FDM solver for 2D square driven problem

huangyf15

目录

4 Problem 4: 不可压问题之方腔驱动流

4.1 定解问题的描述

二维不可压缩方腔驱动流的无量纲形式的控制方程如下

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \nabla p + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{u}. \end{cases} \tag{4.1}$$

几何区域为 $(x,y) \in [0,1]^2$，边界条件如下

$$\begin{aligned} x = 0 &: u = v = 0, \\ x = 1 &: u = v = 0, \\ y = 0 &: u = v = 0, \\ y = 1 &: u = 1, v = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 有限差分离散及边界处理

4.2.1 涡量-流函数法

我们采用涡量-流函数法求解上述定解问题。涡量-流函数法的基本思想是通过联立 N-S 动量方程消去难于直接计算的压力项，从而将控制方程转化为与之等价的关于涡量 $\omega := u_y - v_x$ 的对流扩散方程

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \omega. \tag{4.3}$$

结合流函数的定义

$$\partial_x \psi = -v,\ \partial_y \psi = u \tag{4.4}$$

以及涡量-流函数的关系

$$\nabla^2 \psi = \omega \tag{4.5}$$

即构成了一组完备的方程,可以通过反复迭代未知量 $(u,v) \to$(4.3)$\to \omega \to$(4.5)$\to \psi \to$(4.4)$\to (u,v)$ 进行求解。如果要计算压力，可以通过联立 N-S 动量方程消去非定常项，求解如下的压力 Poisson 方程即可获得压力分布。

$$\nabla^2 p = -\left\{ (\partial_x u)^2 + 2\partial_y u \cdot \partial_x v + (\partial_y v)^2 \right\}.$$

4.2.2 差分离散格式的构造

方程 (4.3) ~ (4.5) 的差分离散是直接的，其中涡量方程 (4.3) 采用 FTCS、一阶或二阶迎风格式离散并沿时间方向进行推进，流函数定义 (4.4) 采用二阶或三阶格式离散来计算，流函数方程 (4.5) 采用二阶中心差分格式离散并采用 Gauss-Seidel 迭代，格式的具体表达式可参考文献 [2] 的相应部分。需要指出的是，讲义中关于 Poisson 方程的迭代格式推导有误，正确的格式表达式如式 (4.6) 所示。

$$\psi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{\bar{h}^2}{4} \left(\frac{\psi_{i+1,j}^{(k)} + \psi_{i-1,j}^{(k+1)}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{(k)} + \psi_{i,j-1}^{(k+1)}}{(\Delta y)^2} - \omega_{i,j} \right). \tag{4.6}$$

其中，$\overline{h}^2 = 2/[1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2]$。

选取时间步长时考虑的约束主要来自涡量的对流扩散方程 (4.3)。定义 CFL 数 $c = u_m \Delta t/\Delta x$ 和 Sigma 数 $\sigma = \nu \Delta t/(\Delta x)^2$，则稳定性条件要求 $c^2/2 \le \sigma \le 1/2$。考虑到方腔流的无量纲 N-S 方程定解问题中，$u_m = 1$，$\nu = 1/\mathrm{Re}$，$\Delta x = \mathrm{d}\,s := \min\{\mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y\}$，因此稳定性条件等价于 $\Delta t \le \min\{\mathrm{Re} * \mathrm{d}\,s^2/2, 2/\mathrm{Re}\}$。

4.2.3 边界条件的处理

这一小节给出涡量 ω 和流函数 ψ 在边界处的值或离散表达式。流函数 ψ 的边界条件是容易给出的，由于方腔边界是一条流线（更严格的讨论可以根据流函数定义式以及速度边界条件给出），因此在边界上可取 $\psi = 0$。对于涡量 ω，由 $\omega := u_y - v_x$ 可知，在 $x = 0$, $x = 1$ 上有 $\omega = -v_x = \psi_{xx}$，在 $y = 0$, $y = 1$ 上有 $\omega = u_y = \psi_{yy}$，因此只需要对 ψ 的二阶导数进行离散，这里采用二阶精度的中心差分格式

$$\psi_{yy;i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}.$$

问题在于，当 (i, j) 为边界点时，上式中需要引入虚拟网格点。下面我们仅以边界 $y = 1$ 为例给出离散格式的构造方法，其余边界上的思路是类似的。这时，网格点上的差分格式为

$$\omega_{i,N_y+1} = \psi_{yy;i,N_y+1} = \frac{\psi_{i,N_x+2} - 2\psi_{i,N_x+1} + \psi_{i,N_x}}{(\Delta y)^2}. \tag{4.7}$$

