

Analysis of K-S equation

huangyf15

Contents

1 K-S 方程的数值解及其混沌特性	2
1.1 谱空间指数时间差分方法	2
1.1.1 空间离散方法的选择	2
1.1.2 时间推进算法的选择	3
1.2 数值结果及其讨论	3
1.2.1 与文献 [5] 结果的对比	3
1.2.2 对系统演化特征的进一步讨论	5
2 K-S 方程的周期行波解及其色散关系	8
2.1 准定常 K-S 方程定解问题的传统提出方式	8
2.2 不动点迭代及其结果	8
2.3 【对准定常 K-S 方程定解问题提法的思考】	9

1、 请分析如下 K-S 非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

其中 $x \in [0, 2\pi]$ ，并且 $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$ ，随 $\sigma > 0$ 取值不同时的混沌特性；

2、 若取 $\sigma = 1$ 试求解 K-S 方程行波解，以及行波解的波速与波长之间存在的关系或关系曲线（即存在某个波速 C ，使得在随该波速 C 运动的参考系中，波长为 λ 的波处于定常状态）？

1 K-S 方程的数值解及其混沌特性

1.1 谱空间指数时间差分方法

1.1.1 空间离散方法的选择

偏微分方程可以采用相空间或谱空间两种方法进行离散。相空间离散即有限差分方法,对于含高阶导数项的方程一般选择紧致差分格式,其依赖的模板点数目较少,计算效率较高;谱空间离散又称谱方法,它通过将相空间的变量投影到谱空间,利用谱变量求导与卷积性质将代求解方程代数化,能够有效地简化对流项的处理,同时提高计算效率。这里,我们着重介绍谱方法。

谱方法本质上属于加权余量法 [1–3]。对于发展型偏微分方程(组)的求解来说,谱方法也可以看作一种利用分离变量的思想将 PDE(s) 化为 ODEs 的方法。具体地说,谱方法将待求函数在一组关于空间变量的函数基(称为试函数或形函数)下作有限截断级数展开,从而将时间相关项归并到了谱系数当中,即实现了分离变量。谱方法的主要步骤有三,即待求函数在试函数空间的截断近似、待解方程加权余量形式的导出以及线性或非线性代数方程组的求解。其中,试函数与权函数的选取较为关键,这里叙述如下:

- 与有限元方法不同的是,谱方法往往选取在全场无穷阶连续的函数作为试函数,一般取为满足边界条件的完备线性独立函数族。大部分情况下,对于空间周期性问题可以选择 Fourier 三角函数族 $\{e^{-ikx}\}$;而对于空间非周期性问题,可取为 Chebyshev 多项式 $T_k(x)$ 或 Legendre 多项式 $L_k(x)$ 等。
- 权函数的选择决定了谱方法的类型。若权函数取为试函数本身,则称该种加权余量法称为 Galerkin 法;若权函数取为离散点上的 Dirac δ 函数,则称该方法为配置点法。对于前者,一般需要首先计算导数矩阵从而将函数在区间内的积分运算转化为节点函数值的代数运算;对于后者,由 δ 函数的性质,加权余量方程组直接转化为了代数方程组。

设需要求解的非线性方程(如 K-S 方程)在相空间或谱空间中的离散形式可写为

$$u_t = \mathbf{L}u + \mathbf{N}(u, t). \quad (1.1)$$

其中, \mathcal{L} 与 \mathcal{N} 分别为高阶线性与低阶非线性算子的矩阵形式。在采用谱空间对原方程右端项进行离散时,需要同时考虑高阶线性项带来的刚性效应以及低阶非线性项带来的对流效应,两者都会为方程的数值求解带来显著的困难。为此,我们对二者做如下简要的说明:

