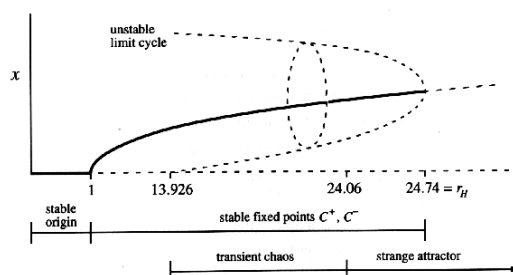


Stability Analysis of Lorenz System

huangyf15

3 Lorenz 系统稳定性的数值研究	3
3.1 研究方法概述	3
3.2 特征参数对系统大范围拓扑特征的影响	4
3.3 时间推进步长对相变临界参数的影响	4

参照下图，设计一个数值试验的方案，分析 Lorenz 系统平衡点和极限环在不同参数 r 下的特性 ($\sigma=10, b=8/3$)



上图引自 Steven H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Addison Wesley, 1994

3 Lorenz 系统稳定性的数值研究

3.1 研究方法概述

对于 Lorenz 系统的混沌特征，一般有直接和间接两类研究方法：

直接方法 即通过观察相轨迹特征对混沌特征进行判断，具体可以细化为三维/二维坐标投影轨迹、单一坐标随时间变化曲线、Poincare 截面交点集等三种方式。其中，第一种方法能够最为简便直观地揭示非线性系统的大范围拓扑特征，第二种方法易于展现系统的参数敏感性但过于定性，第三种方法可以分析系统的耗散特征以及极限环等结构但截面的选择偏重后验（这里指数值求解的情形）。这里我们主要采用第一种即直接作二维投影的方式研究参数变化对非线性系统大范围拓扑特征的影响。

间接方法 这里主要涉及两种方法，一种是通过 Fourier 变换将某一相轨迹对应的时间序列变换至频域的 Fourier 谱方法，该方法可用来研究系统在时间维度的周期性，相关的功率谱在周期运动时会出现许多分立的尖峰，而在混沌状态下则会表现出宽频的噪声背景；另一种是所谓的 Lyapunov 指数方法，具体是通过计算特定相轨迹下相近初值之间距离的演化趋势来判断系统是否处于混沌状态，只要所谓的 Lyapunov 指数大于零，就会出现混沌。这里我们将同时采用这两种方式进行研究。

综上，我们在这里将要采用的研究方法包括相轨迹一维投影的直接方法以及 Fourier 谱和 Lyapunov 指数两种间接方法，研究的主要问题为参数变化对非线性系统大范围拓扑特征的影响，这里主要是 Lorenz 系统平衡点和极限环在不同参数下的特性。相空间轨迹是利用 Ruge-Kutta 方法沿时间方向推进得到的，初值统一取为 $x_0 = (0.1, 0.1, 0.1)$ 和 $x_1 = (0.11, 0.11, 0.11)$ 。

3.2 特征参数对系统大范围拓扑特征的影响

数值模拟频率取为 $f_n = 2^{10}$ ，对应的时间推进步长为 $dt = 2^{-10}$ ，推进总步数 $n_s = 2^{20}$ ；同时，我们将数据采样频率降低为 $f_s = 2^3$ 以便较为精细地考察频谱特征。

Table 1: 给定初值下 Lyapunov 指数随参数 r 的变化 (1)

r	0.5	1.2	12	15	20	22	22.5	23
Lyapunov 指数	-4.64e-04	-Inf	-Inf	-Inf	-2.35e-05	-Inf	4.09e-06	6.74e-06

由 Fig 2, 3, 4, 5, 6, 7 等图及 Tab 1 的结果可见，Lorenz 系统随参数 r 的状态演变与理论定性符合，即“原点为唯一结点且稳定 \rightarrow 存在 $C+$, $C-$ 两个稳定的结点 \rightarrow 存在 $C+$, $C-$ 两个稳定的焦点 \rightarrow 瞬态混沌 \rightarrow 怪引子出现且极限环逐渐消失”。然而，由数值模拟结果确定的相变临界参数 $r_c \in (22, 22.5)$ ，其与课件中的 $r_{c,lec} \simeq 23.7881$ 以及文献中的 $r_{c,lit} \simeq 24.7268$ 相比均明显偏小。由于有限的时间推进步长将为系统带来一定的扰动，我们猜想，时间步长的选取或将显著影响相变临界参数 r_c 的取值。我们将在下一小节通过算例验证我们的这一猜想。

