Stability Analysis of Self-excited oscillation

huangyf15

Contents

1 自激振动系统的稳定性分析

由题意，动力系统定义如下

$$\ddot{\eta} + 0.02(1 - 1.1\dot{\eta}^2 + 0.1\dot{\eta}^4)\dot{\eta} + (1 - 2.0069 \times 10^{-2}\eta^2 + 6.9444 \times 10^{-5}\eta^4)\eta = 0. \tag{1.1}$$

为了数值模拟的方便，可讲上述常微分方程等价变换为如下的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(1 - 2.0069 \times 10^{-2}x^2 + 6.9444 \times 10^{-5}x^4)x - 0.02(1 - 1.1y^2 + 0.1y^4)y. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了精度和效率起见，这里我们应用 Runge-Kutta 方法数值求解 (1.2)。同时在驻点附近将采用沿径向 δr 线性取点、沿周向 φ 随机取点的方式生成初值，通过轨迹末端走向来考察驻点和极限环的吸引性质。图 1 展示了动力系统的相图，其中选取了 10000 个初值，并采用 1×10^{-2} 的时间步长进行了 5000 步迭代。

将方程 (1.1) 中的 $\dot{\eta}$ 和 $\ddot{\eta}$ 置零，可推得如下的 5 个驻点

$$\eta_0 = 0,\ \eta_{\pm 1} \doteq \pm 8.0001488,\ \eta_{\pm 2} \doteq \pm 14.9997689$$

容易看到，动力系统关于原点中心对称，因此我们将只考察右半平面上几个驻点的性质。除此之外，从图 1 可见，在 $(\eta, \dot{\eta}) \in [15, 30] \times [-12, -5]$ 附近存在渐近吸引子，后面我们也将会简单考察其性质。

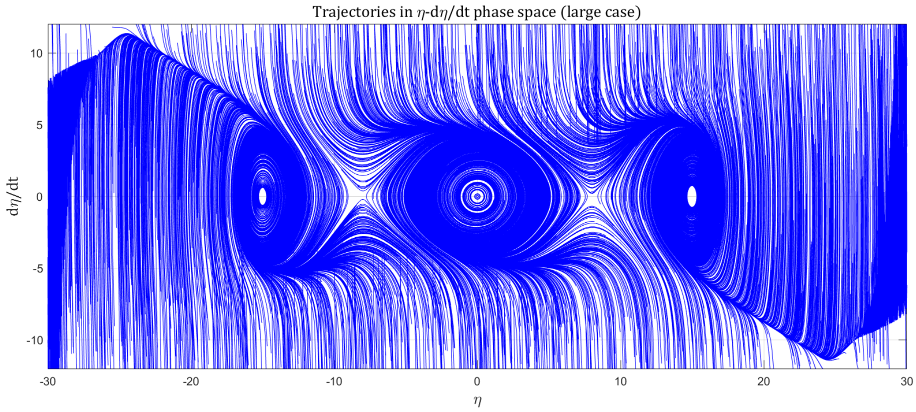


Figure 1: 动力系统的相图全貌（迭代时间步长为 1×10^{-2}）

1.1 驻点和极限环的稳定性

这里我们置样本点数量为 10 个，同时时间步长设置为 1×10^{-3}。结果如图 2 和图 3 所示，其中红圈标记驻点，绿圈标记轨迹起点。由图可见，η_0 为稳定驻点，$\eta_{\pm 1}$ 为鞍点，$\eta_{\pm 2}$ 为稳定驻点；最后两驻点的周围存在不稳定的极限环，再往外是另一稳定的极限环。

1.2 渐近吸引子的性质

这里我们置样本点数量为 10 个，同时时间步长设置为从 1×10^{-2} 到 1×10^{-5}。结果如图 4 所示。从中可见，迭代时间步长越短，采用 R-K 方法模拟得到的渐近吸引子越准确。

下面基于方程 (1.2) 对渐近线的方程作简单的估计。当 $x \equiv \eta$ 和 $y \equiv \dot{\eta}$ 都充分大时，方程 (1.2) 可近似为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} \sim \alpha x^5 + \beta y^5. \end{cases} \tag{1.3}$$

