$Ax=b$: 平衡、相等、稳定

变化

$$A^n$$

$$u_{k+1}=Au_k$$

$$\frac{du}{dt}=Au$$

λ: 特征值

x: $Ax=\lambda x$ x方向不变

λ: $\quad |A-\lambda E| = 0$

x: $\quad (A-\lambda E)x = 0$

A: $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$|A| = -5$

$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) - 8$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda-5)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -1$

$\lambda_1\lambda_2 = -5 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 4$

$\lambda = 5 \cdot A - 5E = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$(A - 5E)x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1 \quad (A+E) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$(A+E)x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X \Lambda X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = X \Lambda X^{-1}.$$

$$A^2 = X \Lambda X^{-1} X \Lambda X^{-1}$$

$$= X \Lambda^2 X^{-1}$$

$$A^n = X \Lambda^n X^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_i \to \lambda_i^n \\ x_i \to x_i \end{cases}$$

$\overline{\lambda_i}$　　x_i 变 $\Rightarrow$ x 变

$X\Lambda X^{-1}$ 变 $\Rightarrow$ A_i 变

所有 A_i　$\overline{\lambda}$　　任意 B　$\overline{\lambda_i}$

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$A = PBP^{-1}$$

A、B相似

GM ≤ AM

λ_i 重复次数　　对 λ_i 的线性无关的向量

可对角化：n个线性无关特征向量

$$S = S^T$$

性质 2　实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是正交的.

证　设 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值, $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 是对应于 λ_1, λ_2 的特征向量, 即 $\lambda_1 \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1, \lambda_2 \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$. 由于 A 对称, 故

$$\lambda_1 \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} = (\lambda_1 \boldsymbol{P}_1)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A},$$

于是 $\lambda_1 \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2) = \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2 \boldsymbol{P}_2) = \lambda_2 \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2$, 即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 = 0.$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 = 0$, 即 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 正交.

$$S = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Lambda Q^T$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T$$

对称矩阵 + 正特征值

$\Downarrow$

正定

$$S=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_i > 0 \\ D_i > 0 \\ x^T S x > 0 \end{cases}$$

$$x^T S x = \lambda \|x\|^2 > 0$$

$$x^T S x = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a & b \\ a & a_{22} & c \\ b & c & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2$$

$$+ 2a\,xy + 2bxz + 2cyz.$$

正交化

1. **正交变换法**

对于任一个 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，总有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$. 由于 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，所以有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

故有下面的定理.

定理 4.6 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

总有正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$（$\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交矩阵），使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 成为标准形：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的两两正交的单位特征向量.

推论 对于任一个 n 元二次型

$$f(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

总有可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形（证明略）.

综上分析，得出利用正交变换法化二次型为标准形的步骤如下.

(1) 写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，以及对应于每个特征值的特征向量；

(3) 用施密特正交化方法，将特征向量正交化，再单位化，便可得到 n 个两两正交的单位特征向量；

(4) 以这 n 个两两正交的单位特征向量作为列向量，构成矩阵 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 就是所求的正交变换.

例 4.21 用正交变换法化二次型

例 4.23 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求正交变换 $x = Qy$，将 f 化为标准形.

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因秩 $R(A^{\mathrm{T}}A) = R(A) = 2$，所以 $a = -1$.

(2) 因 $a = -1$，所以 $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，则特征多项式为

$$|\lambda E - A^{\mathrm{T}}A| = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6),$$

于是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = 6$，$\lambda_3 = 0$.

当 $\lambda_1 = 2$ 时，由 $(2E - A^{\mathrm{T}}A)x = 0$，可得属于 2 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\ }\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2 = 6$ 时，由 $(6E - A^{\mathrm{T}}A)x = 0$，可得属于 6 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

当 $\lambda_3 = 0$ 时，由 $A^{\mathrm{T}}Ax = 0$，可得属于 0 的一个单位特征向量 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

令 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

$$f = 2y_1^2 + 6y_2^2$$

2. 配方法

利用正交变换化二次型为标准形，具有不改变几何形状的优良特性. 若不限于正交变换，也可以采用下面介绍的拉格朗日(Lagrange)配方法.

