FDM/FVM solvers for 1D shock wave problem (II)

huangyf15

1 Problem

这次的题目与上次作业是基本类似的，主要差别在于要求使用一阶 Roe 格式和二阶 TVD 格式计算该问题的数值解。

2 Algorithm

2.1 General

这里需要数值求解的仍为一维 Euler 方程，网格划分的相关问题也与上一小节类似。关于方程的具体形式以及相关特征分析的结果详见参考文献 [1]，这里不再赘述。由于题目中涉及到的均为有限体积格式，我们首先给出 Euler 方程半离散有限体积格式的具体形式

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}_j}{\partial t} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{j-1/2}}{\Delta x} = 0. \tag{2.1}$$

为了构造出具体的格式，我们一般采用如下的线化 Euler 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0. \tag{2.2}$$

其中 $\tilde{A}$ 是由 $\mathbf{U}^L_{i+1/2}, \mathbf{U}^R_{i+1/2}$ 决定的常数矩阵，需要满足双曲性、相容性和守恒性条件。为计算数值通量，我们需要求解上述线化 Euler 方程的 Riemann 问题。基于特征分析的手法，我们可以将其转化为三个相互解耦的、基于特征变量 $w^{L(R)}_{j+1/2} = \tilde{\mathbf{l}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{L(R)}_{j+1/2}$ 的线性波动方程的 Riemann 问题。由此可以解出特征变量的表达式，进而求得守恒变量 $\mathbf{U}_{j+1/2} = \tilde{R}\mathbf{W}_{j+1/2}$ 的值

$$\mathbf{U}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^L_{j+1/2} + \mathbf{U}^R_{j+1/2}\right) - \frac{1}{2}\tilde{R}sign(\tilde{\Lambda})\tilde{L}\left(\mathbf{U}^R_{j+1/2} - \mathbf{U}^L_{j+1/2}\right)$$

而对于线化方程，成立

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \tilde{A}\mathbf{U}$$

这样，对于原始的 Euler 方程，数值通量可写为

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{U}^L_{j+1/2}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^R_{j+1/2})\right) - \frac{1}{2}|\tilde{A}|\left(\mathbf{U}^R_{j+1/2} - \mathbf{U}^L_{j+1/2}\right). \tag{2.3}$$

其中，$|\tilde{A}| = \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\tilde{L}$。在下述两种有限体积格式中，关键在于 $\mathbf{U}^L_{i+1/2}, \mathbf{U}^R_{i+1/2}$ 选取方式的差异。

2.2 Roe scheme

2.2.1 FVM

对于一阶 Roe 格式，对空间变量采用零阶重构即可，即取

$$\mathbf{U}^L_{j+1/2} = \bar{\mathbf{U}}^n_j, \mathbf{U}^R_{j+1/2} = \bar{\mathbf{U}}^n_{j+1}.$$

这里需要注意的是，在离散意义上，Roe 格式不总是满足熵条件，因此有可能计算出非物理解。考虑到系数矩阵特征值的绝对值实际上起到的是耗散的作用，在操作上常常对特征值采用熵修正的手段，通过增强耗散来抑制非物理解的产生。具体来说，即选取一个小正数 ε，当特征值 $\tilde{\lambda}_i$ 的绝对值过小时，用二者的调和平均代替原有特征值的绝对值。

2.2.2 FDM

为了凸显不采取熵修正时的非物理解，我们用有限差分形式的 Roe 格式进行对比。这里需要注意，由于有限差分形式的 Roe 格式采用的是数值通量以及特征值的符号进行的计算，因此不易采取熵修正。

$$\hat{}F_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1}\right) - \frac{1}{2}\tilde{R}_{j+1/2} sign(\tilde{\Lambda}_{j+1/2})\tilde{L}_{j+1/2}\left(\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j\right)$$
$$\hat{}F_{j-1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_{j-1} + \mathbf{F}_j\right) - \frac{1}{2}\tilde{R}_{j-1/2} sign(\tilde{\Lambda}_{j-1/2})\tilde{L}_{j-1/2}\left(\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{j-1}\right)$$

