

FDM solver for heat conduction problem

huangyf15

1 Case 1: 1D Problem

本题要求用有限差分方法求解一维非定常热传导方程的初边值问题。其求解域为

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty]. \quad (1.1)$$

对应初边值条件的形式为

$$u(x, 0) = f(x), \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad (1.3)$$

$$u(1, t) = b(t). \quad (1.4)$$

算法的具体实现可参考 MATLAB 程序，下同。

1.1 Discretization and difference schemes

边界条件的离散在本题中是容易的，这里主要讨论对微分方程的离散，即 FTCS 与 BTCS 两种差分格式。

1.1.1 FTCS scheme

FTCS 格式对时间变量采用前差公式，从而成为显示格式，因此在推进求解时非常直接。FTCS 格式的具体递推形式为

$$u_k^{n+1} = \sigma u_{k+1}^n + (1 - 2\sigma)u_k^n + \sigma u_{k-1}^n. \quad (1.5)$$

其中，步长特征量 $\sigma := \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2}$ 。当且仅当 $\sigma \leq \frac{1}{2}$ 时，上述格式才是稳定的，后续的算例也验证了这一结论的合理性。

1.1.2 FTCS scheme

BTCS 格式对时间变量采用后差公式，从而成为隐式格式。由于模板点含有待求时间层的多个未知量，因此在求解时需要先构造差分矩阵，然后对以之为系数矩阵的线性方程组进行求解。BTCS 格式的具体递推形式为

$$\sigma u_{k+1}^{n+1} - (1 + 2\sigma)u_k^{n+1} + \sigma u_{k-1}^{n+1} = -u_k^n. \quad (1.6)$$

其中，步长特征量 σ 与上一小节相同，此时只要 $\sigma \geq 0$ 格式即稳定。具体证明详见本人纸质版作业 4，后续的算例也在一定程度上验证了该结论的合理性。

我们指出，BTCS 对应线性方程组的形式为

$$Q\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^n \quad (1.7)$$

其中，

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \sigma & -(1+2\sigma) & \sigma & & & \\ & \sigma & -(1+2\sigma) & \sigma & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sigma & -(1+2\sigma) & \sigma \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_0^{n+1} & u_1^{n+1} & u_2^{n+1} & \cdots & u_{M-1}^{n+1} & u_M^{n+1} \end{pmatrix}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^n = \begin{pmatrix} a(t_{n+1}) & -u_1^n & -u_2^n & \cdots & -u_{M-1}^n & b(t_{n+1}) \end{pmatrix}^T.$$

1.2 Examples, results and discussions

1.2.1 Steady boundary condition

根据题目要求，算例的初始条件为

$$f(x) \begin{cases} 0 & , 0 < x < 0.3 \\ 1 & , 0.3 \leq x \leq 0.6 \\ 1 + 2.5(x - 0.3) & , 0.6 < x < 1.0 \end{cases}$$

相应的定常边界条件为

$$a(t) = 0, \quad b(t) = 2 \quad (1.8)$$

我们在计算中人为选定的量为空间网格点数 N_x ，步长特征量 σ 与目标时间层向量 T （以推进步数为单位）。推进步数 N_t 取为 T 中的最大层数值，空间

步长 Δx 、时间步长 Δt 、作图实际时间 $TIME$ 分别可由空间网格点数以及步长特征量确定。我们将对目标时间层的系统图像作图，并将各时间层的图像置于同一坐标系中以便显示系统的演化过程。为完整起见，我们这里给出在上述初边值条件下，作图时间层对应实际时间的计算式

$$TIME(i) = \frac{\sigma T(i)}{N_x^2}. \quad (1.9)$$

下面我们给出算例结果。其中，FTCS 格式的对应图 1~3，BTCS 格式的对应图 4~6。对于推进层数，除 FTCS 格式的 $\sigma = 1.0$ 情形的推进层数由于稳定性的缘故而有所不同外，其余算例的推进层数向量均为 $T = [0, 1000, 2000, 5000, 10000]$ 。