- 关于高阶线性项 $\mathbf{L}u$ 的计算。这里主要有两种选择,一是在相空间中采用谱求导矩阵计算导数,本质上属于函数逼近¹的结果,这在非 Fourier 谱中的应用较为广泛;二是在谱空间中采用 Fourier 变换性质计算导数,能够将求导、卷积等分析运算代数化。这里需要注意机器误差的消除,以防止其被高阶导数放大,使得结果不稳定以致迭代发散。一种简便的方法是采用高通滤波,将谱空间中所有绝对值小于给定值 $\epsilon \sim 10^{-12}$ 的谱系数强制归零。
- 关于低阶非线性项 $\mathbf{N}(u, t)$ 的计算。由信号与系统中的采样定理可以知道,如果频谱只占据 $[-f_m, f_m]$ 区间,则为了避免出现混叠现象,需要的最低采样频率为 $2f_m$ 。由于谱方法中对谱空间进行了有限截断,因此在计算乘积项时会产生一定的混淆误差,这主要是由信号的高频

¹这里可以联想到函数导数差分近似的一种典型构造方法,即基于函数插值的计算方法,由此得到的导数差分近似也可以类似地表达为矩阵的形式。二者最根本的区别在于,有限差分得到的求导矩阵是局域的,即某节点处的导数差分格式只是由其邻近的模板点构成;而谱方法得到的求导矩阵则具有鲜明的全局性,即某节点处的导数差分格式由全体模板点共同决定。

成分引起的。为了减少或消除截断误差,可以采取增大采样频率或伪谱法(需结合“3/2”法则)等方法。

题干要求求取 K-S 非线性方程的周期解,即找到 $u(x, t)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad (1.2)$$

且满足 $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$ 。考虑到谱方法在处理非线性对流项时的优势,并注意题干问题的空间周期性特征,这里我们选取 Fourier 三角函数族作为试函数,同时采用配置点法,即应用 δ 函数作为权函数。实际上,这等价于离散 Fourier 变换 (DFT) 的方法,因此可以应用快速 Fourier 变换 (FFT) 算法进行计算来提高效率。具体的算法可参考文献 [3] 的附录 A.5。

1.1.2 时间推进算法的选择

对于 Eqn (1.1) 所示的刚性偏微分方程来说,时间方向上的推进是数值求解的一大难点。如果简单地直接采用四阶 Runge-Kutta 等传统方法,为保证数值格式的稳定性,时间步长需要取得非常短,以至于计算效率难以接受。这里我们采用所谓指数时间差分 (Exponential Time-Difference, 简称 ETD) 的方法 [4], 这种方法通过指数积分因子的引入,较好地抑制了方程刚性即高波数效应的影响,从而确保了较大时间步长条件下数值格式的稳定性。具体的算法可参考文献 [4] 的第 4 节。

1.2 数值结果及其讨论

对于数值实验中的参数选取,这里说明如下:

- 在谱空间离散中,取空间求解域长度 $L/(2\pi) = 2^0$, 这决定了谱空间的分辨率;可识别的最大波数 $k_{\max} = 2^5$, 这决定了谱空间的总宽度;由此可以确定 DFT 变换中基函数的个数 $N_x = 2^0 \times 2^5 \times 2 = 2^6 \equiv 64^2$, 这也代表了谱方法的精度。这里为了计算效率起见,计算下述结果时没有采用伪谱方法消除混淆误差。
- 在时间方向的推进中,取时间步长 $dt = 0.01$, 总时间 $T = 100$; 为与文献 [5] 保持一致,这里系统的初值分布取为 $u_0(x) = -\sin x$ 。

Tab 1 给出了对参数 σ 的不同取值下 K-S 系统的演化特征的数值模拟结果。对于相应的定量结果包括物理空间与谱空间的系统演化曲线、系统总能量随时间的变化曲线、系统总能量-能量变化率的相图等,这里只选取部分有代表性的过渡区数据进行展示,具体可参考第 1.2.2 节的讨论。

1.2.1 与文献 [5] 结果的对比

我们将 K-S 系统由于 σ 不同取值而呈现出的不同特征称为系统处于不同的相区,并称相区转变的临界参数称为系统的相变临界参数。本文与文献 [5] 之间在相变临界参数取值上的差异是客观存在的,这可能是由空间离散的谱精度以及时间推进的格式精度造成的。除此之外,我们还可以观察到更为重要的相区差异。

