2012 级第 1 学期高等数学考试试题

一、填空题(本题 15 分，每小题 3 分)

1、$\mathrm{d}\int \mathrm{d}\int \mathrm{d}\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x =$________________.

2、曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 ________________.

3、$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x =$________________.

4、设 $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi\le x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & 0<x\le\pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数

为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为________________.

5. 设 $y=x(x-1)(x-2)\cdot\cdots\cdot(x-n)$，则 $y^{(n+1)}=$________________.

二、选择题(本题 15 分，每小题 3 分)

1、当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是（　　　　）

（A）0；　　（B）2；　　（C）∞；　　（D）不存在.

2、设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$x_1,x_2\in(a,b)$，则至少存在一点 ξ，使（　　）成立.

A. $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),\xi\in(a,b)$；

B. $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),\xi\in(a,b)$；

C. $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),\quad \xi$ 在 x_1 与 x_2 之间；

D 以上结论都不成立.

3、曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形面积可表示为（　　　）

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　D. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

4、设$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}f(x)=g(x)$，$h(x)=x^2$，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(h(x))=$（　　　）

A. $g(x^2)$;　　B. $2xg(x)$;　　C. $x^2g(x^2)$;　　D. $2xg(x^2)$

5、若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　（　　　）

A. 一定绝对收敛；　B. 一定条件收敛；　C. 一定发散；　D.不能确定

三、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases} a+x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \ln(b+x^2) & x>0 \end{cases}$，已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导，求参数 a,b 的值并求 $f'(x)$.

四、（共 15 分, 其中第一小题 7 分,第二小题 8 分）

1．求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2(1-\cos\sqrt{x})}{\ln(1+x)\sin^2 x}$；

2. 设 $y=y(x)$ 由方程组$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$所确立，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

五、(10 分) 求不定积分$\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$，（$a,b$不全为 0）.

六、（共 15 分, 其中第一小题 7 分,第二小题 8 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

2、问 k 为何值时，由曲线 $y=x^2$, 直线 $y=kx(0<k<2)$ 及 $x=2$ 围成的平面图形面积最小？

七、（12 分）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$，

(1) 证明 $f(x)$在开区间$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$内连续;

(2) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$的收敛域;

(3) 计算定积分$\int_0^{\frac{1}{6}} f(x)\mathrm{d}x$的值.

八、（8 分）设函数 $f(x)$在闭区间$[0,4]$上连续，在开区间$(0,4)$上可导，且

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=8$，$f(4)=2$，证明必存在$x\in(0,4)$使$f'(x)=0$.

2012 级第 1 学期高等数学考试试题参考答案

一、填空题

1、$\underline{\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x}$ ；2、$\underline{2}$；3、$\underline{0}$ ；4、$\underline{\begin{cases} x+\pi, & -\pi<x<0, \\ 1, & 0<x<\pi, \\ \frac{\pi+1}{2}, & x=0, \\ \frac{1}{2}, & x=\pm\pi. \end{cases}}$ ；**5**、$\underline{(n+1)!}$

二、选择题

1、D　2、B 或 C　3、D　4、D　5、D

三、解 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a$，$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore \ln b=a=1$，即$a=1,b=e$。当$x>0$时，$f'(x)=\left[\ln(e+x^2)\right]'=\frac{2x}{e+x^2}$，当$x<0$时，$f'(x)=2x$，

当$x=0$时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(e+x^2)-1}{x}=0$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+x^2-1}{x}=0$，故$f'(x)=\begin{cases} 2x, x<0 \\ \frac{2x}{e+x^2}, x\ge0 \end{cases}$。

四、

1．解. $\because x\to0, \arctan x^2\sim x^2, \ln(1+x)\sim x, 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2(1-\cos\sqrt{x})}{\ln(1+x)\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\dfrac{x}{2}}{x\cdot\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$

2. 解. 方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 两边对 x 求导得 $\begin{cases}1=6t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+2\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\ e^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin t+e^y\cos t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$，

将 $t=0, y|_{t=0}=1$ 代入得 $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{e}{2}$。

五、解：当 $a=0,b\neq 0$ 时，原式 $=\dfrac{1}{b}\displaystyle\int\dfrac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{b}\ln|\cos x|+C$；

当 $a\neq 0,b=0$ 时，原式 $=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int\dfrac{\sin x}{\sin x}\mathrm{d}x=\dfrac{x}{a}+C$；

当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时， 设 $T_1=\displaystyle\int\dfrac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$， $T_2=\displaystyle\int\dfrac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$， 则

$aT_1+bT_2=\displaystyle\int dx=x+C_1$，

$aT_2-bT_1=\displaystyle\int\dfrac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=\ln|a\sin x+b\cos x|+C_2$，所以

$T_1=\dfrac{1}{a^2+b^2}(ax-b\ln|\sin x+\cos x|)+C$.