3.3 时间推进步长对相变临界参数的影响

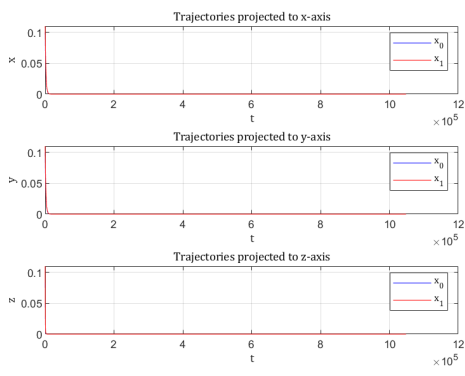
为了验证上一小节提出的猜想，我们将数值模拟频率提高为 $f_n = 2^{14}$ ，对应的时间推进步长则减小至 $dt = 2^{-14}$ ，推进总步数及数据采样频率与上小节取为相同值，分别为 $n_s = 2^{20}$ 及 $f_s = 2^3$ 。¹

Table 2: 给定初值下 Lyapunov 指数随参数 r 的变化 (2)

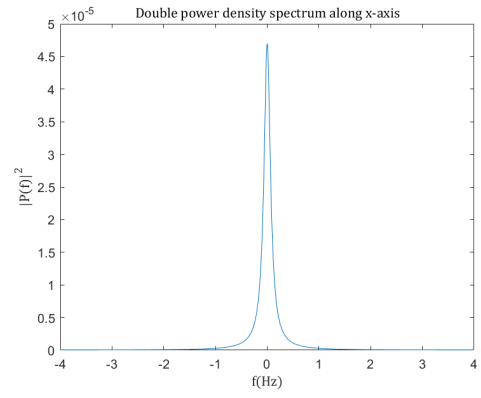
r	22.5	23	23.5	23.8	24
Lyapunov 指数	-7.13e-07	1.17e-07	1.16e-06	2.03e-06	6.14e-06

由 Fig 8, 9, 10 等图可以确定此时 $r'_c \in (23.8, 24)$ ，这与 Tab 2 的结果定量上有一定的误差。我们指出，这是由于推进不充分造成的结果。从以上图表的结果可见，在减少时间推进步长后，临界参数显著接近文献中的推荐值 $r_{c,lit}$ ，从而在一定程度上验证了我们的猜想。

¹这里之所以没有进一步提高数值模拟频率和推进总步数，是为了在保证大范围结构基本完整的基础上，尽可能缩短所需的推进时间。当然这种潜在的发展不充分性可能会带来一定的误差，这的确也导致了 Lyapunov 指数判据定量上的失效。

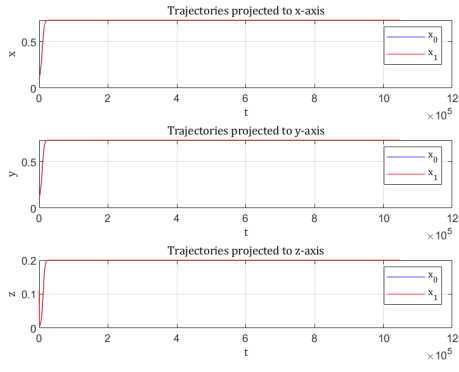


(a) 相轨迹一维投影

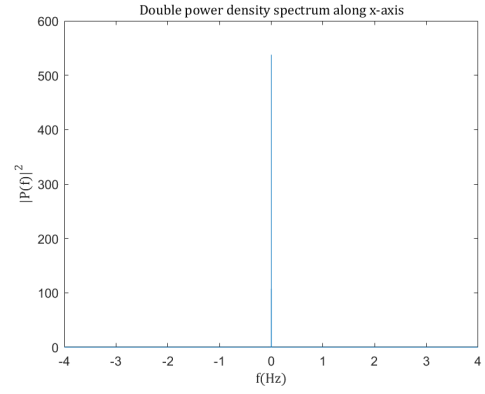


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 2: $r = 0.5$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.2)

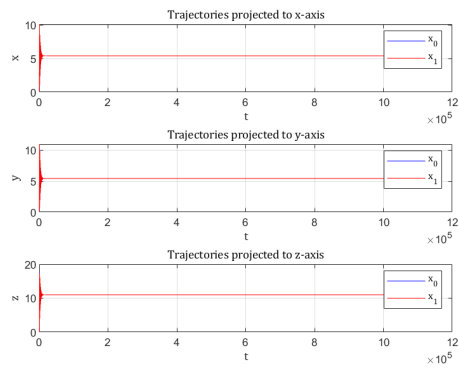


(a) 相轨迹一维投影

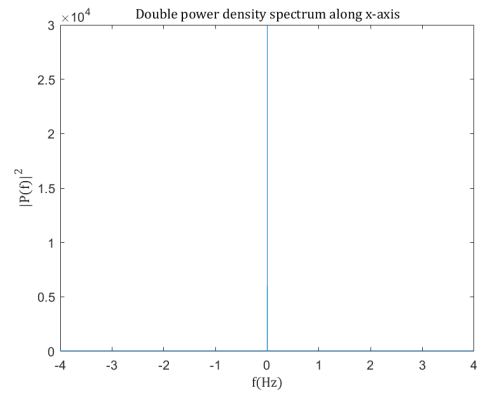


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 3: $r = 1.2$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.2)