2.3 TVD scheme

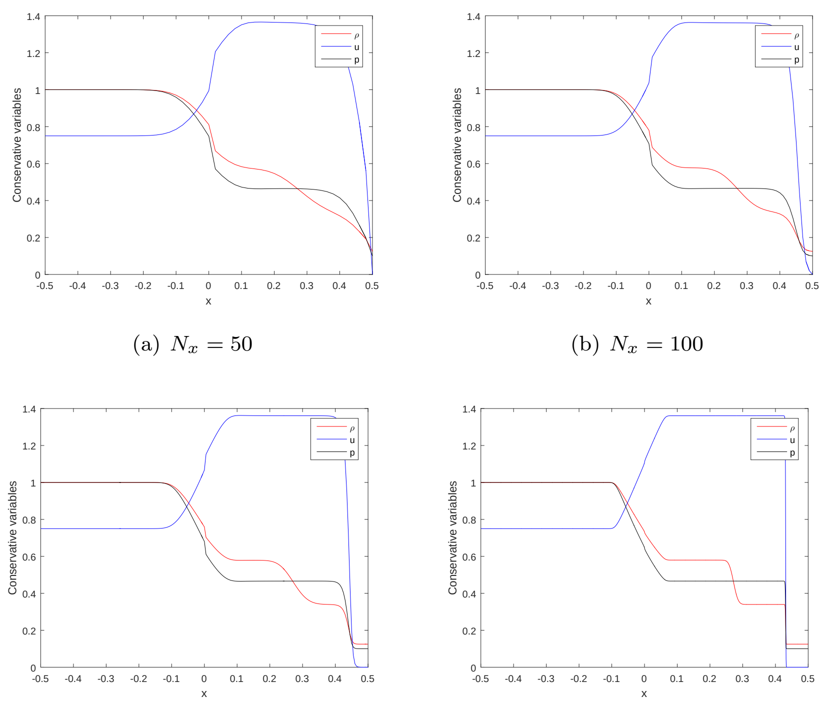
Roe 格式的一个缺陷是，当格式具有二阶或二阶以上的空间精度时，在激波附近存在非物理振荡，这一问题在高分辨率格式中得到了解决。作为其中的一个重要例子，TVD 格式通过采用非线性算子 minmod 作为限制器计算特征变量，具体步骤可参考教材 [2]，这里不再赘述。

3 Results and discussions

下面我们就时刻 $Time = 0.20$ 的守恒变量分布计算结果进行讨论，这里我们重点关注激波附近的非物理振荡以及所谓“膨胀激波”这一典型非物理现象两类问题的解决。

3.1 Roe scheme

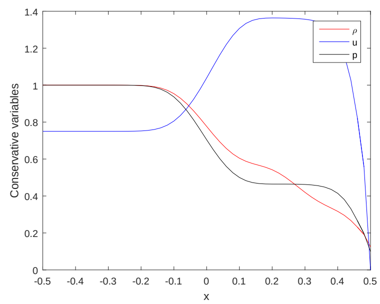
由图 1 和图 2 可见，熵修正的确起到了增强粘性的作用。进一步地，由 1 可见，只有当粘性尺度与网格尺度相匹配时，才会有较为显著的抑制膨胀激波的效果。图 3 给出了有限差分形式和有限体积形式下的 Roe 格式，且后者进行了熵修正，由此可见熵修正的重要作用。



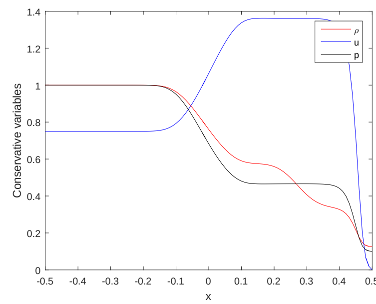
(a) $N_x = 50$　(b) $N_x = 100$

(c) $N_x = 200$　(d) $N_x = 400$

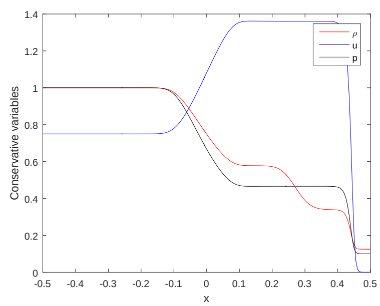
Figure 1: *Roe* 有限体积格式下的守恒变量分布 ($\varepsilon = 0.01$)



