数值分析第五次上机练习实验报告

——函数逼近的正交多项式方法

huangyf15

一、问题描述

设$f(x)=x^2 ln(2+x)$，$x\in[-1,1]$，试求出权函数$\rho(x)=1$的最佳平方逼近三次多项式．另外请用 Tchebychev 截断级数的办法给出近似最佳一致逼近三次多项式．并画图比较．

二、方法描述——Legendre 多项式与 Tchebychev 多项式逼近

函数逼近是在赋有特定范数的函数空间中求取与已知函数误差范数最小的函数近似方法．从上述表述中可以看出，不同的函数空间以及不同的函数范数都会影响逼近函数的最终结果，更重要的是这还会影响求解过程的复杂度与可行性．因此，选取合适的函数空间与函数范数是设计函数逼近的算法时需要关注的两个重要问题．

从选取的函数空间来看，主要有最简单的多项式空间，还有有时逼近效果更好的有理函数空间及其对应的 Pade逼近，以及适用于周期函数逼近的三角函数空间；从选取的特定范数看，则主要包括无穷范数及其对应的最佳一致逼近，和二范数及其对应的最佳平方逼近，而后者往往由内积诱导而来．最佳一致逼近多项式由于计算过程过于复杂，且缺少一般算法，因此实践中更多地采用最佳平方逼近的方法．除此之外，在对离散的数据点进行数据拟合时，也往往借鉴会平方逼近的思想．

连续函数的最佳平方逼近涉及法方程的求解，而对于一般的基函数，法方程的系数矩阵即 Gram 矩阵性质往往很坏．正交多项式由于使得 Gram 矩阵成为对角阵，从而使问题得到了极大地简化．更进一步，某些正交多项式由于其良好的性质，不仅为具体的计算过程提供了方便，还为诸如最佳一致逼近、Lagrange 插值打开了新的思路．本次练习中的利用 Tchebychev 截断级数给出近似最佳一致逼近三次多项式便是一例．

考虑到上机实习题中的两个子问题本质上均为函数的广义 Fourier 级数展开，只是用于定义内积的权函数略有差异(具体说来 Legendre 多项式为$\rho(x)=1$，Tchebychev 多项式为$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)，因此下面统一给出二者的算法：

Step1：利用递推公式与初始基函数的表达式获得所需阶数的正交基函数；

Step2：通过计算目标函数与基函数的内积，结合已知的基函数模方，确定展开系数．

Step3：利用 S2 中获得的系数将 S1 中的基函数作线性组合得到最终的截断多项式．

这里着重讲一下 Tchebychev 级数的 Fourier 系数计算的问题.

第一种思路是利用原始的积分公式

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

由于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在端点$-1,1$处均为$\frac{1}{2}$阶极点，故上式属于瑕积分，若函数形式比较复杂，该积分甚至无法求解．考虑到瑕积分若收敛则在瑕点邻域积分有界，我们将积分区间从$[-1,1]$缩短为$[-1+\varepsilon,1-\varepsilon](\varepsilon>0)$，这样就从操作层面上使得积分可解，同时我们期望误差不超过一个较小的有限数M_ε(M_ε为瑕点邻域的积分上界).

