FDM solvers for 1D wave problem (I)

huangyf15

1 Problem

本题要求用有限差分方法求解一维线性波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的初边值问题。其求解域为

$$(x,t) \in [-0.5, 0.5] \times [0, \infty].$$

对应初值条件的形式为

$$f(x)\begin{cases} 0 & , -0.5 < x < -0.25 \\ 1 & , -0.25 \le x \le 0.25 \\ 0 & , 0.25 < x < 0.5 \end{cases}$$

边界上满足周期条件。

2 Solution

算法的具体实现可参考 MATLAB 程序，下同。

2.1 Prescribed schemes

差分格式的实现是显明的，周期性边界条件对应于差分矩阵的循环性质，这里不再赘述。取 x 方向的网格数为 1000，相应的数值结果如图 $1 \sim 3$ 所示。

由图示结果可见，一方面，一阶精度格式比二阶精度的耗散速度更快，这是由于此时耗散误差相较于色散误差的阶数更低，色散效应即数值振荡效应不会出现；另一方面，二阶精度格式在间断附近的色散效应非常明显，这则是源于这时的色散误差由于阶数更低而被保留下来。不同的是，Lax-Wendroff 格式

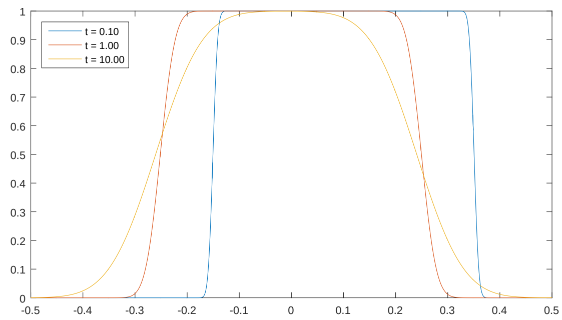

Figure 1: 1st-order Upwind scheme, $CFL = 0.5$

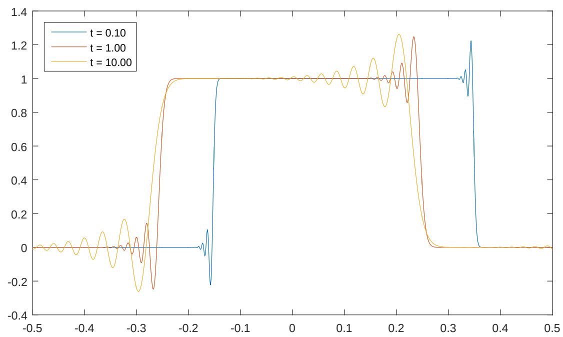

Figure 2: Lax-Wendroff scheme, $CFL = 0.5$

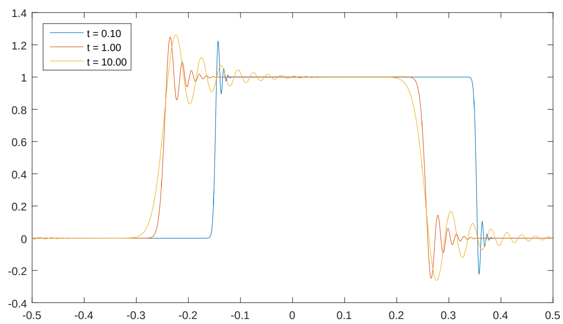

Figure 3: Warming-Beam scheme, $CFL = 0.5$

的振荡出现在下游间断处，而 Warming-Beam 格式的振荡则出现在上游，这一差异源于色散前后相速度变化的差异。若色散为正色散，则色散波将领先于原波，从而振荡将出现在下游；反之，色散波则将落后于原波，振荡将出现在上游。

2.2 User-defined scheme

2.2.1 U1D2 scheme

我们利用基于特征线法的线性插值构造差分格式。具体地说，是利用上游的第二个点与下游的第一个点构造出如下一阶精度的差分格式（不妨称之为 U1D2 格式）

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{3}\left((2-c)u_{j+1}^n + (1+c)u_{j-2}^n\right). \tag{2.1}$$

其中 c 为 CFL 数。由 Lax 等价性定理容易知道，U1D2 格式收敛的充要条件为 $|c| \leq 2$。

取 x 方向的网格数为 1000，相应的数值结果如图 4 所示。

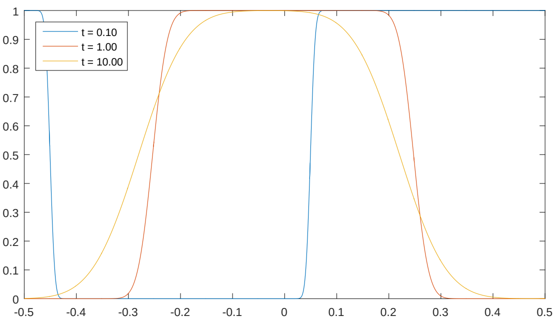

Figure 4: U1D2 scheme, $CFL = 0.5$

可以看到上面的结果与上一小节对耗散与色散性质的分析是相符的。

2.2.2 U1D12M scheme

这一小节我们来验证本次作业第二题通过加权平均 Warming-Beam 与 Lax-Wendroff 构造出的新格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{3}\left((2-c)\left(u_j^{n+1}\right)_{L-W} + (1+c)\left(u_j^{n+1}\right)_{W-B}\right). \tag{2.2}$$

进而有

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{6}\left(a_{j+1}u_{j+1}^n + a_j u_j^n + a_{j-1}u_{j-1}^n + a_{j-2}u_{j-2}^n\right). \tag{2.3}$$

其中 c 为 CFL 数，系数表达式分别为

$$\begin{aligned}
a_{j+1} &= -c(c-1)(c-2),\\
a_j &= 3(c+1)(c-1)(c-2),\\
a_{j-1} &= -3(c+1)c(c-2),\\
a_{j-2} &= (c+1)c(c-1).
\end{aligned}$$

纸质版解答中已经指出，这一格式等价于利用上游的前两个点、中游点、下游的第一个点构造的 3 次 Lagrange 插值函数（不妨将其命名为 U1D12M 格式）。由 Lax 等价性定理容易知道，U1D12M 格式收敛的充要条件为 $|c| \leq 1$。

取 x 方向的网格数为 1000，相应的数值结果如图 5 所示。

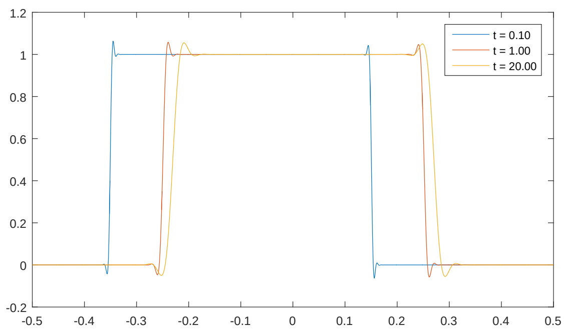

Figure 5: U1D12M scheme, CFL = 0.1

可以看到上面的结果中，耗散效应体现得并不明显，反而是色散性质更为突出，这与纸质版作业中关于耗散与色散性质的讨论是有所差别的。我们推测，这一矛盾源于二者的量级都很小，而色散效应往往更易于识别。