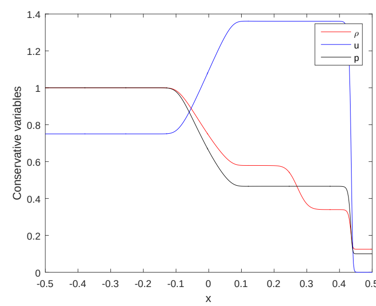
(a) $N_x = 50$



(b) $N_x = 100$

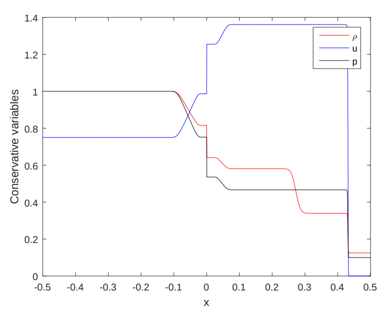


(c) $N_x = 200$

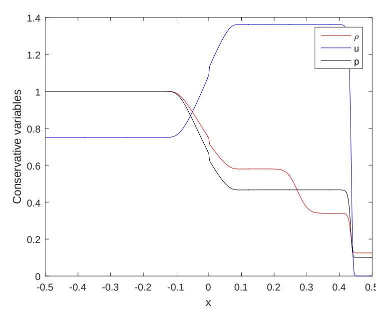


(d) $N_x = 400$

Figure 2: *Roe* 有限体积格式下的守恒变量分布 ($\varepsilon = 1$)



(a) Roe in FDM

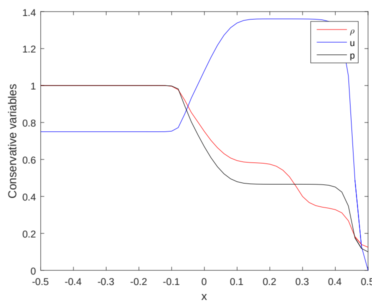


(b) Roe in FVM

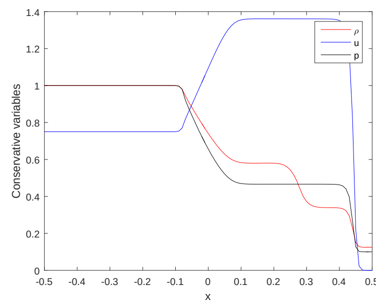
Figure 3: *Roe* 有限差分与有限体积格式下的守恒变量分布对比 ($N_x = 1600$)

3.2 TVD scheme

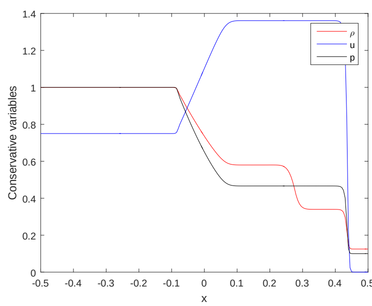
对比图 4 与此前的二阶 FVS 格式的结果，可以看到激波附近的非物理振荡得到了有效抑制。同时，由于 TVD 格式本身已经考虑了二阶粘性耗散项，因此熵修正的作用并不明显。



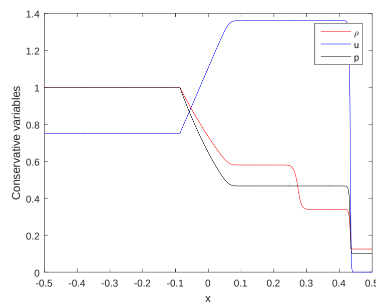
(a) $N_x = 50$



(b) $N_x = 100$



(c) $N_x = 200$



(d) $N_x = 400$

Figure 4: *TVD* 格式下的守恒变量分布

References

[1] Katate Masatsuka. I do like CFD, VOL.1 (2ed, v2.5).

[2] 任玉新，陈海昕．计算流体力学基础．北京：清华大学出版社，2006.