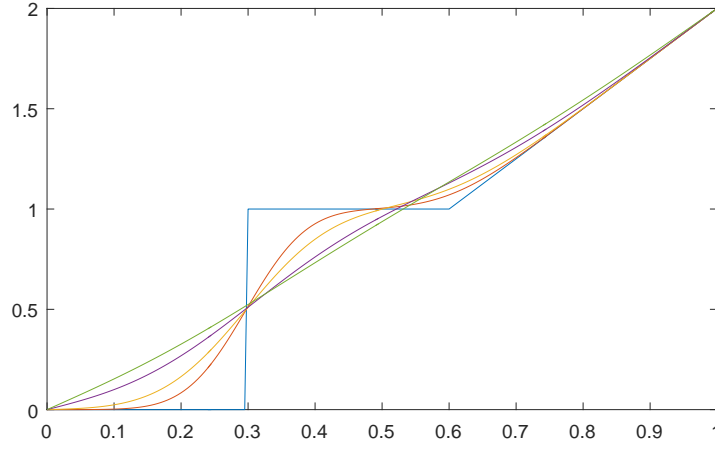


Figure 1: [FTCS] $\sigma = 0.1$, $N_x = 200$

下面我们对算例给出的结果进行讨论。

- 光滑效应。这里是指热传导过程使得系统各处温度趋于平衡的性质，这一性质在阶跃点附近的温度演化过程中体现得尤为突出。
- 收敛速度。从算例结果中可以看出，步长特征量对收敛速度的影响是显著的，而改变网格点的数目（注意网格点均匀）也会有类似的效果。这很容易从它们对时间步长的影响上加以解释。具体地说，无论是减小步长特征量还是加密网格，其结果都是缩短了时间步长，从而收敛到给定精度所需的推进步数增加，收敛速度降低。
- 格式稳定性。由算例结果清晰可见，不再赘述。

