量（$k\geq 1$）必然线性相关　　2.　(2)　　3.　(3)

2.4　向量组的秩

一、填空题

1．2　　2.　$t=3$

二、选择题

1．C　　2.　A　　3.　B　　4.　A

三、(1)　3　　(2)　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；　$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$

四、(1)　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(2)　$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$　　(3)　$k=5$

2.5　*n* 维向量空间

一、选择题

D

二、填空题

错题，a 不存在

三、V_1是，V_2不是

四、$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，故

$\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$，$\beta_2 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3$

五、维数$=3$，标准正交基：$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$