具体而言,本文的结果相较文献:(1)多呈现出了空间周期为 2π 的行波解以及空间周期为 $2\pi/5$ 的定常解两个相,这可能是由于本文采用的高精度时间推进算法带来的;(2)未发现空间周期为 π 的定常解,而只发现了相同 σ 取值范围内的相同空间周期的周期吸引子解,这可能是由于原文献时间推进步数较少所致。

²此处的推导详见 MATLAB 程序 `input_paras.m`。

Table 1: 在参数 σ 的不同取值下 K-S 系统的演化特征

σ 的取值	空间周期性	演化特征
1 0.99	-	均匀的平凡解
0.95 0.9 0.5 0.3	2π	定常解
0.275 0.25	2π	<u>行波解</u>
0.225 0.2 0.1 0.09	$2\pi/2$	<u>周期-2 定常吸引子解</u>
0.085 0.08	-	混沌解
0.075	2π	<u>行波解</u>
0.07 0.065 0.06	$2\pi/3$	定常解
0.0575	-	<u>周期-2 极限环吸引子解</u>
0.055 0.05 0.045	2π	定常解
0.04 0.0375 0.035 0.0345	$2\pi/4$	定常解
0.034 0.033 0.0325 0.030 0.0275 0.027	-	混沌解
0.0265	$2\pi/5$	定常解
0.026 0.0255	-	混沌解
0.025 0.0245 0.024 0.0235 0.023	$2\pi/5$	定常解
0.0225 0.02	-	混沌解

1.2.2 对系统演化特征的进一步讨论

- 随着 σ 的减小, 波数较高的定常解会相继出现 (如 $k = 1(\rightarrow 2) \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ 等), 并且所在参数区间的宽度将越来越小; 这一现象可以通过正耗散的四阶导数项与负耗散的二阶导数项之间在谱空间内的平衡来定性理解, 即要求 $k_{eq}^2 \sim \sigma k_{eq}^4 \Rightarrow k_{eq} \sim \sigma^{-1/2}$, 这表示平衡波数随着 σ 的减小而增大。
- 不同波数的定常解之间, 通常会通过行波解、周期吸引子或混沌解进行过渡 (见表中演化特征的加下划线部分)。从表中可以看到, 偶波数解的演化往往具有带有一定的不稳定特征, 如波数为 2 的情况不存在定常解而只存在周期-2 定常吸引子解, 波数为 4 的情况很容易演变为周期-2 极限环周期吸引子解 (即双极限环周期吸引子)。
- 从定常解发展为混沌解的过程中, 周期-2 吸引子通常会扮演比较重要的角色 (见表中演化特征的黑体字部分)。通过观察过渡区域的系统演化曲线可以发现 (见表中 σ 取值的加粗部分), 双稳态周期吸引子的稳态转换周期的缩短是最终导致混沌解的重要因素, 对于周期-2 定常吸引子与周期-2 极限环吸引子皆有此类似特征。这里选取了 $\sigma = 0.09/0.085; 0.06/0.0575/0.055; 0.027/0.0265/0.026$ 三组过渡区的定量计算结果进行展示 (见表中 σ 取值的加下划线部分), 注意这里系统能量并未进行归一化。