第二种思路是做一个变换$x=cos\theta$，从而使上述公式化为了常义积分计算

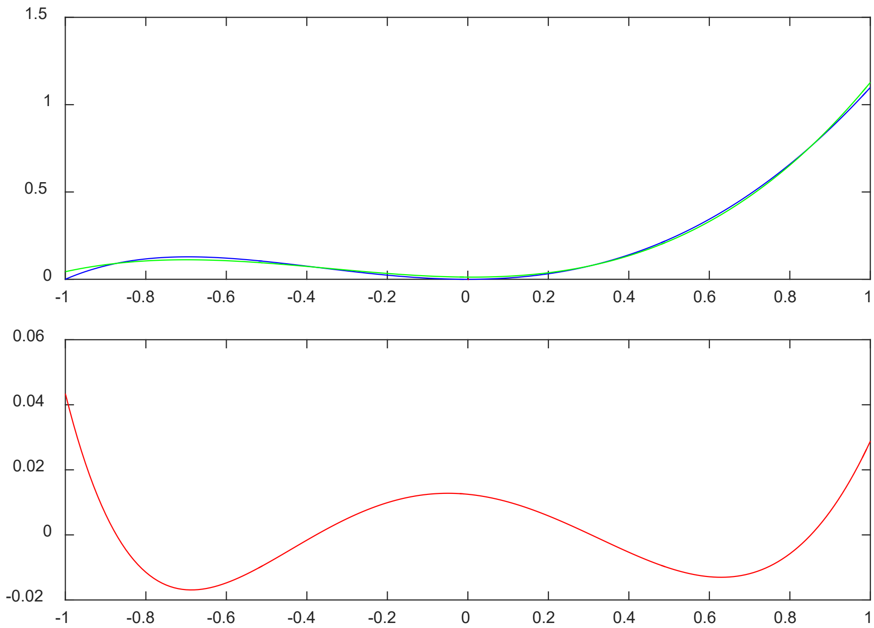
$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(cos\theta)cosk\theta d\theta.$$

三、方案设计

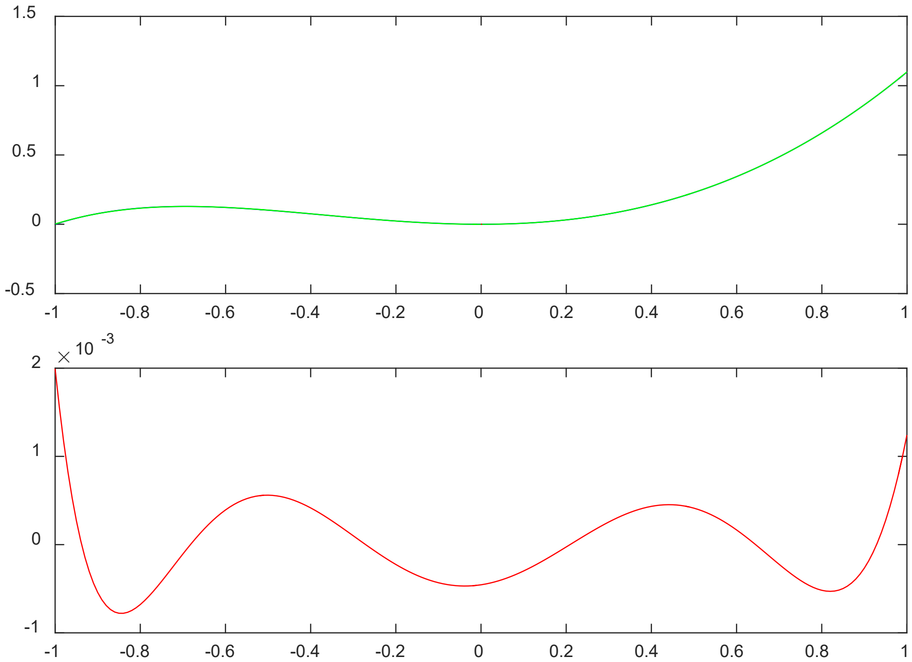
我们通过编写 Matlab 程序来实现对于任意给定函数、给定区间、给定逼近多项式次数要求下的上述两种正交多项式的截断逼近，并在同一张图内作出逼近函数与被逼近函数的图像以便比较．两个主程序文件分别为 app_Legendre.m，app_Tchebychev.m；每个文件的主程序输入变量均为被逼近函数、区间端点值与逼近多项式次数，程序最终将返回给定区间对应的函数图像．具体程序的实现可参见所给程序的相关注释.