其中，ψ_{i,N_x+2} 为虚拟网格点，需要利用插值方法得到。注意到，如果用三阶精度的格式进行如下离散

$$1 \equiv u_{i,N_y+1} = \psi_{y;i,N_y+1} \simeq \frac{2\psi_{i,N_y+2} + 3\psi_{i,N_y+1} - 6\psi_{i,N_y} + \psi_{i,N_y-1}}{6\Delta y},$$

则可以将 $\psi_{i,Ny+2}$ 解出，再代入式 (4.7) 中可得

$$\omega_{i,N_y+1} = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(-\frac{7}{2}\psi_{i,N_y+1} + 4\psi_{i,N_y} - \frac{1}{2}\psi_{i,N_y-1} + 3\Delta y\right). \tag{4.8}$$

这样就得到了边点上 ω 的离散表达式。对于角点，可以采用如下的近似方式处理

$$\omega_C = \frac{1}{2}\left(\omega_{C,x} + \omega_{C,y}\right).$$

4.3 程序实现及算例结果

4.3.1 程序实现方案

CFD05_squaredriven2D.m 主函数，包括初始化、计算流场与压力及作图等。

include_flags.m 载入全局变量，包括空间离散参数、特征参数以及迭代参数等。

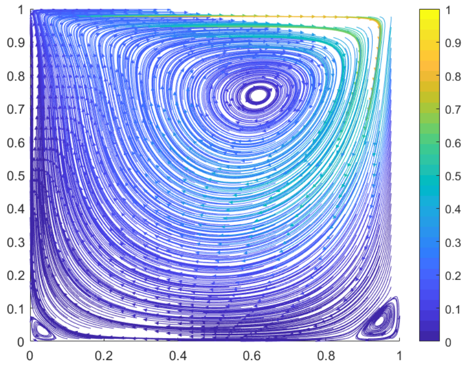
input_file.m 载入求解域，包括空间离散、变量初始化、施加边界条件及迭代参数赋值。

cal_uv.m 计算流场，包括涡量对流扩散方程求解、流函数 Poisson 方程迭代以及流场更新。

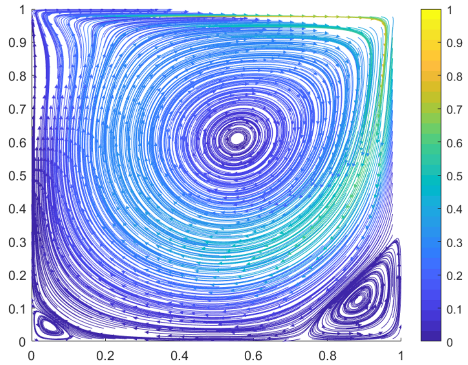
cal_pres.m 计算压力分布，即由 (u, v) 的值通过迭代求解压力 Poisson 方程获得。

4.3.2 算例结果及分析

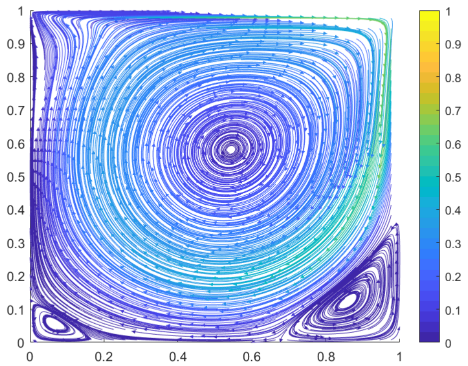
采用每个方向为 $N_x = N_y = 128$ 的均匀网格，取 CFL 数为 0.1，通过测试可以发现，不同格式给出的结果类似。图 8 给出了采用 FTCS 格式求解 $\mathrm{Re} = 100, 400, 1000, 10000$ 下的方腔驱动流的流场结果，可以看到不同雷诺数下流场结构的差异。



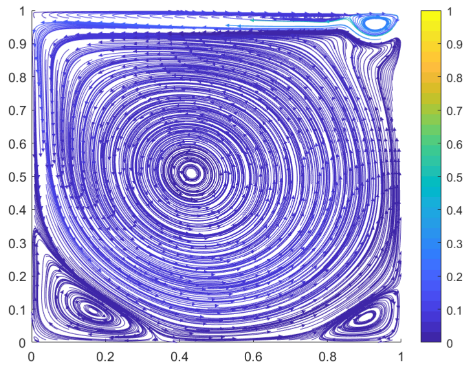
(a) Re = 100



(b) Re = 400



(c) Re = 1000



(d) Re = 10000

图 8: 不同雷诺数下的方腔流结果

参考文献

[1] Z.-S. Sun et al. Journal of Computational Physics 230 (2011) 4616–4635.

[2] 任玉新，陈海昕．计算流体力学基础．北京：清华大学出版社，2006．

[3] 陶文铨．数值传热学（第 2 版）．北京：清华大学出版社，2002．