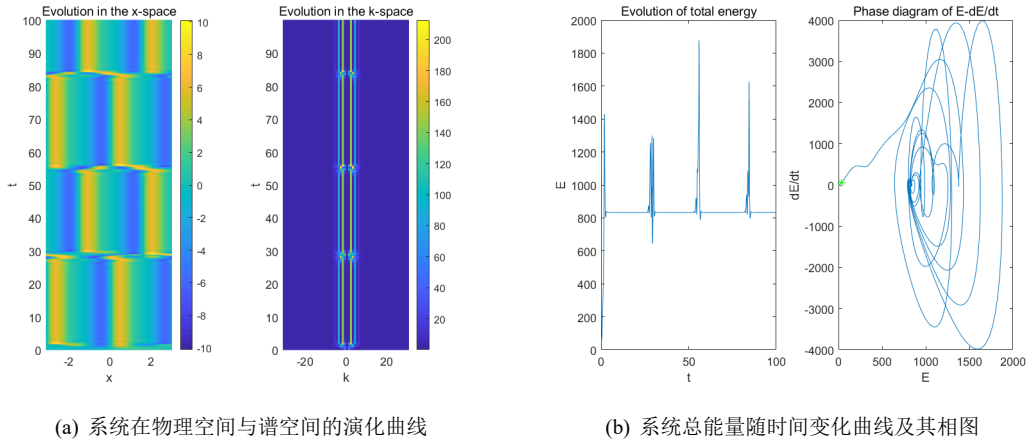


Figure 1: $\sigma = 0.09$ 的结果 (周期-2 定常吸引子解)

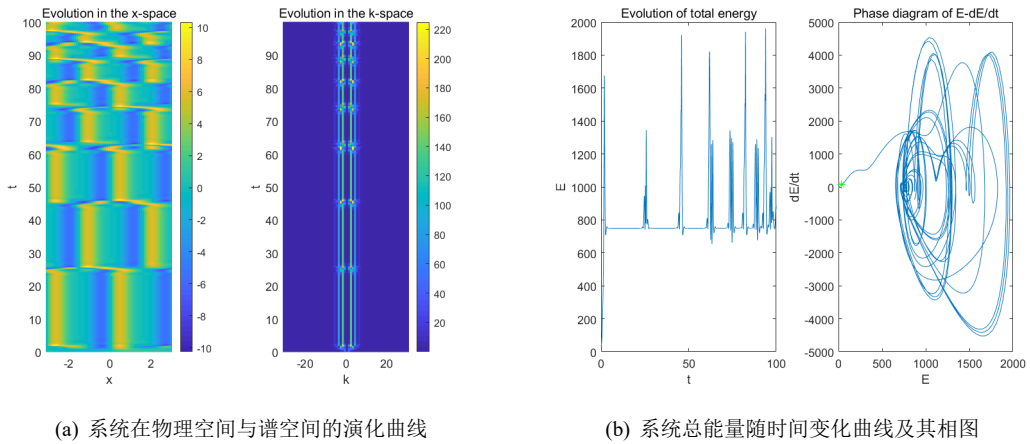


Figure 2: $\sigma = 0.085$ 的结果 (混沌解)

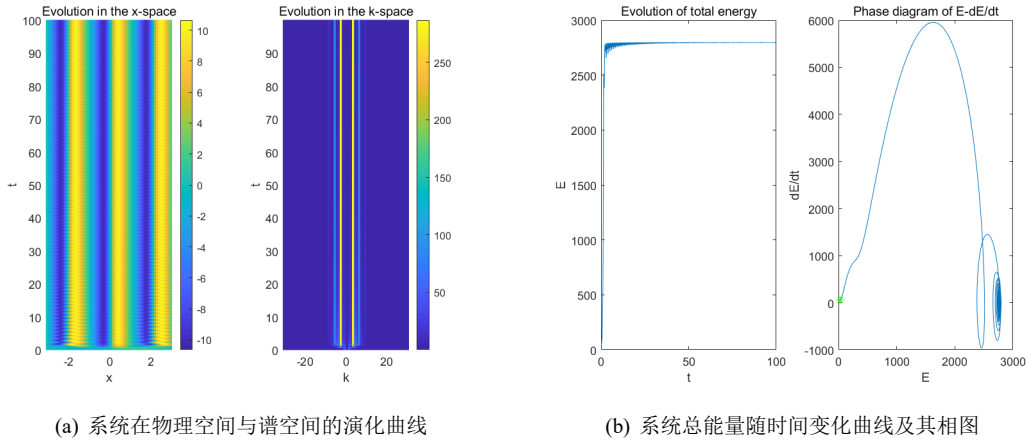


Figure 3: $\sigma = 0.06$ 的结果 (空间周期为 $2\pi/3$ 的定常解)