四、计算结果及其分析

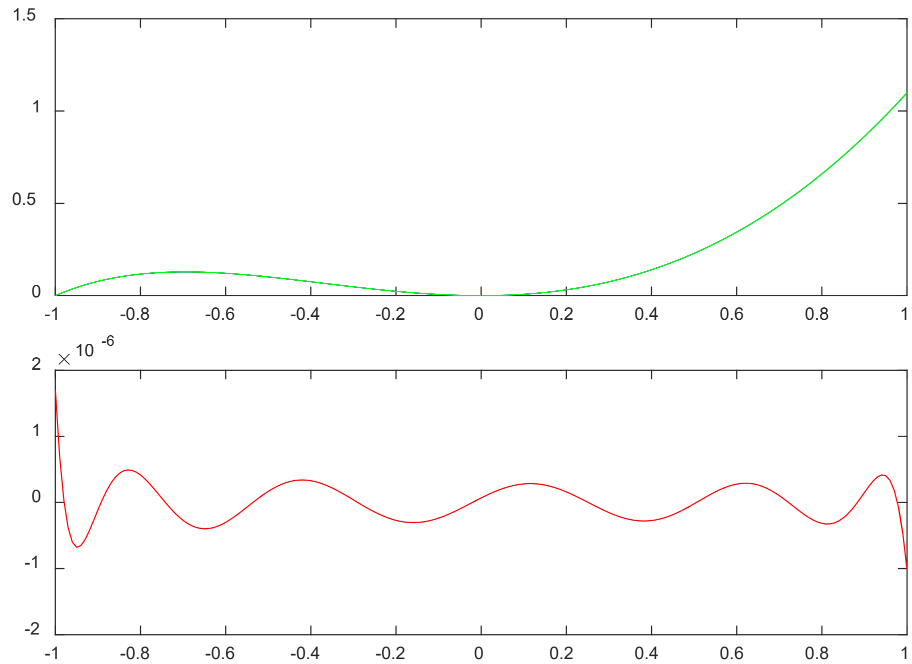
通过运行 Matlab 程序，我们得到了对应于$f(x)=x^2ln(2+x)$，$x\in[-1,1]$的各类逼近函数．其函数图像如下：



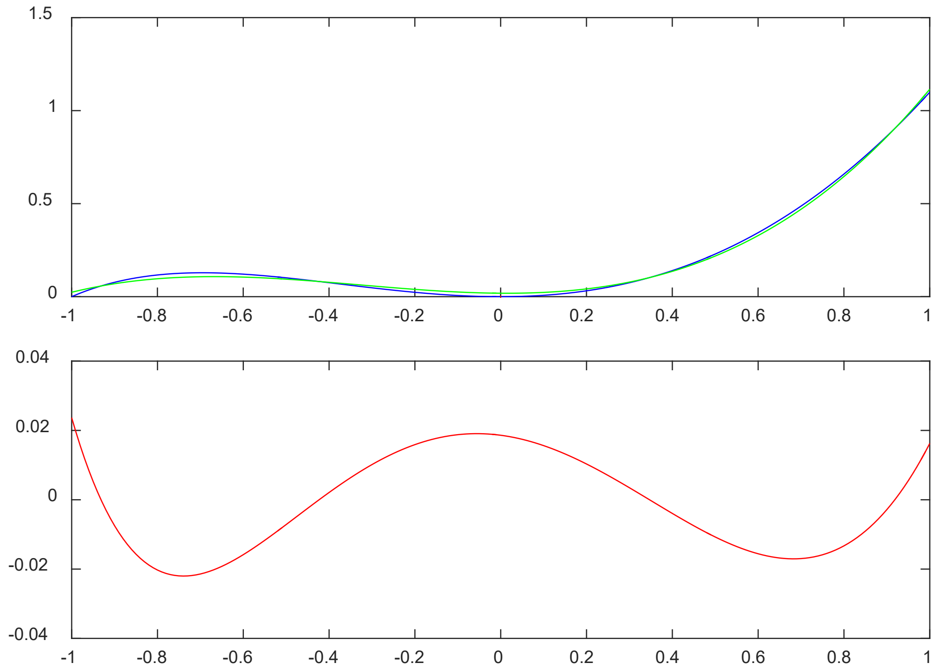
Picture1-1. $Legendre_3(x)$ $on[-1,1]$ // t=7.233s



