

FDM/FVM solvers for 1D shock wave problem (I)

huangyf15

1 Problem

激波管问题。设有一充满理想完全气体的无穷长直管，绝热指数 $\gamma = 1.4$ 。初始时刻物理量分布为：

$$W(x, 0) = (\rho, u, p)(x, 0) = \begin{cases} (1, 0.75, 1) & x \leq 0 \\ (0.125, 0, 0.1) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

用 Rusanov 格式、Jameson 和一、二阶 FVS 格式（时间导数采用前差离散）求解该问题（计算域取 $(-0.5, 0.5)$ ，计算到 $t=0.25$ ）；取不同网格数，研究数值解与网格数之间的关系；观察数值解在间断附近的行为。

注：通过控制计算时间，使流动结构不发展到边界。这样，边界处保持初始值，以方便边界条件处理。如果 Jameson 格式计算发散，可以适当调节人工黏性系数。

Figure 1: Problem

2 Algorithm A (general)

2.1 Control equations

题干中对应于一维 Euler 方程，如式 (2.1) 和 (2.2) 所示，前者为守恒形式，后者为拟线性形式。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

其中，守恒变量、系数矩阵、通量分别为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma-3)\frac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u E & -\frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 - \gamma E & \gamma u \end{pmatrix} =: R\Lambda L,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma-1)\left(\varepsilon - \frac{m^2}{2\rho}\right) \\ \frac{m}{\rho}\left(\varepsilon + (\gamma-1)\left(\varepsilon - \frac{m^2}{2\rho}\right)\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

上述表达式中各参数之间的关系为

$$\varepsilon = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

$$\Lambda = \text{diag}\{u, u+a, u-a\},$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

2.2 Difference scheme and boundary condition

这里，我们将 $(\rho, m, \varepsilon)^T$ 作为守恒变量来间接求得基本变量 $(\rho, u, p)^T$ 的演化。差分格式的构造将基于守恒型方程，应用如下的半离散形式的守恒格式。进一步地，按照题干要求，时间方向我们采用前差离散。

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (*)$$

另外，由于二阶格式在边界附近将涉及虚拟点，为简便起见，我们在边界附近均采用一阶格式进行离散。

2.3 Grid generation: stability

为了保证格式的稳定性，我们考察 CFL 数

$$CFL = u \frac{\Delta t}{\Delta x} = u \frac{N_x}{4N_t}.$$

取特征速度 $u = 1$ ，并置 CFL 条件为 $CFL \leq 0.5$ ，则由上式可得划分网格数的原则为

$$\frac{N_x}{N_t} \leq 2. \quad (**)$$

在求解算例时，我们置 $N_t = 2000$ ，因此只需保证 $N_x \leq 4000$ 即可。

3 Algorithm B (specific)

3.1 Central difference scheme

中心型差分格式可由一维情形直接推广而来。对于一阶情况，其对应于式(*)的通量可写为

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{j+1} + \mathbf{F}_j) + \mathbf{D}_{j+1/2}.$$

这里， $\mathbf{D}_{j\pm 1/2}$ 是为保证中心差分稳定性添加的人工粘性项，并且为保证格式总体守恒，需要上式满足守恒格式的相容性条件。

3.1.1 Rusanov scheme

Rusanov 格式的人工粘性项定义为

$$\mathbf{D}_{j+1/2} = -|\lambda_{\max}|_{j+1/2} \varepsilon_{2,j+1/2} (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j). \quad (3.1)$$

其中，参数 $\varepsilon_{2,j+1/2} = 0.5$ ，其余参数的定义为

$$|\lambda_{\max}|_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(|\lambda_{\max}|_j + |\lambda_{\max}|_{j+1} \right) \text{ or } \max \left(|\lambda_{\max}|_j, |\lambda_{\max}|_{j+1} \right).$$

3.1.2 Jameson scheme

Jameson 格式的人工粘性项定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{j+1/2} = & -|\lambda_{\max}|_{j+1/2} \varepsilon_{2,j+1/2} (\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) \\ & + |\lambda_{\max}|_{j+1/2} \varepsilon_{4,j+1/2} (\mathbf{U}_{j+2} - 3\mathbf{U}_{j+1} + 3\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j-1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中，参数 $|\lambda_{\max}|_{j+1/2}$ 的定义同上，其余参数的定义为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,j+1/2} &= k^{(2)} \max(\nu_{j+2}, \nu_{j+1}, \nu_j, \nu_{j-1}), \\ \nu_j &= \frac{|p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}|}{|p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}|}, \\ \varepsilon_{4,j+1/2} &= \max \left(0, k^{(4)} - \varepsilon_{2,j+1/2} \right). \end{aligned}$$