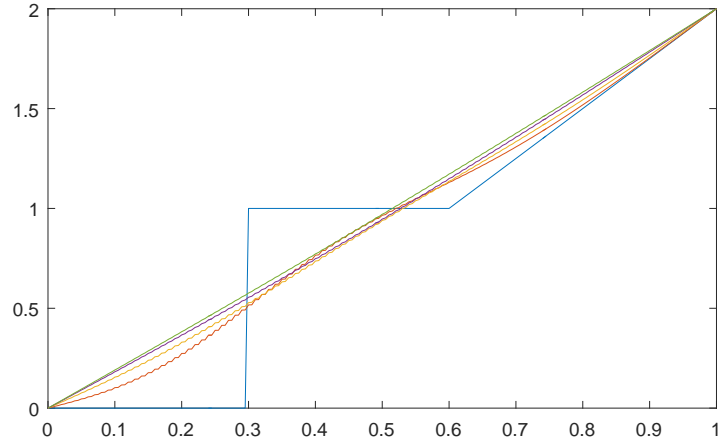


Figure 2: $[FTCS]$ $\sigma = 0.5$, $N_x = 200$

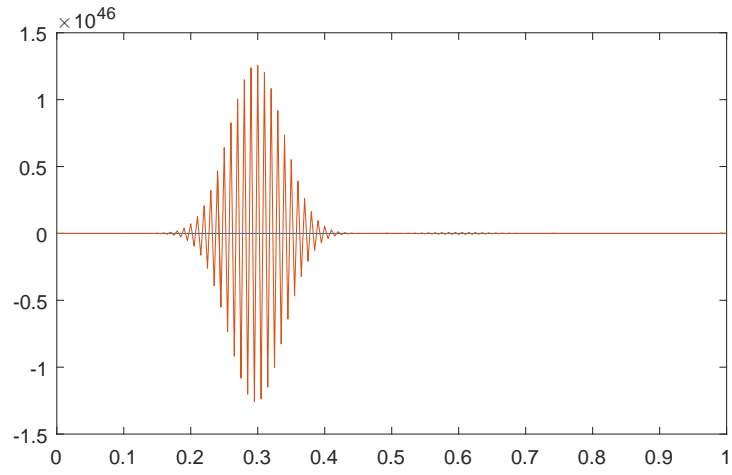


Figure 3: $[FTCS]$ $\sigma = 1.0$, $N_x = 200$, $T = [0, 100]$

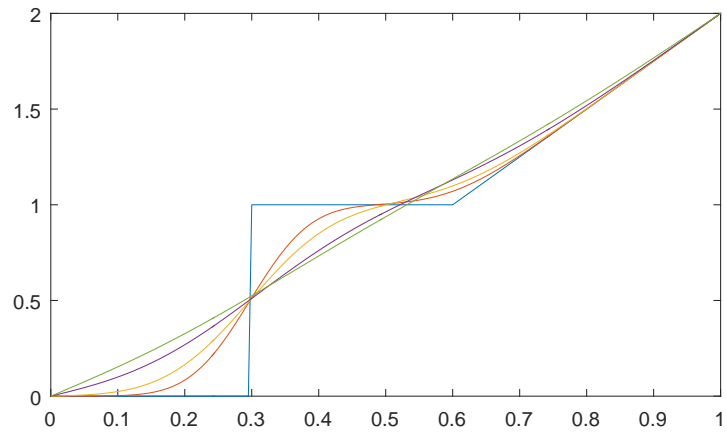


Figure 4: $[BTCS]$ $\sigma = 0.1$, $N_x = 200$

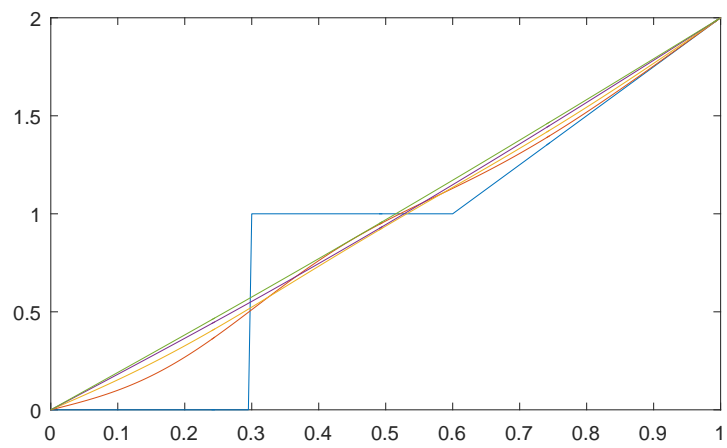


Figure 5: $[BTCS]$ $\sigma = 0.5$, $N_x = 200$

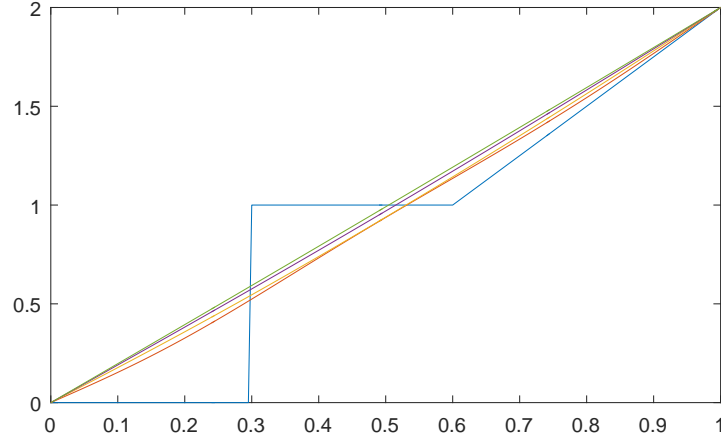


Figure 6: [BTCS] $\sigma = 1.0$, $N_x = 200$

1.2.2 Unsteady boundary condition

这时，算例的初始条件同上，边界条件变为非定常的，即

$$a(t) = 0, \quad b(t) = 2 + \sin \omega t \quad (1.10)$$

为了更好地突出非定常性，我们先对边界条件变化一个周期所对应的推进步数 N_T 做一个估计。令

$$\frac{2\pi}{\omega} = TIME$$

结合式 (1.9)，此时应有 $T(i) = N_T$ ，则有

$$\omega N_T = \frac{2\pi N_x^2}{\sigma}. \quad (1.11)$$

为明确起见，我们采用 BTCS 格式，并取如下 7 个时间层

$$T = [0, 125, 250, 375, 500, 750, 1000]$$

作图，具体参数及结果如图 7 所示。

从图 7 中可以看出，边界条件的非定常性对边界附近区域的演化过程影响非常显著，但对远离边界条件的区域的影响实际上十分有限。具体来说，通过细致的观察我们可以看到振荡边界与热传导过程耦合时，在边界产生的振荡波在向区域内传播时，其衰减的速度是很快的，这也是出现上述现象的原因。