六、

1.解：因为 $f(\pi)=\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$， $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$，故

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=\pi f(\pi)-\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2$$

2、解： $y=x^2$ 与 $y=kx$ 的交点坐标为 $(0,0),(k,k^2)$，所围图形面积为

$A=\displaystyle\int_0^k(kx-x^2)dx+\int_k^2(x^2-kx)dx=\dfrac{1}{3}k^3-2k+\dfrac{8}{3}$， $A'=k^2-2$， $A''=2k$.

令 $A'=k^2-2=0$，解得 $k=\pm\sqrt{2}(k=-\sqrt{2}$舍去$)$，且 $A''(\sqrt{2})>0$，所以，$k=\sqrt{2}$ 时，A 有最小值.

七、解：(1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)3^n}{n3^{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\dfrac{n+1}{n}=3$，所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$ 的

收敛半径 $R=\dfrac{1}{3}$，从而收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，而 $f(x)$ 是此幂级数的和函数，由和函数在收敛区间内的连续性知结论(1)成立.

(2) 因当 $x=\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散，当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n$ 发散，故此幂级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(3) 因在收敛区间 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 内，$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n3^{n-1}x^{n-1}\mathrm{d}x$

$=\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^n=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{1-3x}=\frac{x}{1-3x}$. 所以

$f(x)=\left(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{x}{1-3x}\right)'=\frac{1}{(1-3x)^2}, x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

从而 $\int_0^{\frac{1}{6}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{1-3x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-3x}\Big|_0^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$

八、解：因 $f(x)$ 在闭区间 $[0,4]$ 上连续，故在 $[0,4]$ 上存在最大值 M 与最小值 m，因此 $m\le f(0), f(1), f(2), f(3)\le M$ 。所以 $m\le\frac{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)}{4}\le M$，

由闭区间上连续函数的介值定理知: 必存在 $h\in(0,4)$ 使 $f(\eta)=2$

又 $f(\eta)=2=f(4)$，因 $f(x)$ 在 $[\eta,4]$ 上连续，在 $(\eta,4)$ 内可导，故由 Rolle 定理得：存在 $x\in(0,4)$，使得 $f'(x)=0$.

2013 级第 1 学期高等数学考试试题

一、填空题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[5]{1+ax}-1$ 与 $\cos\sqrt{x}-1$ 是等价无穷小，则 $a=$ ______ .

2. 设 $\int_1^x f(t)dt = x[f(x)+1]$，则 $f(x)=$ ______________ .

3. 对于函数 $f(x)=\ln\sin x$，在区间 $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}]$ 上使Lagrange中值定理结论成立的

点是 $\xi=$ ______________ .

4. 已知函数 $f(x)=e^{-x}\ln ax$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处有极值，则 a 的值为______________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x < 0 \\ x-\pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$，则 $f(x)$ 以 2π 为周期的Fourier级数在 $[-\pi,\pi]$

上的和函数为 $S(x)=$ ________________________________.

二、选择题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=$ (　　)

(A)　0；　　(B)　1；　　(C)　-1；　　(D)　2

2. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ （　　）

(A)　有且仅有水平渐近线；　　(B) 有且仅有铅直渐近线；

(C)　既有水平渐近线也有铅直渐近线；(D) 既无水平渐近线也无铅直渐近线

3. 下列反常积分中收敛的是(　　)

(A) $\int_0^{+\infty}\cos x dx$　　(B) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$　　(C) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$　　(D) $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$

4. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为(　　)

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　(B) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta$　(C) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 时发散，在 $x=0$ 时收敛，则常数 $a=$ (　　)

(A)　-1；　　(B)　1；　　(C)　-2；　　(D)　2

三、(12分)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\ln(b+x^2)}{x}, & x>0\end{cases}$ ，试确定常数 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导.

四、求解下列各题(共16分，每题8分)

1. 求曲线 $e^{x+y}+xy=0$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线与法线方程.

2. 求曲线 $y=x^2-2x, y=0, x=1, x=3$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V.