可调参数的参考范围为

$$0.5 \leq k^{(2)} \leq 0.6, \quad \frac{1}{128} \leq k^{(4)} \leq \frac{1}{64}.$$

3.2 Upwind difference scheme

迎风格式的构造要点在于只能使用下游模板点的信息，这就要求我们在时间推进的过程中逐点、逐分量地判断对流项的方向，从而选择合适的空间离散方式。根据分裂方式的不同，可以分为 SCM 以及 FVS 等方法。前者为分裂拟线性方程的系数矩阵，对于任意的拟线性方程均适用；而后者则是直接对守恒型方程的通量进行分裂，主要应用于方程的通量为守恒变量的齐次函数的情形。

由于 Euler 的守恒型方程具有如上的齐次性质，因此可以应用 FVS 格式进行求解，其数值通量的分裂方式为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= A\mathbf{U} = A^+\mathbf{U} + A^-\mathbf{U} =: \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-, \\ A &=: R\Lambda L = R\Lambda^+L + R\Lambda^-L =: A^+ + A^-.\end{aligned}$$

特征值矩阵分裂项的形式为

$$\begin{aligned}\Lambda^+ &= \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|), \\ \Lambda^- &= \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|).\end{aligned}$$

3.2.1 1-order FVS

对于一阶情况，其对应于 (*) 的通量可写为

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}^+)_j + (\mathbf{F}^-)_{j+1} \right), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_{j-1/2} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}^+)_{j-1} + (\mathbf{F}^-)_j \right). \quad (3.4)$$

3.2.2 2-order FVS

对于二阶情况，其对应于 (*) 的通量可写为

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \left(1.5(\mathbf{F}^+)_j - 0.5(\mathbf{F}^+)_{j-1} \right) + \left(1.5(\mathbf{F}^-)_{j+1} - 0.5(\mathbf{F}^-)_{j+2} \right), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F}_{j-1/2} = \left(1.5(\mathbf{F}^+)_{j-1} - 0.5(\mathbf{F}^+)_{j-2} \right) + \left(1.5(\mathbf{F}^-)_j - 0.5(\mathbf{F}^-)_{j+1} \right). \quad (3.6)$$