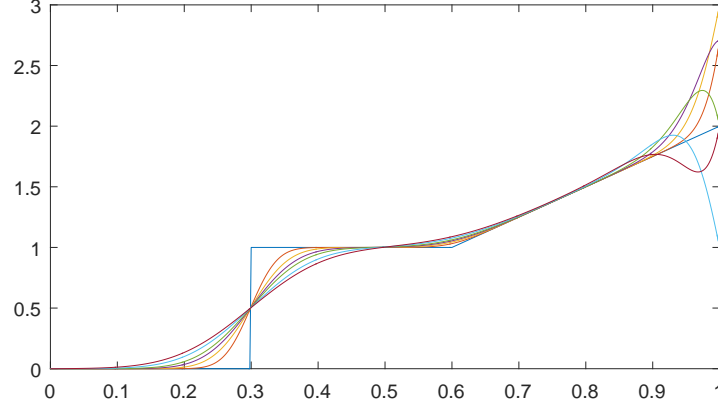


Figure 7: [BTCS] $\sigma = 1.0$, $N_x = 500$, $N_T = 1000$, $\omega = 500\pi$

2 Case 2: 2D Problem

这里将第 1 节中的非定常热传导方程初边值问题推广至二维，并仍将热传导系数 γ 置于 1。首先指出求解域为

$$(x, y, t) \in \Omega \times [0, \infty], \Omega := [0, 1] \times [0, 1] \quad (2.1)$$

对应初边值条件的形式为

$$u(x, y, 0) = IC(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (2.2)$$

$$u(x, y, t) = BC(x, y, t), (x, y) \in \partial\Omega \quad (2.3)$$

这里我们采用 FTCS 格式，其具体形式为

$$u_{j,k}^{n+1} = \sigma_1 u_{j,k+1}^n + \sigma_2 u_{j+1,k}^n + (1 - 2\sigma_1 - 2\sigma_2) u_{j,k}^n + \sigma_1 u_{j,k-1}^n + \sigma_2 u_{j-1,k}^n. \quad (2.4)$$

其中，步长特征量 $\sigma_1 := \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2}$, $\sigma_2 := \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta y)^2}$ 。该计算格式稳定的充要条件为 $\sigma_1 + \sigma_2 \leq \frac{1}{2}$ ，这将从算例中得到一定程度的验证。这里要指出的是，在实际操作中，由于通过上述两个特征量确定的时间步长并不总是保持一致，我们将选取二者中较小的那个以尽可能确保格式的稳定性。

下面我们给出算例。其初始条件为

$$IC(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x, y) \in \Omega' := (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 2xy & , (x, y) \in \Omega \setminus \Omega' \end{cases} \quad (2.5)$$

相应的定常与非定常边界条件分别为

$$BC_s(x, y, t) = 2xy \quad (2.6)$$

$$BC_{us}(x, y, t) = 2xy + \sin \omega t \quad (2.7)$$

其中, $(x, y) \in \partial\Omega$ 。

类似地, 我们在计算中人为选定的量为空间网格点数 N_x 、 N_y , 步长特征量 σ_1 、 σ_2 与目标时间层向量 T (以推进步数为单位, 默认为等差列)。推进步数 N_t 取为 T 中的最大层数值; 空间步长 Δx 、 Δy , 时间步长 Δt , 作图实际时间 $TIME$ 分别可由空间网格点数以及步长特征量确定。我们将对目标时间层得系统图像作图, 并将各时间层的图像按时间顺序排列以便显示系统的演化过程。在实际操作中, 我们将空间网格点数固定为 100×100 , 通过改变步长特征量与时间尺度 N_t 来探究其对系统演化与计算格式稳定性的影响。