五、(8分) 设某银行一年内吸纳储户存款的总数与银行付给储户年利率的平方成正比，若银行以20%的年利率把储户存款总数的90%贷出以获取利润，问银行支付给储户的年利率定为多少时，才能获得最大年利润？

六、计算下列各题(共16分，每题8分)

1. 计算不定积分：$\int\dfrac{dx}{e^x(e^x-1)}$；

2. 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x\le 0\\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x\le 1\end{cases}$ ，求 $\int_{-3}^{1}f(x)dx$.

七、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域以及和函数 $S(x)$.

八、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 在 (a,b) 内可微， 如果 $a\ge 0$， 证明：在 (a,b) 内存在三个数 x_1,x_2,x_3， 使 $f'(x_1)=(b+a)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\dfrac{f'(x_3)}{3x_3^2}$ 成立.

2013级第1学期高等数学考试试题参考答案

一、填空题

1. $-\dfrac{5}{2}$； 2. $-\ln|x|-1$； 3. $arc\cot\dfrac{6\ln 0.5}{7\pi}$； 4. $2e^2$； 5. $\begin{cases}x+\pi, & -\pi\le x<0\\ 0, & x=0\\ x-\pi, & 0<x\le\pi\end{cases}$.

二、选择题

1. B；2. A；3. C；4. A；5. A.

三、$a=\pm\sqrt{2}, b=1$.

四、1. 切线方程为 $y=-1$；法线方程为 $x=1$.　　2. 9π .

五、设年利率为 x，总存款为 y，则 $y = kx^2 \quad (k > 0, x > 0)$，

利润函数为 $R(x)$，依题意 $R(x) = 0.2 \times 0.9y - xy = 0.18kx^2 - kx^3$，

$R'(x) = 0.36kx - 3kx^2 = kx(0.36 - 3x)$

令 $R'(x) = kx(0.36 - 3x) = 0$，得 $x = 0.12$ 为唯一驻点，

且 $R''(x) = 0.36k - 6kx$， $R''(0.12) = -0.36k < 0$，

所以，当 $x = 0.12$ 时， $R(x)$ 最大，故年利率定为12%可获得最大年利率.

六、1. $\int \frac{dx}{e^x(e^x - 1)} = \ln|e^x - 1| - x + \frac{1}{e^x} + C$；2. $\int_{-3}^{1} f(x)dx = -2e^3 - 1 + \frac{\pi}{4}$.

七、收敛域为 $[-2,2)$，和函数为 $S(x) = \ln 2 - \ln(2 - x)$.

八、证：由Lagrange中值定理可知，存在 $x_1 \in (a,b)$ 使得

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (b + a)\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = (b^2 + ba + a^2)\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3},$$

取 $g(x) = x^2$，则由Cauchy中值定理可知，存在 $x_2 \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2},$$

取 $h(x) = x^3$，则由Cauchy中值定理可知，存在 $x_3 \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2},$$

因此在 (a,b) 内存在三个数 x_1, x_2, x_3 使

$$f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ba + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$ 成立.

2014级第1学期高等数学考试试题

一、填空题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2})=$__________________.

2. $x=0$ 为函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的____________间断点.

3. 设 $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$，则 $f^{(2015)}(0)=$________________________.

4. $\int x\sec^2 x dx=$______________________________________.

5. 周期为 2 的函数 $f(x)$，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=x,-1\le x<1$，设它的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(1.5)=$____________________.

二、选择题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 设函数 $f(x)=(1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!})e^{-x}$，则(　　)

(A) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值；

(B) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值；

(C) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值；

(D) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 $x=0$ 取极小值

2. 曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$，则该曲线(　　)

(A) 没有渐近线；　　(B) 仅有水平渐近线；

(C) 仅有铅直渐近线；　　(D) 既有水平渐近线又能铅直渐近线

3. 下列广义积分收敛的是(　　)

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$；　(B) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$；　(C) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$；　(D) $\int_1^{+\infty}xe^{-x}dx$

4. 曲线 $y=\ln x$ 及直线 $x=e$，x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转形成的旋转体的体

积为V_y，则有$V_y=$（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}e^2$；　(B) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$；　(C) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$；　(D) πe^2

5. 下列级数条件收敛的是(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+10}$；　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3}}$；　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^n$；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3}{\sqrt{n}}$

三、(共 14 分，每小题 7 分）求下列各极限

1. 设函数 $f(x)=\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}(a>0)$.