4 Results and discussions

格式的稳定性在算法部分已作了较为详细的说明。这一节，我们主要考察格式的色散耗散特性，以及网格划分与参数取值对结果的影响。

4.1 Evolution of density field

我们首先以密度场演化为例，从整体上考察格式的色散耗散特性。图 2(a) ~ 2(d) 给出了各种格式下密度场的演化图象。

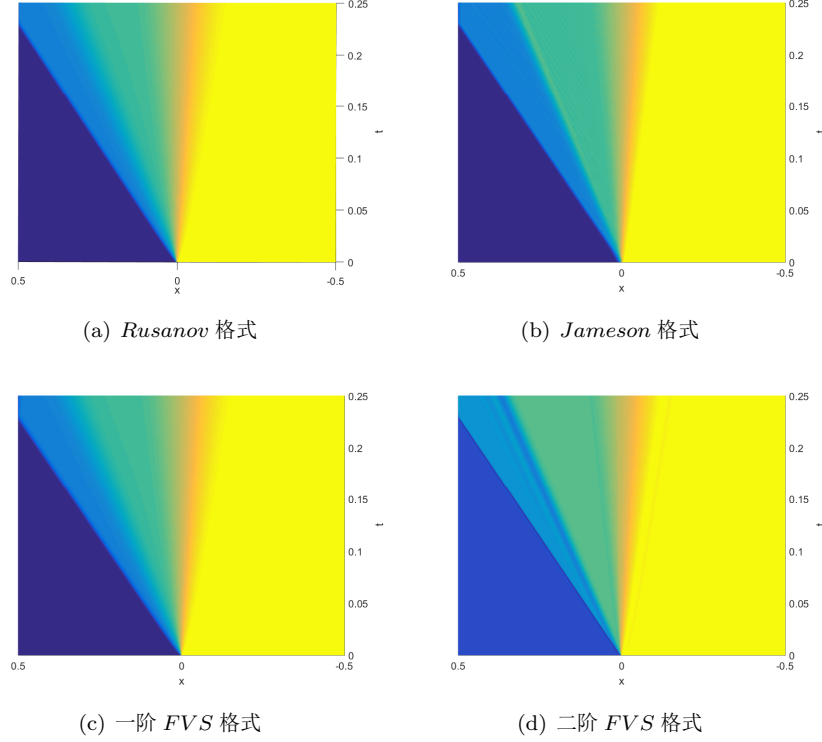


Figure 2: 各种格式下密度场的演化图象 $N_x = 400$, $N_t = 2000$

由上述图像可以较为直观地看出各种格式的特性，具体包括

- 图 2(a)、2(c) 表明间断被抹平，显示了一阶格式 (*Rusanov* 格式和一阶 *FVS* 格式) 的耗散特性。
- 图 2(b)、2(d) 的光滑区均出现了明显的振荡现象，显示了二阶格式 (*Jameson* 格式和二阶 *FVS* 格式) 在光滑区的色散特性。
- 在图 2(b)、2(d) 的间断附近，*Jameson* 格式较为平滑，而二阶 *FVS* 格式则出现了剧烈的振荡。这表明在间断附近，前者呈现耗散特性，而后者则呈现色散特性。

4.2 Rusanov scheme

这里， λ_{\max} 直接取为绝对值最大的特征值的绝对值。图 3(a) ~ 3(d) 给出了 *Rusanov* 格式下的守恒变量分布。

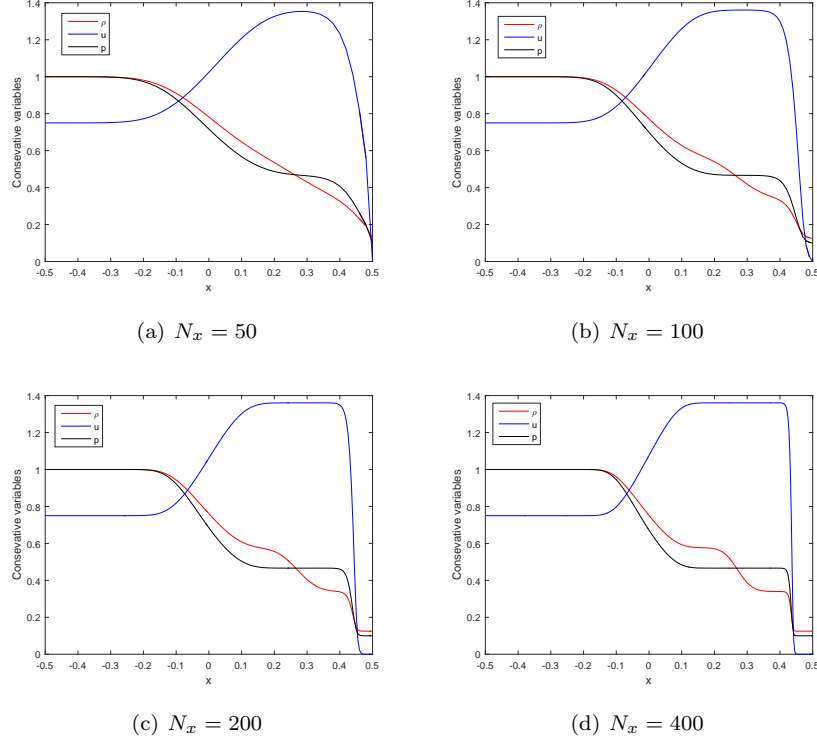


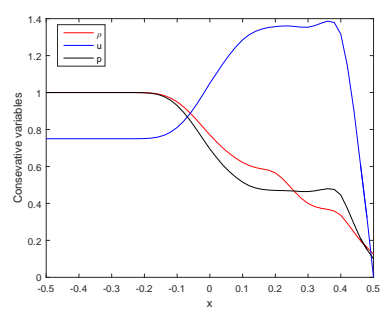
Figure 3: *Rusanov* 格式下的守恒变量分布 (Time = 0.20)