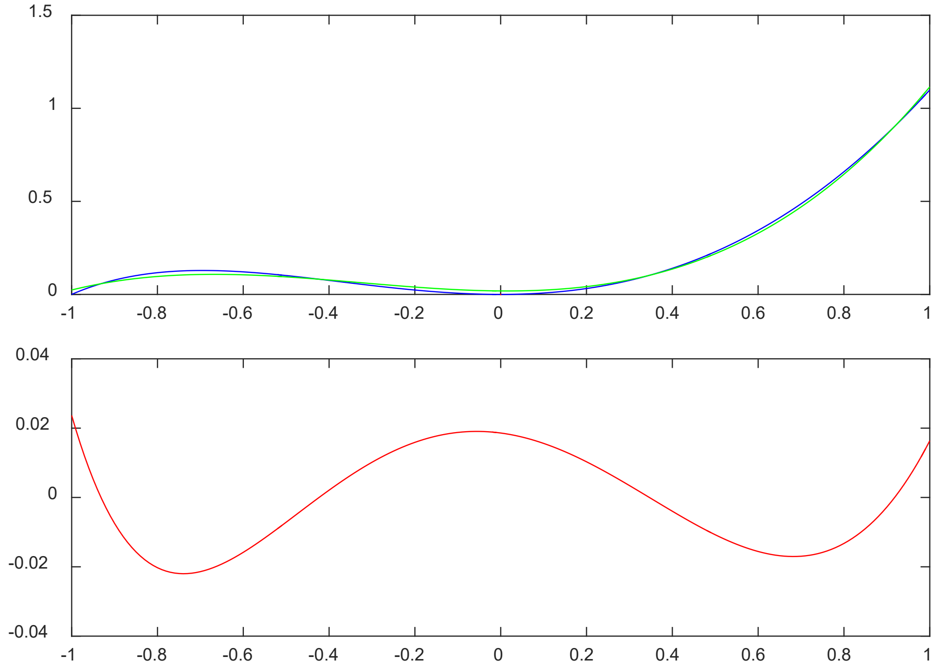
Picture1-2. $Legendre_5(x)\ on[-1,1]$// t=8.654s



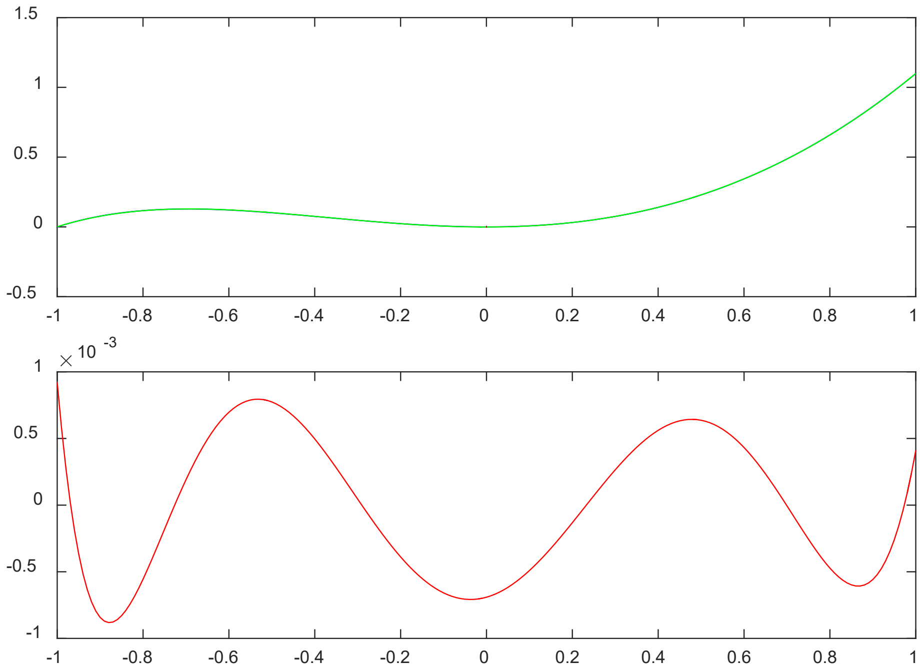
Picture1-3. $Legendre_{10}(x)\ on[-1,1]$ // t=12.347s