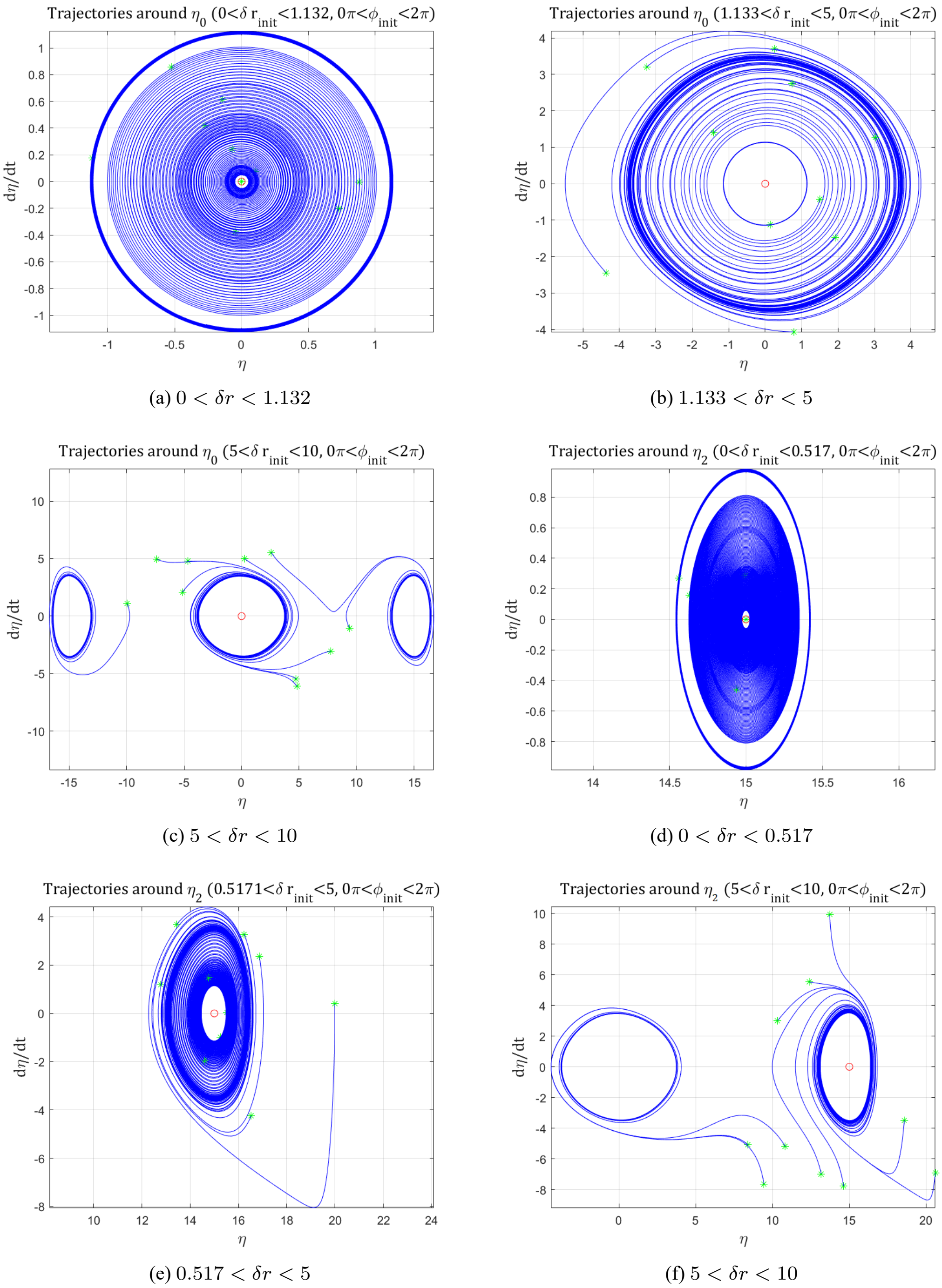
从而

$$y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \simeq \alpha x^5 + \beta y^4 \tag{1.4}$$

其中 $\alpha := -6.9444 \times 10^{-5}$ 而 $\beta := -2 \times 10^{-3}$。假定渐近线方程为 $y \simeq kx$，将其代入式 (1.4)，可得