如前所述，该格式的耗散特性是明显的。但是随着网格的加密，格式对接触间断的捕捉能力明显增强，这表明格式的精度有了很大的提升。

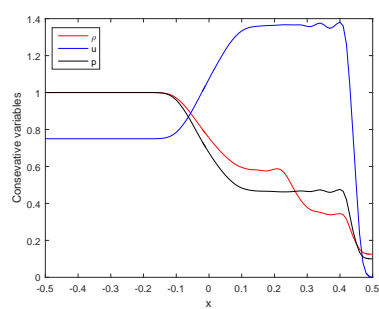
4.3 Jameson scheme

这里， λ_{\max} 仍直接取为绝对值最大的特征值的绝对值。图 4(a) ~ 4(d) 给出了 $k_2 = 10$, $k_4 = \frac{1}{64}$ 时守恒变量的分布，其中 k_2 的取值已接近最优。

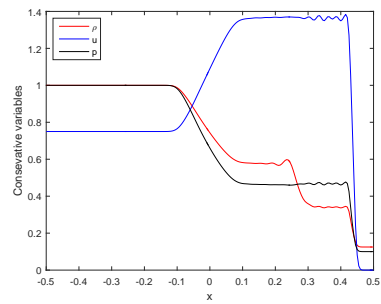
该格式在光滑区主要由四阶耗散项起作用，由于拥有二阶精度而具有一定的色散性质；在间断附近则主要由二阶耗散项，由于拥有一阶精度而具有一定的耗散性质。这样，通过在激波附近引入二阶人工粘性项，抑制了数值解在激



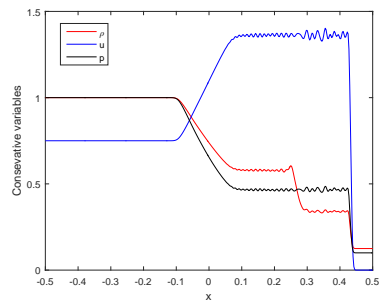
(a) $N_x = 50$



(b) $N_x = 100$



(c) $N_x = 200$



(d) $N_x = 400$

Figure 4: *Jameson* 格式下的守恒变量分布 (Time = 0.20)

波附近的非物理振荡，从而使该格式具有了一定的激波捕捉能力；同时，通过在光滑区引入四阶人工粘性项，改善了中心型格式的稳定性，同时不影响格式的空间精度。

由于参数 k_2 决定了二阶耗散项的量级，因此可用于抑制四阶耗散项在光滑区的色散作用，数值实验验证了这一判断的正确性。上述图像给出了参数 k_2 最优取值下的计算结果。

4.4 1-order FVS

矩阵 Λ 的分裂方式是原对角阵加减绝对值最大的对角元的绝对值对应的纯量阵。图 5(a) ~ 5(d) 给出了一阶 *FVS* 格式下的守恒变量分布。该格式的特性与 Rusanov 格式是类似的，这里不再赘述。

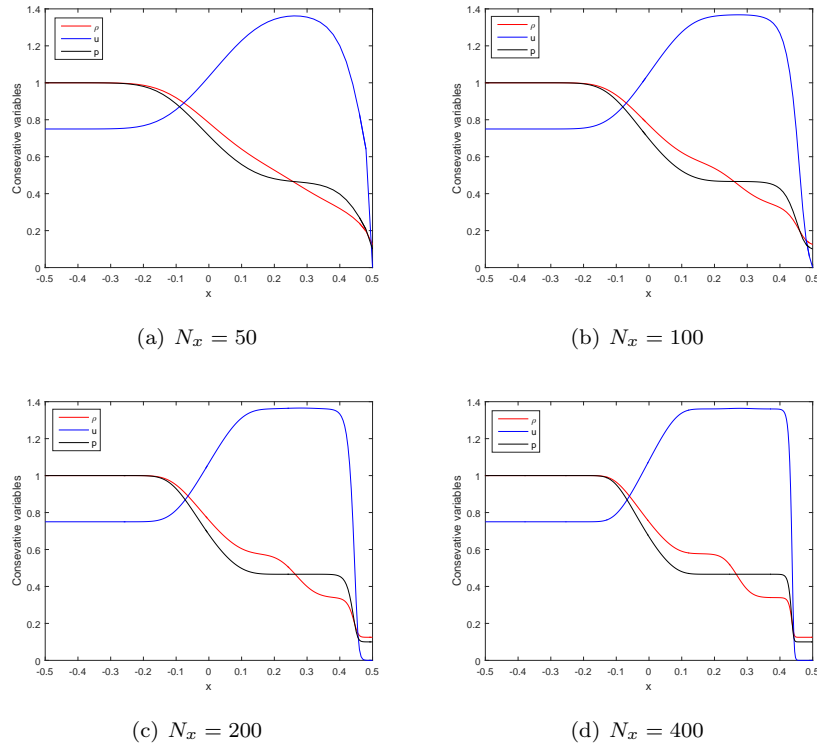


Figure 5: 一阶 *FVS* 格式下的守恒变量分布 (Time = 0.20)