对于上述振荡边界条件, 其非常数性估计可通过与第 1 节类似的讨论获得, 这里直接给出如下的计算式

$$\omega N_T = \frac{2\pi N_i^2}{\sigma_i}. \quad (2.8)$$

为确定起见, 我们将特征参数置于 $\omega = 80\pi$, 这对应于 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$ 、 $N_x = N_y = 100$ 、 $N_T = 1000$ 的情形。

下面我们给出算例结果。其中, 图 8~9 为定常边界条件下选取不同时间尺度的系统演化图景, 我们可以由此获得细节性与整体性两方面的认识; 图 10~11 展示了步长特征量的选取对计算格式稳定性的影响, 由此也在一定程度上验证了此前的结论; 图 12~13 为振荡边界条件下单周期与双周期时间尺度的系统演化图景, 我们可以看到此时初始条件的影响是微乎其微的, 这容易从空间相对于稳态的非均匀性衰减至均匀状态所需的时间尺度远小于振荡边界的周期上加以解释。这里仅指出热传导方程的解遵从的演化规律为 $e^{-\frac{(\Delta x)^2}{t}}$ 。

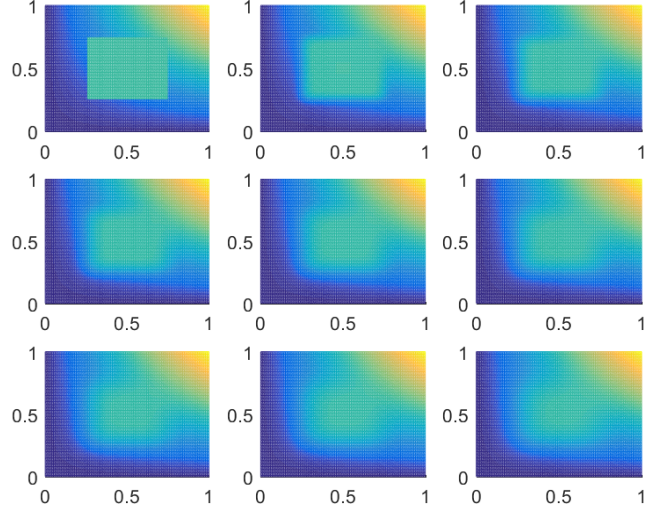


Figure 8: *[Steady]* $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $N_t = 160$

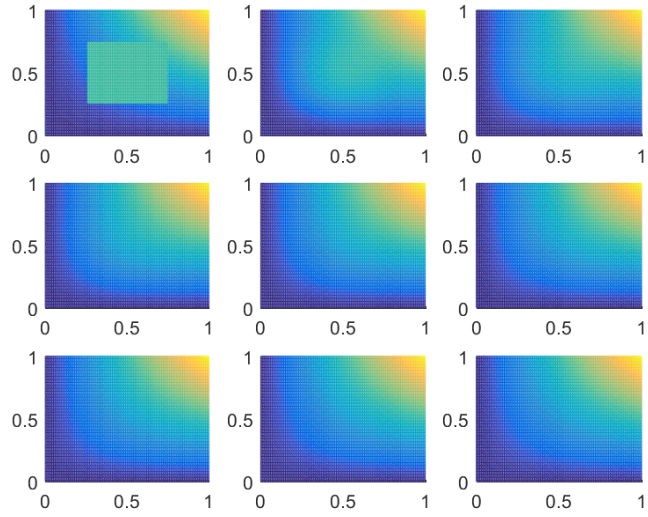


Figure 9: *[Steady]* $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $N_t = 3000$

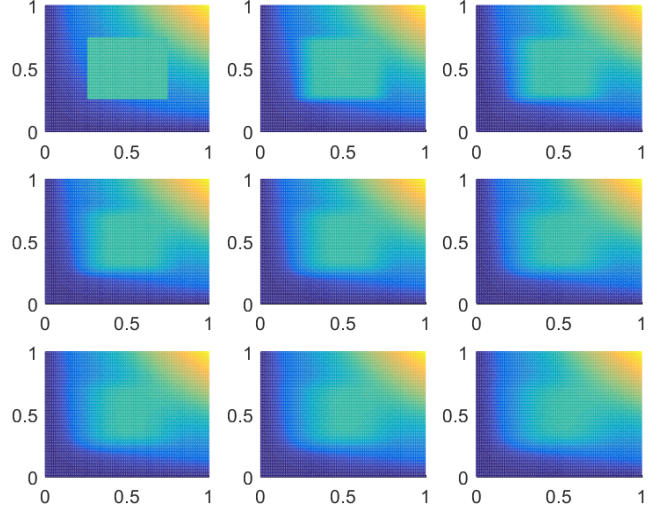


Figure 10: *[Steady]* $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.25$, $N_t = 160$