$$\alpha + \beta k^5 \simeq \frac{k^2}{x^4} \sim 0. \tag{1.5}$$

由此可知 $k \approx (-\alpha/\beta)^{1/5} \approx 0.51$。这一估计与模拟结果是十分接近的（见图 4）。



(a) $0 < \delta r < 1.132$

(b) $1.133 < \delta r < 5$

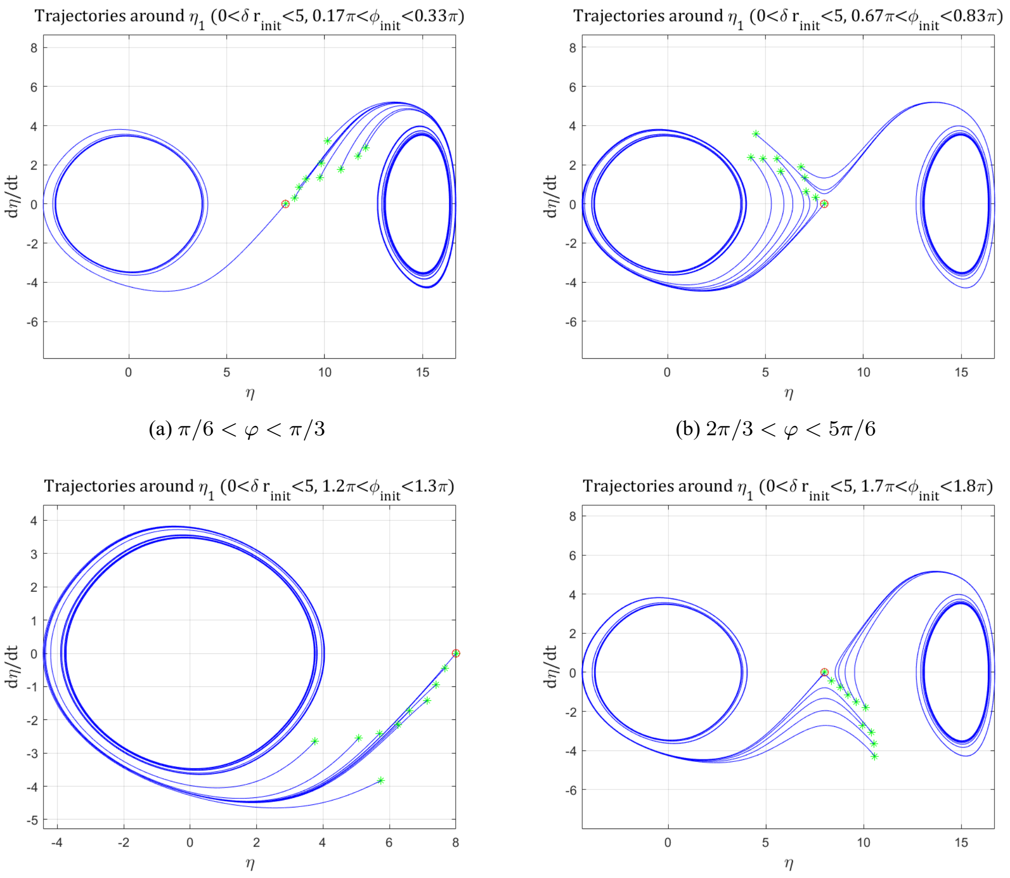
(c) $5 < \delta r < 10$

(d) $0 < \delta r < 0.517$

(e) $0.517 < \delta r < 5$

(f) $5 < \delta r < 10$

Figure 2: 稳定驻点 η_0 和 η_2 附近的轨迹



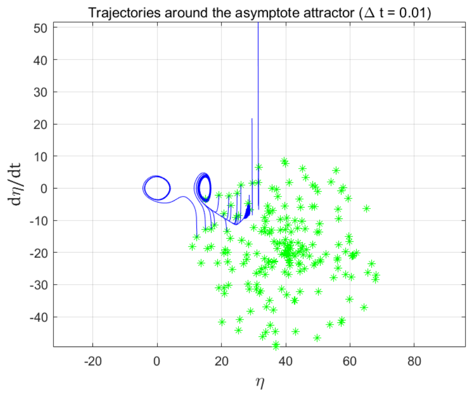
(a) $\pi/6 < \varphi < \pi/3$

(b) $2\pi/3 < \varphi < 5\pi/6$

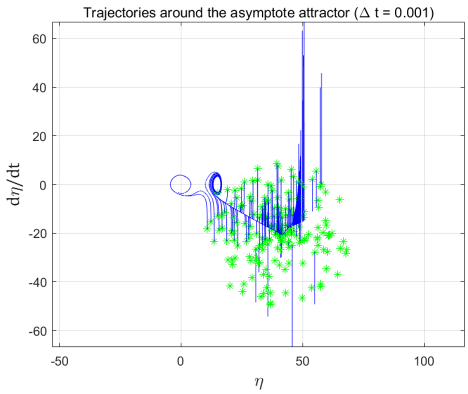
(c) $-5\pi/6 < \varphi < -2\pi/3$

(d) $-\pi/3 < \varphi < -\pi/6$

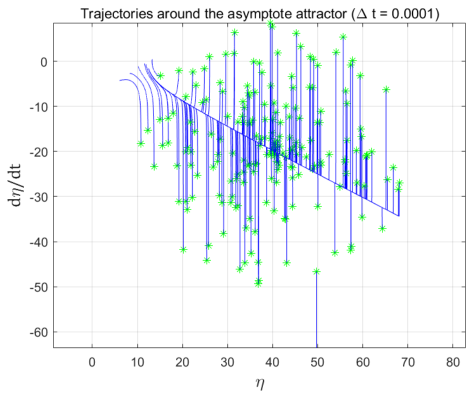
Figure 3: 鞍点 η_1 附近的轨迹



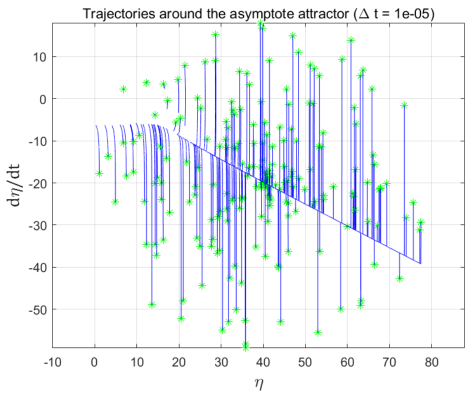
(a) $\Delta t = 1 \times 10^{-2}$



(b) $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$



(c) $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$



(d) $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$

Figure 4: 渐近吸引子附近的轨迹