4.5 2-order FVS

矩阵 Λ 的分裂方式是原对角阵加减绝对值最大的对角元的绝对值对应的纯量阵。图 6(a) ~ 6(d) 给出了二阶 *FVS* 格式下的守恒变量分布。特别地，图 7 给出了二阶 *FVS* 格式下密度场的演化图象。由此可见，二阶 *FVS* 格式在间断附近仍然具有剧烈的振荡特征，但在平滑区却没有明显振荡，这与 Jameson 格式是有很大的差异的。

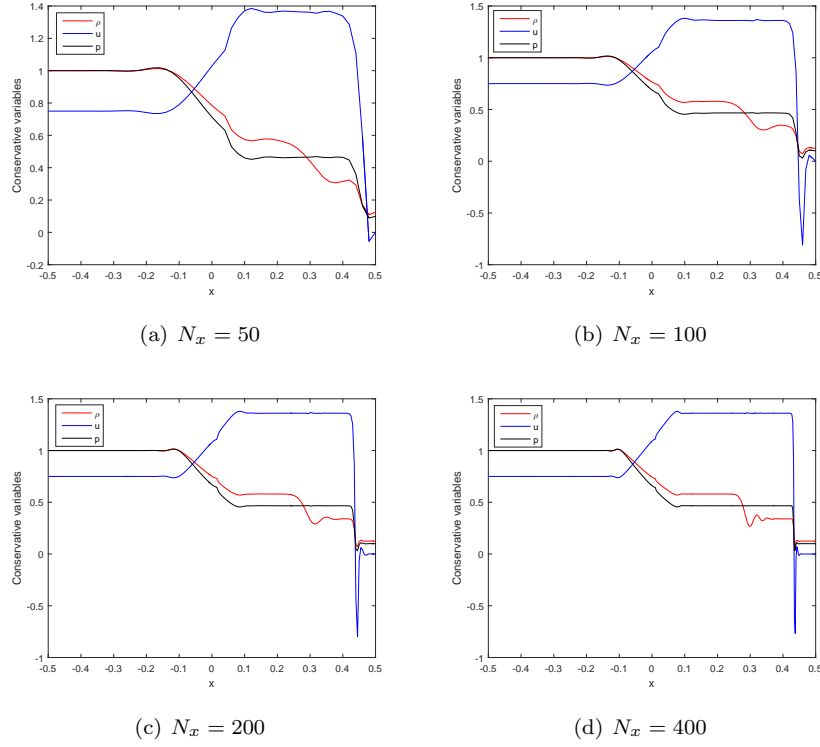


Figure 6: 二阶 *FVS* 格式下的守恒变量分布 (Time = 0.20)

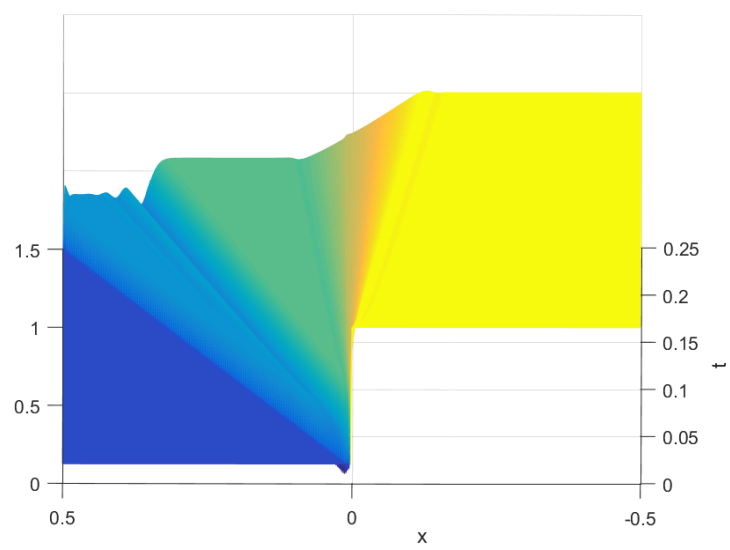


Figure 7: 二阶 *FVS* 格式下密度场的演化图象 (*from 45°*)