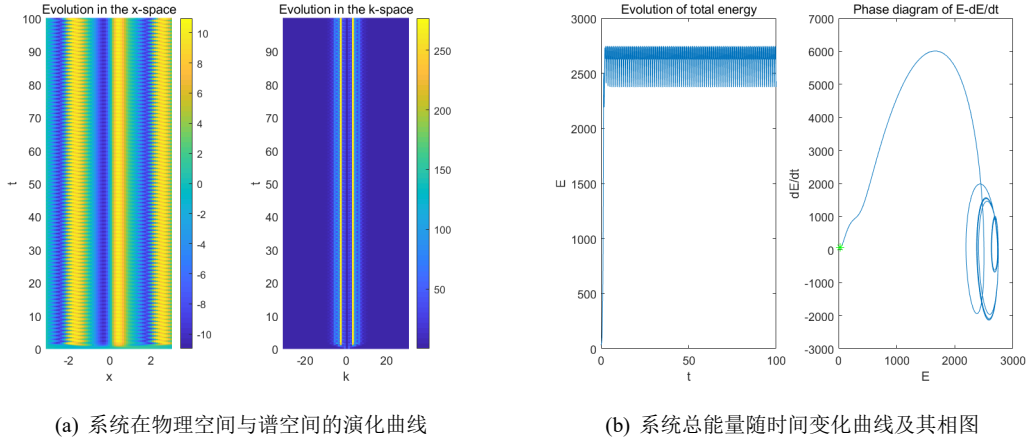


Figure 4: $\sigma = 0.0575$ 的结果 (周期-2 极限环吸引子解)

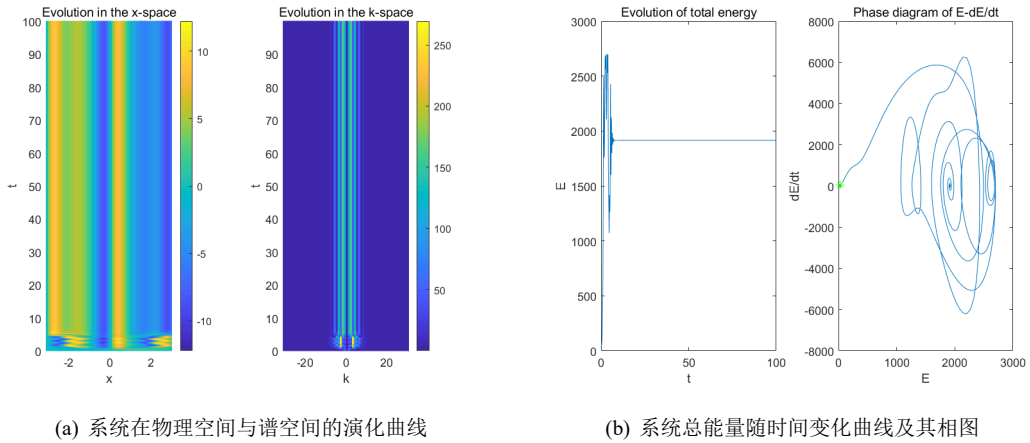
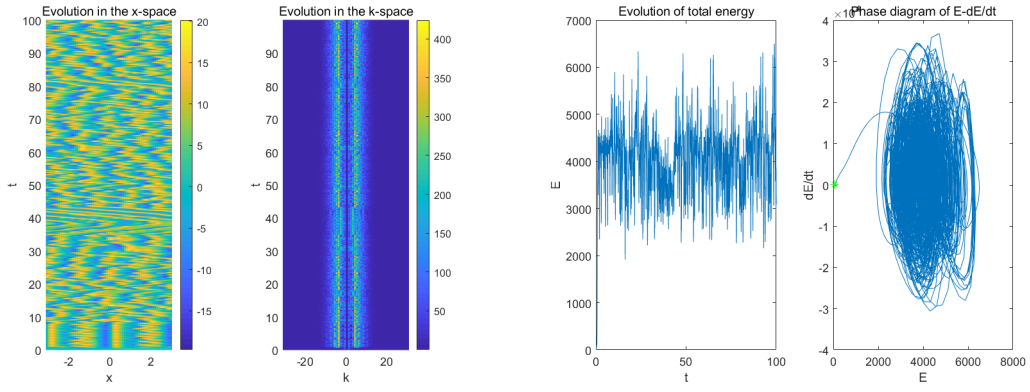