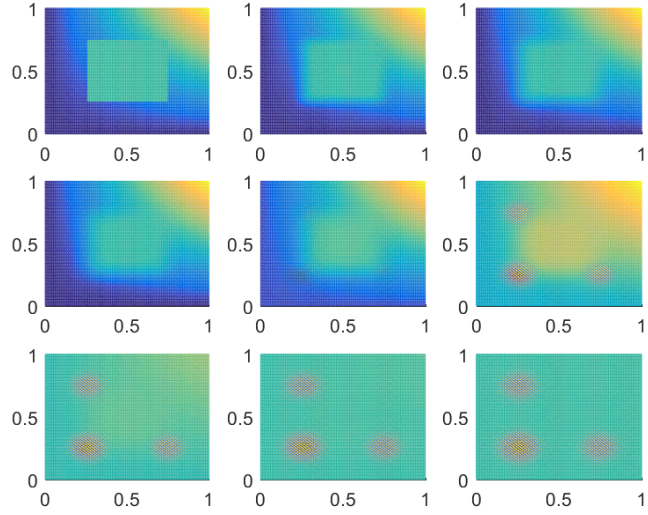


Figure 11: *[Steady]* $\sigma_1 = \sigma = 0.26$, $N_t = 160$

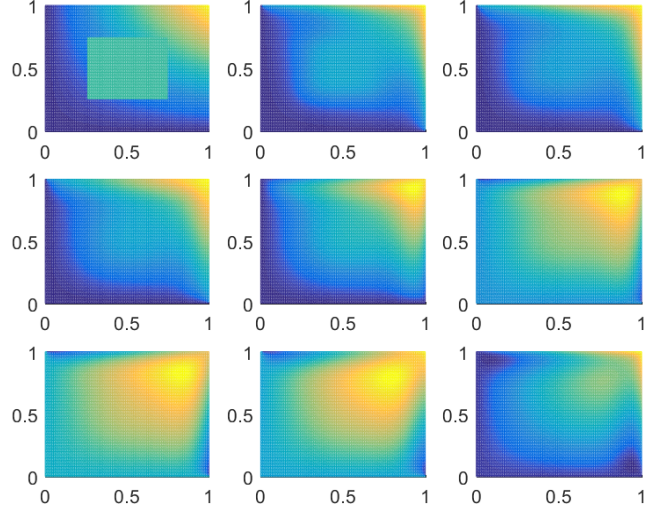


Figure 12: *[Unsteady]* $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $N_t = 1000$

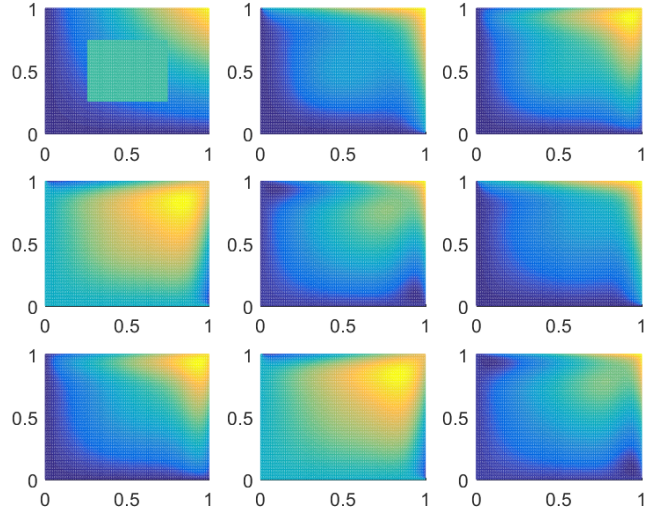


Figure 13: *[Unsteady]* $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$, $N_t = 2000$