四、(10 分）某房地产公司有 50 套公寓要出租，当租金定为每月 180 元时，公寓会全部租出去. 当租金每月增加 10 元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费 20 元的整修维护费.试问房租定为多少可获得最大收入?

五、(共 16 分，每小题 8 分）求解导数题

1. 设曲线方程为$\begin{cases}x=2t+3+\arctan t\\y=2-3t+\ln(1+t^2)\end{cases}$，求该曲线在$x=3$处的切线方程；

2. 设函数$y=y(x)$由方程$2y-x=(x-y)\ln(x-y)$确定，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

六、(9 分）将函数$y=\ln(1-x-2x^2)$展开成x的幂级数，并指出其收敛域.

七、(共 14 分，每小题 7 分）求解下列各题

1. 已知 $f'(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0\\\sin x, & x<0\end{cases}$，求 $f(x)$.

2. 求星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases},(0\le t\le 2\pi,a>0)$的全长.

八、(7 分）设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0,g(x)>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx.$$

2014级第1学期高等数学考试试题参考答案

一、填空题

1. 0；2. 第一类跳跃间断点；3. 0；4. $x\tan x+\ln|\cos x|+C$；5. $-\frac{1}{2}$.

二、选择题

1. A；2. D；3. D；4. C；5. D.

三、1. 1；2. $\frac{1}{6}\ln a$.

四、设房租定为 x，则收入 $R(x)=(x-20)(50-\frac{x-180}{10})=-\frac{1}{10}x^2+70x-1360$

当 $x=-\dfrac{70}{2\cdot(-\frac{1}{10})}=350$时，$R(x)$取得最大值.

五、1. 切线方程为 $x+y=5$；2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{(x-y)[3+\ln(x-y)]^3}=\dfrac{(x-y)^2}{(2x-y)^3}$.

六、$y=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$ 收敛区间为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

七、1. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\ge 0\\ -\cos x+1+C, & x<0\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-1+C, & x\ge 0\\ -\cos x+C, & x<0\end{cases}$；

2. $6a$.

八、因为 $f(x)$连续，且 $f(x)>0$，故存在最大值$M>0$和最小值$m>0$，则有

$$m\le f(x)\le M，\sqrt[n]{m}\le\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{M}$$

又$g(x)>0$，从而 $\sqrt[n]{m}g(x)\le g(x)\sqrt[n]{f(x)}\le\sqrt[n]{M}g(x)$

$$\int_a^b\sqrt[n]{m}g(x)dx\le\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx\le\int_a^b\sqrt[n]{M}g(x)dx$$

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx\le\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)dx$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

所以，由夹逼原理可得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx$.

2015 级第 1 学期高等数学考试试题

一、(共 15 分：其中第一小题 10 分，第二小题 5 分)

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的连续性，若存在间断点指出其类型.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

二、（10 分）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

三、（共 15 分：其中第一小题 5 分，第二小题 10 分）

1. 计算 $\int_0^3\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$.

2. 求由方程 $\int_{y^2}^0 e^t dt+\int_0^{2x}t^2dt=0$ 所确定的隐函数 y 对 x 的导数 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

四、（10 分）设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$，其中 n 为正整数.

五、（共 15 分：其中第一小题 7 分，第二小题 8 分）

1. 计算不定积分 $\int\dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

2. 设 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_0\cos x-a_0\sin x)^2dx=\min\limits_{a\in R}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-a\sin x)^2dx\right]$，求 a_0.

六、（10 分）由原点引抛物线 $y=x^2+2x+4$ 的两条切线，设切点分别为 A,B，求两切线 OA,OB 与此抛物线所围成的平面图形的面积.

七、（共 15 分：其中第一小题 7 分，第二小题 8 分）

1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^4+\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^6+\cdots$ 的敛散性.

2. 求曲线 $y=f(x)=\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$ 的所有渐近线方程.

八、(10 分)将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2-x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数，并求其收敛域.

2015 级第 1 学期高等数学考试试题参考答案

一、1. $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点也是第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点也是第一类间断点，其它点都是 $f(x)$ 的连续点.

2. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12$.

二、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$,

所以分子极限为 0，故 $a=-1$，从而

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1,$$

又分子极限为 0，故 $b=-\dfrac{1}{2}$，从而

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{(1+x)^3}-3b\sin x-bx\cos x}{6k}=1，\text{故 } k=-\frac{1}{3}.$$

三、1. $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx=3+3\sqrt[3]{2}$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x^2}{ye^{y^2}}$，　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{8xy^2e^{y^2}-16x^4-32x^4y^2}{y^3e^{2y^2}}$.