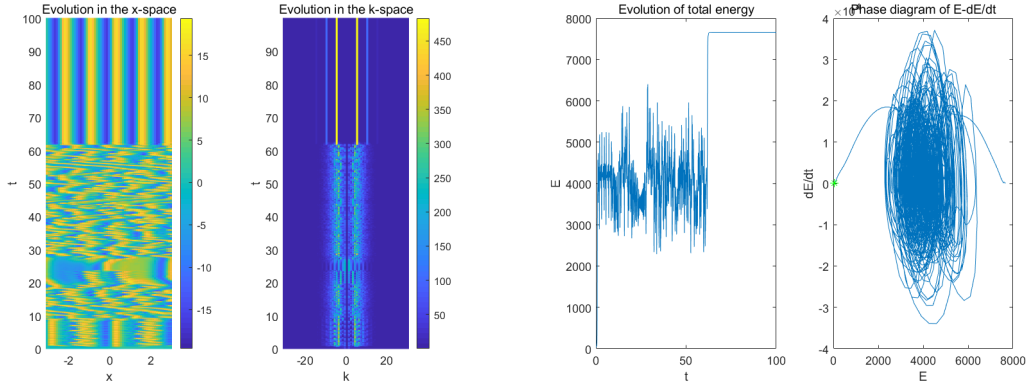
Figure 5: $\sigma = 0.055$ 的结果 (空间周期为 2π 的定常解)



(a) 系统在物理空间与谱空间的演化曲线

(b) 系统总能量随时间变化曲线及其相图

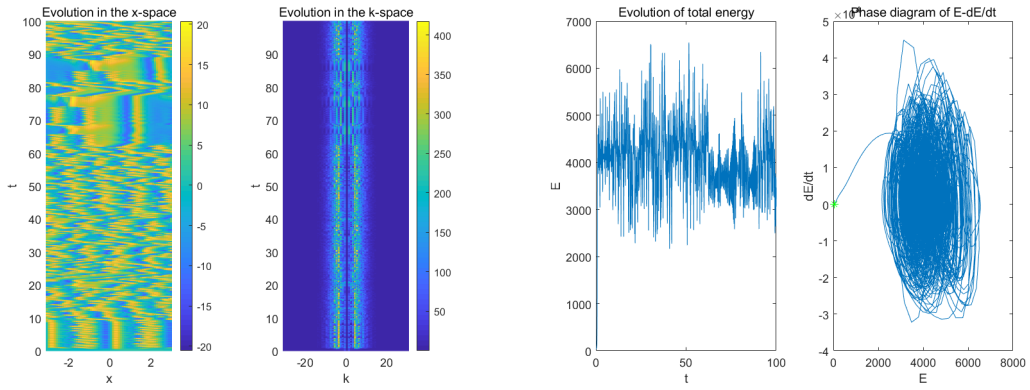
Figure 6: $\sigma = 0.027$ 的结果(混沌解)



(a) 系统在物理空间与谱空间的演化曲线

(b) 系统总能量随时间变化曲线及其相图

Figure 7: $\sigma = 0.0265$ 的结果(空间周期为 $2\pi/5$ 的定常解)



(a) 系统在物理空间与谱空间的演化曲线

(b) 系统总能量随时间变化曲线及其相图

Figure 8: $\sigma = 0.026$ 的结果(混沌解)