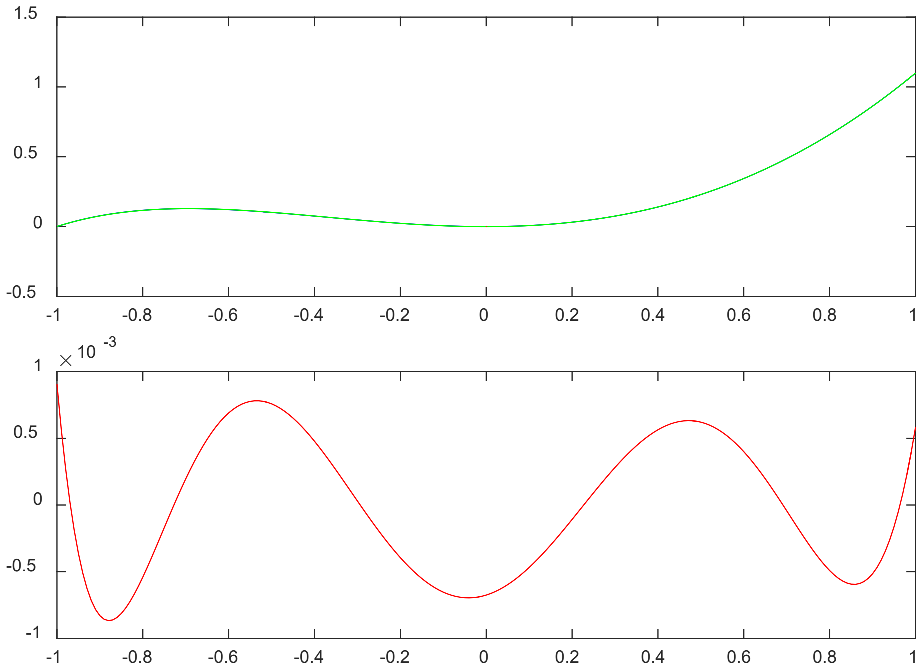
Picture2-1-1. $Tchebychev_3(x)$ $on[-1,1]$ // t=28.892s



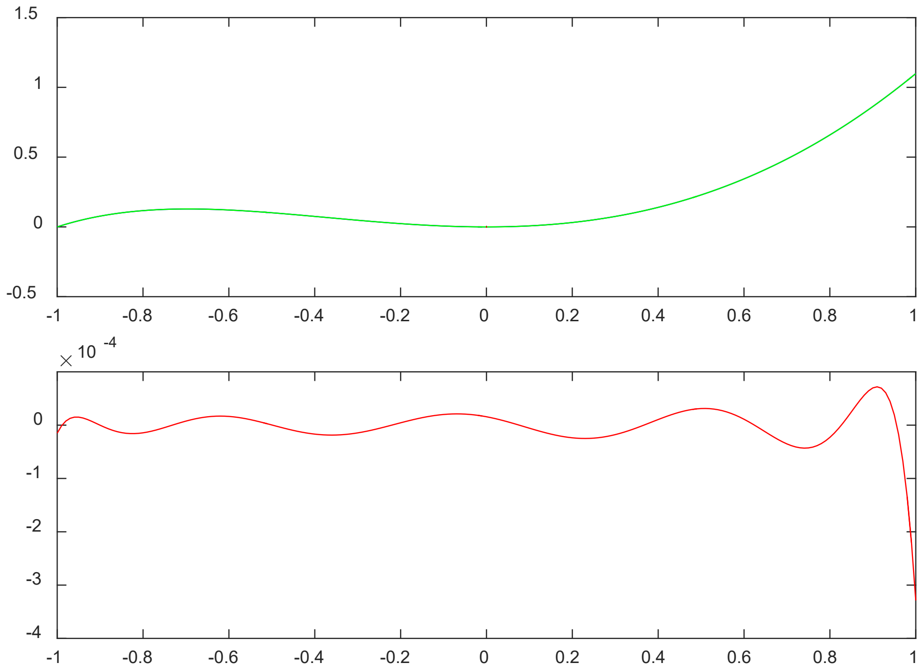
Picture2-1-2. $Tchebychev_3(x)$ $on[-1,1]$ // t=7.465s