四、设辅助函数 $F(x)=x^nf(x)$.

五、1. $\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$.

2. 因 $f(a)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-a\sin x)^2dx=\frac{2}{3}\pi^3+2\pi a^2-4\pi a$,

令 $f'(a)=4\pi a-4\pi=0$，得 $a=1$，且 $f''(a)=4\pi>0$，所以 $a_0=1$.

六、$S=\dfrac{16}{3}$.

七、1. 原级数发散.

2. $x=-1, x=0, y=-\dfrac{2}{\pi}, y=\dfrac{2}{\pi}$.

八、$f(x)=\dfrac{x}{2-x-x^2}=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]x^n, \qquad -1<x<1$.

2016 级第 1 学期高等数学考试试题

一、计算下列各题(本题 35 分，每小题 7 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^{2x}(1+t^2)e^{t^2-4x^2}\mathrm{d}t$.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 所确定，其中 f 有一阶导数且 $f'\neq 1$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3．求不定积分 $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$.

4．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{na}{n+1})^n\ \ (a>0)$ 的敛散性.

5．求定积分 $\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$.

二、（本题 10 分）设曲线的极坐标方程为 $r=a\sin 3\theta$ ，求它在点 $(a,\frac{\pi}{6})$ 处的法线的直角坐标方程.

三、（本题 15 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}x^{n+2}$ 的收敛域，在收敛域内求该级数的和函数 $S(x)$，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ 的和.

四、（本题 10 分）设由曲线 $y=x^2$，直线 $y=kx(0<k<1)$ 及 $x=1$ 围成的平面图形面积为 $S(k)$，求 k 的值，使 $S(k)$ 为最小.

五、（本题 10 分）当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，求常数 a 与 n.

六、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有二阶连续导数，且 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=5$， $f(\pi)=2$，求 $f(0)$.

七、（本题 10 分）若 $ab>0$，证明 $ae^b-be^a=(\xi-1)e^{\xi}(b-a)$，其中 ξ 在 a,b 之间.

2016级第1学期高等数学考试试题参考答案

一、1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^{2x}(1+t^2)e^{t^2-4x^2}\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{2x}(1+t^2)e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{4x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(1+4x^2)e^{4x^2}}{e^{4x^2}+8x^2e^{4x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(1+4x^2)}{1+8x^2}=1$.

2. $y'=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$.

3. $\int\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{(xe^x)'}{xe^x(1+xe^x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{xe^x(1+xe^x)}\mathrm{d}xe^x$

$=\int[\dfrac{1}{xe^x}-\dfrac{1}{1+xe^x}]\mathrm{d}xe^x=\ln\dfrac{xe^x}{1+xe^x}+C$.

4．因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{na}{n+1})^n}=a$，当$a>1$时，原级数发散；当$0<a<1$时，原级数收敛；当$a=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n=\dfrac{1}{e}\neq 0$则原级数发散.

5．做变量代换$t=\tan\dfrac{x}{2}$，则$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

$\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{3+t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

二、$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

三、 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+3)}=0$，所以级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

令其和函数为$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}x^{n+2}$，且知$S(0)=0$，

上式两边求导得，$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{n+1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=x(e^x-1)$，

所以，$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t+S(0)=\int_0^x t(e^t-1)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}x^2+xe^x-e^x+1$.

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n![1+(n+1)+(n+1)(n+2)]}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$

$=S(1)=[-\frac{1}{2}x^2+xe^x-e^x+1]_{x=1}=\frac{1}{2}$.

四、可得 $S(k)=\int_0^1|kx-x^2|dx=\int_0^k(kx-x^2)dx+\int_k^1(x^2-kx)dx$

$$=\frac{k^3}{3}-\frac{k}{2}+\frac{1}{3}\quad(0<k<1)$$

在$(0,1)$内，令$S'(k)=k^2-\frac{1}{2}=0$，得唯一驻点$k=\sqrt{\frac{1}{2}}$，

$S''(k)=2k$，$S''(\sqrt{\frac{1}{2}})=2\sqrt{\frac{1}{2}}>0$，即得此时$S(k)$为最小.