2 K-S 方程的周期行波解及其色散关系

2.1 准定常 K-S 方程定解问题的传统提出方式

取 $\sigma = 1$, 此时的 K-S 方程可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (2.1)$$

设其周期行波解的形式为

$$u(x, t) =: H(\xi(x, t)), \quad (2.2)$$

其中 $\xi := k_0 x - \omega t \equiv k_0(x - Ct)$ 为特征变量 (也称为相似变量), 其中 $k_0, \omega, C \equiv \omega/k_0$ 分别为行波的波数、圆频率及波速; 不失一般性, 可令 $H(\xi)$ 满足周期性条件 $H(\xi + 2\pi) = H(\xi)$ 。将 Eqn (2.2) 代入方程 Eqn (2.1), 并假设 k_0, ω 均为独立于 x, t 变化的常数, 可以得到

$$-C \frac{dH}{d\xi} + H \frac{dH}{d\xi} + k_0 \frac{d^2 H}{d\xi^2} + k_0^3 \frac{d^4 H}{d\xi^4} = 0.$$

将上式对 ξ 积一次分, 有

$$-CH + \frac{1}{2}H^2 + k_0 \frac{dH}{d\xi} + k_0^3 \frac{d^3 H}{d\xi^3} = Q. \quad (2.3)$$

这里的 Q 是积分常数。

如果从数学的角度来看, 给定了一组 (k_0, C, Q) 的值, 即可求出一个相应的解 $H(\xi)$ 。换一个角度来看, 对于一个确定的物理问题, 就需要提两个约束条件来确定上述三个“自由变量”的隐函数关系 $C(k_0)$ 和 $Q(k_0)$ 。首先需要给定 $H(\xi)$ 的平衡位置, 我们假定均匀解为 $H(\xi) \equiv 1$, 便有

$$-C + \frac{1}{2} = Q. \quad (2.4)$$

同时, 还要给定 $H(\xi)$ 的相位, 我们假定

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(\xi) \cos \xi d\xi = 0. \quad (2.5)$$

这等价于假定 $H(\xi)$ 的 Fourier 级数中 $\cos \xi$ 项对应系数为 0。将平衡式 Eqn (2.4) 代入 K-S 方程的稳态形式 Eqn (2.3), 可得

$$(C - \frac{1}{2}) - CH + \frac{1}{2}H^2 + k_0 \frac{dH}{d\xi} + k_0^3 \frac{d^3 H}{d\xi^3} = 0. \quad (2.6)$$

在上式中作代换 $\tilde{H} = H + 1 - 2C$, 仍将 \tilde{H} 记为 H , 可以将方程 Eqn (2.6) 化为更简洁的形式

$$(C - 1)H + \frac{1}{2}H^2 + k_0 \frac{dH}{d\xi} + k_0^3 \frac{d^3 H}{d\xi^3} = 0. \quad (2.7)$$

约束条件 Eqn (2.5) 的形式保持不变。

2.2 不动点迭代及其结果

为了求解上述约束问题, 我们应用周期性条件, 对式 Eqn (2.7) 在 $[0, 2\pi]$ 上做离散 Fourier 变换

$$\hat{H}_k = \sum_{j=0}^{N-1} H_j e^{-ik(2\pi j/N)},$$

其中 $N = 2^n$ 为采样个数, $H_j := H(2\pi j/N)$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) 为采样节点处函数值。由此可得

$$(C - 1 - ik_0 k + ik_0^3 k^3) \hat{H} + \frac{1}{2} \hat{H}^2 = 0.$$

这里 \hat{H}^2 由伪谱法及“3/2”法则计算得到, 由此可以得到方程的不动点迭代形式

$$\hat{H} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \hat{H} - \beta \hat{H}^2 \right) \quad (2.8)$$