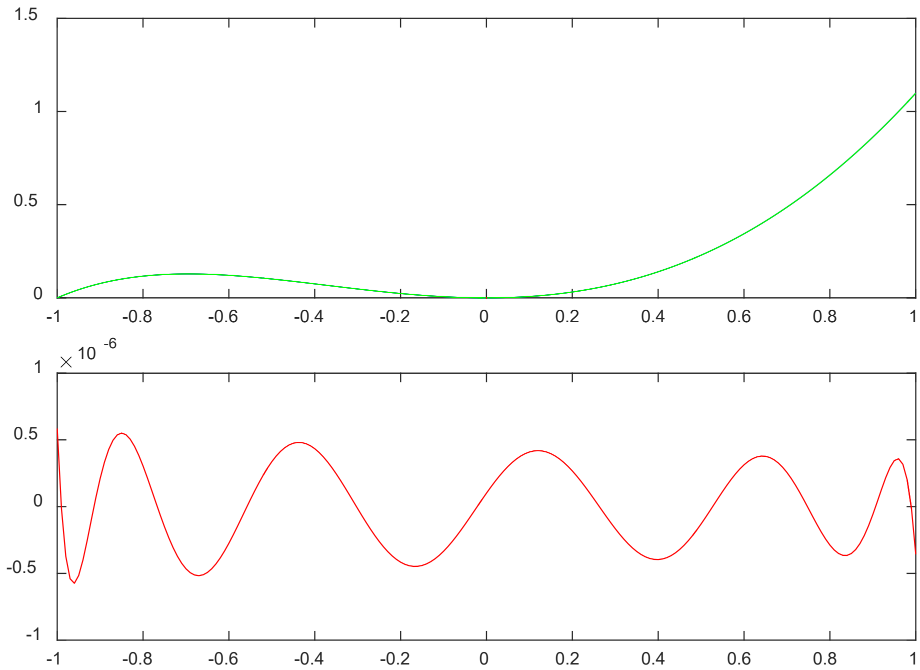
Picture2-2-1. $Tchebychev_5(x)\ on[-1,1]$ // t=44.809s



Picture2-2-2. $Tchebychev_5(x)\ on[-1,1]$ // t=8.345s



Picture2-3-1. $Tchebychev_{10}(x)\ on[-1,1]$ // t= 211.725 s



Picture2-3-2. $Tchebychev_{10}(x)\ on[-1,1]$ // t= 18.117 s

注：1. 上述图像中，绿线代表被插值函数，蓝线代表插值函数，红线代表逐点误差；

2. 对于 Tchebychev 截断多项式，图 2-X-1 为思路 1 对应结果，图 2-X-2 为思路 2 对应结果；

3. 为了比较不同算法的效率，在图像说明中均附有计算耗时.

从上述一系列图像中我们可以看到，在题干中选定的目标逼近函数下，横向比较 Legendre 截断多项式与 Tchebychev 截断多项式(思路 2)，二者无论从函数逼近的误差还是计算耗时的角度考察都比较接近；而纵向比较之下，Tchebychev 截断多项式(思

路 1)则要显得逊色许多．分析这一结果，我们认为这很大程度上是因为被逼近函数表达式比较复杂，并且符号函数与双精度实数间的转换过程(尤其是函数中含有根号)耗时较多，这都使得思路 1 中的瑕积分计算变得极为复杂．

五、结论

在本次上机实验中，通过比较两种正交多项式方法的结果，从图像中我们直观地看到了 Legendre 多项式与 Tchebychev 多项式的逼近效果．总体来说效果是相近的，但 Fourier 系数因积分公式的不同选择而呈现出了较大的差异．由上一小节对实例更进一步的分析可以总结得出，在函数逼近算法中积分运算这一步是一大短板，也是程序耗时与计算误差的主要来源．

因此，一个非常重要的经验是，根据正交多项式的类型有针对性地设计数值积分的算法在函数逼近中是极为关键的一环．