五、$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=1-\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\cos 3x$

$=1-\frac{1}{2}(\cos^3 3x+\cos x\cos 3x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x)$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=1$，即$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-(\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x)}{4ax^n}$，

应用洛必达法则，得

$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4nax^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{36\cos 6x+16\cos 4x+4\cos 2x}{4n(n-1)ax^{n-2}}$

$\overset{若n=2}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{36+16+4}{8a}=\frac{7}{a}$，（若$n>2$，则右式趋于零，不符合题意），

可得$a=7,n=2$.

本题有很多方法！！！

六、$f(0)=3$.

七、不妨设$0<a<b$，令$f(x)=\frac{e^x}{x},g(x)=\frac{1}{x},x\in[a,b]$.

2017 级第 1 学期高等数学考试试题

一、**填空题**(本题 24 分，每小题 3 分)

1、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt}{x-\sin x}=1$，则 $a=$____________________.

2、设 $y=\sin f(x^2)$，其中函数 $f(u)$ 是可微的，则 $dy=$____________________.

3、设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 的间断点为__________________，

间断点的类型为______________________________.

4、设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $\int f(x)dx=$__________________________________.

5、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x}{(1+x^2)^{20}}\cos x dx=$_________________________.

6、星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的全长为__________________.

7、已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2-x}dx=$______________________.

8、设 $f(x)=1-\dfrac{x}{\pi}(0\le x\le\pi)$ 的余弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-3)=$______.

二、（共 16 分，其中第 1 小题 8 分，第 2 小题 8 分）

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4\cos\frac{1}{x^2}}{e^x-1}, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{x}+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a,b.

三、（10 分）设上证 A 股中某只股票历年来的走势指数曲线为

$C: f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$，求（1） $f(x)$ 的增减区间和极值；（2） $f(x)$ 的凹凸区

间及拐点；（3） $f(x)$ 的渐近线.

四、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛区间，并在其收敛区间内求其和函数.

五、（10 分）求曲线 $y=x^2-2x$， $y=0$， $x=1$， $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

六、（共 12 分，其中第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分）

计算 1、$\int\frac{2x^5+11x^4+28x^3+39x^2+32x+13}{2x^3+7x^2+8x+3}dx$；

2、$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

七、（8 分）设 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的数列，（其中 $a_n>0, n=1,2,3,\cdots$），证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

八、（共 12 分，其中第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分）

1、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $\eta f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

2、设 $\begin{cases} x=\int_0^t\frac{u}{(2-u)^2}du \\ y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^{n-1} \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

2017 级第 1 学期高等数学考试试题参考答案

一、1. $a=4$；

2. $dy=\cos f(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2xdx$；

3. $x=0$，第一类可去间断点；

4. $\int f(x)dx=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$；

5. 0； 6. $6a$； 7. $e^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}$； 8. $S(-3)=\dfrac{\pi-3}{\pi}$.

二、1. $\because \dfrac{n^2}{n^2+n}\le\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=1$，

由夹逼原理可得: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})=1$.

2. 依题意可知要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可，即要 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$.

而 $f(0)=a$， $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[\dfrac{\ln(1+3x)}{x}+b]=3+b$，

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^4\cos\frac{1}{x^2}}{e^x-1}=\lim_{x\to0^-}x^3\cos\frac{1}{x^2}=0,$$

由 $3+b=0=a$ 可得，$a=0,b=-3$.

三、 $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$， $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,0),(2,+\infty)$ 上单调增加，在 $(0,1),(1,2)$ 上单调减少；在 $x=0$ 处取极大值 $f(0)=-2$，在 $x=2$ 处取极小值 $f(2)=2$；在 $(-\infty,1)$ 是凸的，在 $(1,+\infty)$ 是凹的；渐近线有 $x=1,y=x-1$.

四、$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+3)x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{(2n+1)x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^2}{n+1}=0<1$，

所以原级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$， 则

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=x[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}-1]=x(e^{x^2}-1),$$

所以 $S(x)=[x(e^{x^2}-1)]'=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1$.

五、 $S=\int_1^2(2x-x^2)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$；

$V=\int_1^3\pi y^2dx=\int_1^3\pi(x^2-2x)^2dx=\frac{46}{15}\pi$.