例 4.24 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

成标准形，并求出所用的变换矩阵.

解 由于f中三个变量的平方项都存在，则可选择一个变量，例如x_1，然后集中含x_1的项配方，剩余的项类似处理，这样可得

$$f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2,$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

于是把f化成标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2,$$

所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 4.25 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形，并求出所用的可逆线性变换.

解 在这个二次型f中，所有平方项系数都为零，于是先作变换：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

代入可得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

然后按例4.24的方法配方，得

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

则

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

于是，经过两次可逆线性变换，将二次型化成了标准形. 这里所用的第一个可逆线性变换为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y,$$

第二个可逆线性变换为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

所以所求的可逆线性变换为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2)\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

所用的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

一般地，任何一个 n 元二次型都可以用类似上面两例的方法找到可逆线性变换化成标准形. 这里必须指出，用不同的可逆线性变换把同一个二次型化为标准形时，二次型的标准形不会是唯一的，但规范形唯一.

般的二次型都是成立的.

定理 4.7 设有实二次型 $f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，它的秩为 r，如果有两个可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 及 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}$，使

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2 \qquad (k_i \neq 0)$$

及

$$f = \lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 + \cdots + \lambda_rz_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数的个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数的个数相等.

这个定理称为惯性定理(证明略).

二次型的标准形中正系数的项数 p 称为二次型的正惯性指数，负系数的项数 q 称为二次型的负惯性指数，$p-q$ 称为符号差，显然 $p+q=r$(r 为二次型的秩). 惯性定理反映在几何上，就是通过可逆线性变换把二次曲线方程化为标准方程时，虽然标准方程中平方项的系数与所作的可逆线性变换有关，但曲线的类型(椭圆型、双曲型等)不会因所作的可逆线性变换的不同而改变.

定义 4.8 设有实二次型 $f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，对于任意的 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$，

(1) 若对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f > 0$，则称 f 为正定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的；

(2) 若对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f \geqslant 0$，则称 f 为半正定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的；

(3) 若对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f < 0$，则称 f 为负定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的；

(4) 若对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f \leqslant 0$，则称 f 为半负定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半负定的.

如果二次型 f 既不是半正定又不是半负定，则称 f 是不定的.

定理 4.8 实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定的充分必要条件是它的标准形的 n 个系数全为正，即它的正惯性指数等于 n.

证 设可逆变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 使

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x$$

求对应矩阵、λ、正交特征向量，标准型

A的特征值

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & (\lambda-4)(6-\lambda) & 3(4-\lambda) \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} (\lambda-4)(6-\lambda) & 3(4-\lambda) \\ 3(\lambda-4) & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-4) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 3(\lambda-4) & \lambda+6 \end{vmatrix} = -(\lambda-4)\left[(6-\lambda)(6+\lambda) + 9(\lambda-4)\right]$$

$$= -(\lambda-4)\left[\cancel{36} - \lambda^2 + 9\lambda - \cancel{36}\right]$$

$$= -(\lambda-4)\lambda(9-\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9.$$

A的特征向量

$$(0E-A)x=0$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -24 & 12 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&-1&3\\-3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&3\\0&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=0\cdot x_2\end{cases}$$ 取 $x_2=1$ 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$9E-A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\1&4&3\\-3&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-15&-15\\1&4&3\\0&15&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$ 取 $x_3=1$ 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

· 不用正交化

· 单位化 $\eta_1=\dfrac{\xi_1}{\frac{\sqrt6}{2}}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$ $\eta_2=\dfrac{\xi_2}{\sqrt2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$ $\eta_3=\dfrac{\xi_3}{\sqrt3}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

则 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, $x=Py$ 回

$$f(y_1,y_2,y_3)=0y_1^2+4y_2^2+9y_3^2$$

八. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ij\,x_ix_j$

(14')

(1) 求正交矩阵 Q，使二次型经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 解