其中, β 为自由参数, $\alpha := 1 + 1/2|\lambda|\beta$ 及 $\lambda := C - 1 - ik_0 k + ik_0^3 k^3$; 该迭代格式可以保证线性项局部收敛, 同时能够调节非线性项相对于线性项的收敛速度。结合离散 Fourier 逆变换公式

$$H_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{H}_k e^{ij(2\pi k/N)},$$

可将约束条件 Eqn (2.5) 离散化为

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_{-1} = 0. \quad (2.9)$$

这样, 只要给定一个波数 k_0 , 就可以通过打靶法求出 C , 使得由迭代方程 Eqn (2.8) 求出的解满足约束条件 Eqn (2.9)。但从数值结果发现, 每次迭代都会收敛到平凡的零解, 而这表明我们的不动点法还需要进行进一步的修正。由于时间所限, 余下的篇幅我们主要讨论以下定解问题的提法, 这也是导致求解困难的关键所在。

2.3 【对准定常 K-S 方程定解问题提法的思考】

对 $\sigma = 1$ 的 K-S 方程 Eqn (2.1) 做如下伸缩伽利略变换

$$\begin{cases} \xi = k_0(x - Ct), \\ \eta = t, \\ \mathcal{H} = u - C. \end{cases} \quad (2.10)$$

这里的 $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ 相当于对题干中欲求的定常解 (Eqn (2.2)) $u(x, t) =: H(\xi(x, t))$ 做了一个大小为 C 的平移, 并放松了时间变量 η 定常性的假定。变换后的 K-S 方程可写为

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} + k_0 \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} + k_0^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi^2} + k_0^4 \frac{\partial^4 \mathcal{H}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2.11)$$

当变换后的方程 Eqn (2.10) 中不显式出现 η 时, ξ 被称为相似变量, 变换 Eqn (2.10) 被称为相似变换。相似变换的重要特征是能够减少自变量的个数, 如偏微分方程被简化为常微分方程, 这里体现为变换后的变量 $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ 相对于时间变量 η 的定常性, 亦即 $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ 退化为了定常解 $H(\xi)$ 。可以顺带发现, K-S 方程具有伽利略对称性 (伽利略变换对应于 $k_0 = 1$, 此时变换后方方程 Eqn (2.11) 与变换前方方程 Eqn (2.1) 具有相同的形式)。

原则上, 任意给定一组 (k_0, C) 的值, 都可以求出变换后方方程 Eqn (2.11) 的若干定常解 $\mathcal{H}(\xi)$, 再通过伸缩伽利略变换式 Eqn (2.10) 即可得到变换前方方程 Eqn (2.1) 的一个所谓行波解。由于变换后方方程的定常解的个数不定, 因此可以预见原方程在不同的 k_0 取值下可能会呈现一定的分叉行为。注意 C 只在解的平移过程中起作用, 因此在上述意义下并不影响解的分叉。问题在于, 在参考书 [3] 中的传统定解条件是针对原坐标系中的变量 u 提出的, 这样, 每一个行波解将不仅与波数 k_0 有关, 还将与波速 C 有关, 这样就得到了所谓的 C - k_0 色散关系, 且图中每一条连续曲线对应于一族分叉解。

这样, 我们就可以设计出这样一种列表式的算法, 即先寻找变换后含时方程在给定波数 k_0 下的所有定常解, 然后通过改变波速 C 来挑选出满足原坐标系中定解条件的解。这实际上也为前述的打靶法提供了一种新的理解方式。

参考文献

- [1] 张晓. Matlab 微分方程高效解法: 谱方法原理与实现. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [2] 张兆顺, 崔桂香, 许春晓, 黄伟希. 湍流概论与模拟(第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2017.
- [3] 朱克勤, 彭杰. 高等流体力学. 北京: 科学出版社, 2017.
- [4] A.K. Kassam and L.N. Trefethen. *SIAM J. Sci. Comput.* **26** (2005), pp. 1214-1233.
- [5] Y.S. Smyrlis and D.T. Papageorgiou. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **88** (1991), pp. 11129-11132.