六、1. $\because \frac{2x^5+11x^4+28x^3+39x^2+32x+13}{2x^3+7x^2+8x+3}=x^2+2x+3+\frac{-x^2+2x+4}{2x^3+7x^2+8x+3}$,

设 $\frac{-x^2+2x+4}{2x^3+7x^2+8x+3}=\frac{-x^2+2x+4}{(x+1)^2(2x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{D}{2x+3}$,

由待定系数法可得： $A=2,B=1,D=-5$，

$\therefore$ 原式 $=\int[x^2+2x+3+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{5}{2x+3}]dx$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{5}{2}\ln|2x+3|+C.$$

2. $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d\sqrt{x}=2\int_{\frac{1}{2}}^1\arcsin\sqrt{x}d\arcsin\sqrt{x}$

$$=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{3\pi^2}{16}.$$

七、依题意，有 $0<1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$,

由于 $\{a_n\}$ 单调有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 存在.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=a-a_1$,

由级数收敛的定义知， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$ 收敛.

由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

八、1．设 $F(x)=x^2f(x)$，由罗尔定理可得结论.

2. 当$-2<t<2$时，$\int_0^t y\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=\frac{\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}}=\frac{t}{2-t}$，

从而$y=(\frac{t}{2-t})'=\frac{2}{(2-t)^2}$，

于是$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{(2-t)^2}$，$\frac{dy}{dt}=\frac{4}{(2-t)^3}$，

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(2-t)t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8(t-1)}{t^3}$.

2018 级第 1 学期高等数学考试试题

一、**填空题**(每小题 4 分，总计 24 分)

1、若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $ab=$______________.

2、已知 $f'(x)=e^{3x}$，则 $f(x)$ 的反函数的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=$______________.

3、已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f'''(0)=$______________.

4、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2\sin x$，则 $\int f'(x)dx=$______________.

5、广义积分 $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}dx=$______________.

6、设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则其傅里叶级数在点 $x=0$ 处的和为______________.

二、（共 14 分，其中第 1 小题 7 分，第 2 小题 7 分）

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

2、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(x+1)}$ 的间断点，并判断其类型.

三、（10 分）证明 Cauchy 中值定理：如果函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\ne 0, x\in(a,b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

四、（共 14 分，其中第 1 小题 7 分，第 2 小题 7 分）

1．试确定 $a,b.c$ 的值，使三次曲线 $y=ax^3+bx^2+cx$ 有拐点 $(1,2)$，并且在该点处切线的斜率为 1.

2．设函数 $y=e^{-x}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{3-x^3}}$，求 dy.

五、（10 分）设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a.

六、（6 分）设 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$，证明导函数 $f'(x)$ 只有一个零点.

七、（共 12 分，其中第 1 小题 6 分，第 2 小题 6 分）

1．求不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

2． $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，计算 $\int_{-2}^{10}(x-[x])\mathrm{d}x$.

八、（10 分）将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，并指出其收敛域.

2018 级第 1 学期高等数学考试试题参考答案

一、1. $\dfrac{1}{2}$；2. $-\dfrac{3}{e^{6x}}$ 或 $-\dfrac{1}{3y^2}$；3. 0；4. $2x\sin x+x^2\cos x+C$；

5. 1；　6. 0.

二、1. $\text{原式}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=2+0=2$.

2．$x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类的可去间断点；$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类的无穷间断点.

三、见教材.　辅助函数的设法不唯一.

四、1． $a=1,b=-3,c=4$.

2． $dy=e^{-x}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{3-x^3}}[-1+\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{2}{3(x^2+1)}+\dfrac{3x^2}{3-x^3}]dx$.

五、$V_x=\int_0^a\pi(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$， $V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$， $a=7\sqrt{7}$.

六、存在性： $f'(x)=2x\ln(1+x^2)$， $x=0$ 使得 $f'(x)=0$；

唯一性； $f''(x)=2\ln(1+x^2)+\dfrac{4x^2}{1+x^2}>0$，从而 $f'(x)$ 单调递增， $f'(x)=0$ 至多存在一个零点.

因此 $f'(x)$ 只有一个零点.

七、1．原式 $=\ln\arcsin\dfrac{x}{2}+C$；

2．因 $f(x)=x-[x]$ 是周期为 1 的可积函数，从而

$$\int_{-2}^{10}(x-[x])\mathrm{d}x=12\int_0^1(x-[x])\mathrm{d}x=12\int_0^1 x\mathrm{d}x=6.$$

八、$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-3}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$，

由 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$ 得 $0<x<6$，又当 $x=0$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3}$，发散；

当 $x=6$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3}$ 发散，因此幂级数的收敛域为 $(0,6)$.