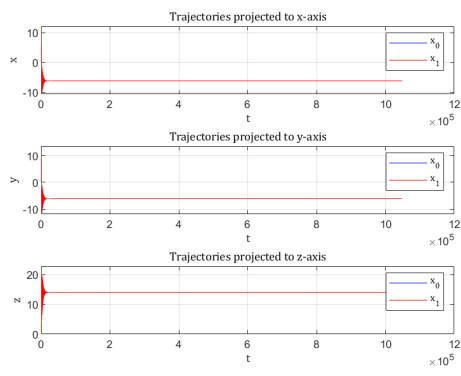


(a) 相轨迹一维投影

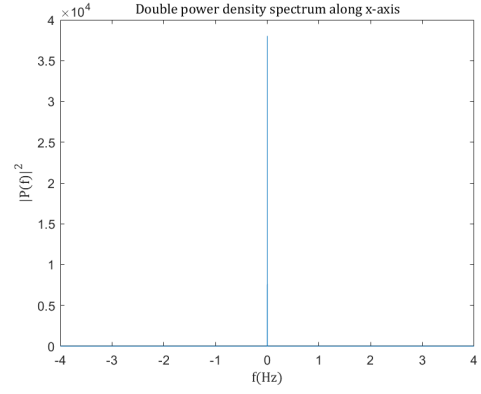


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 4: $r = 12$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.2)

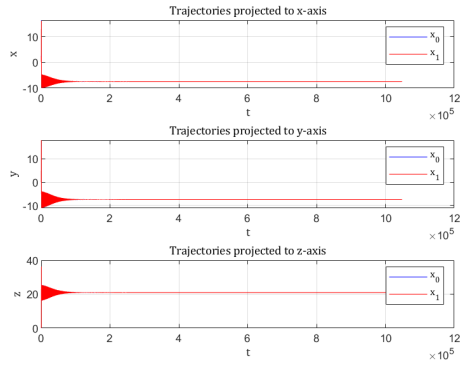


(a) 相轨迹一维投影

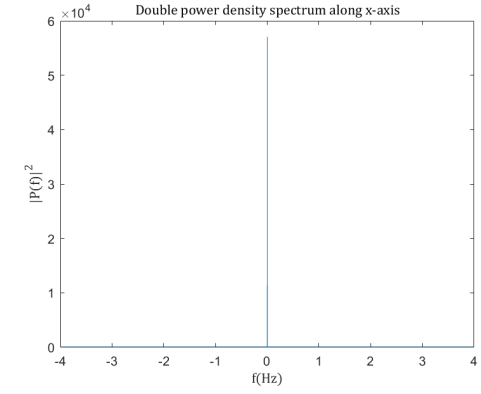


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 5: $r = 15$ 的结果(参数取值见 Sec 3.2)

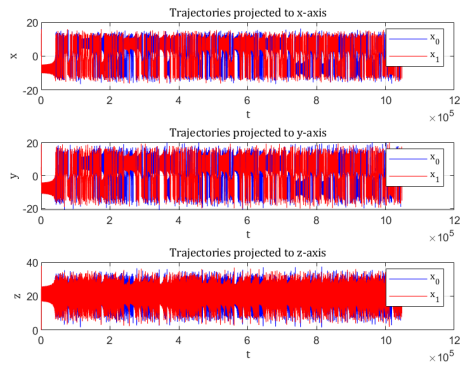


(a) 相轨迹一维投影

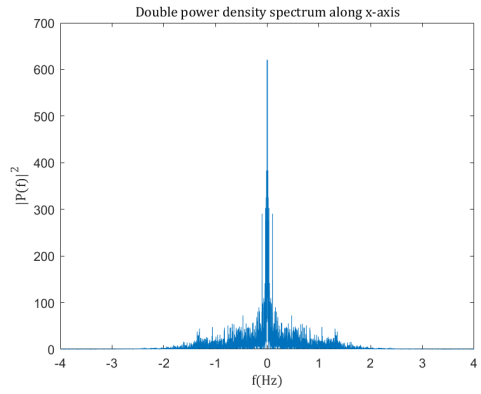


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 6: $r = 22$ 的结果(参数取值见 Sec 3.2)

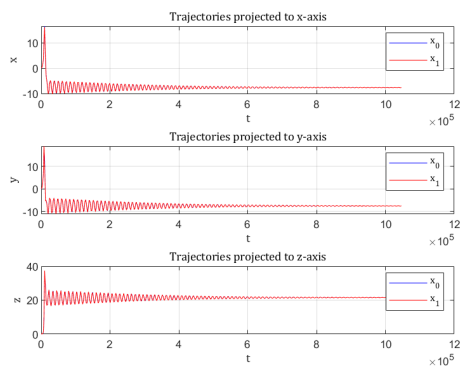


(a) 相轨迹一维投影

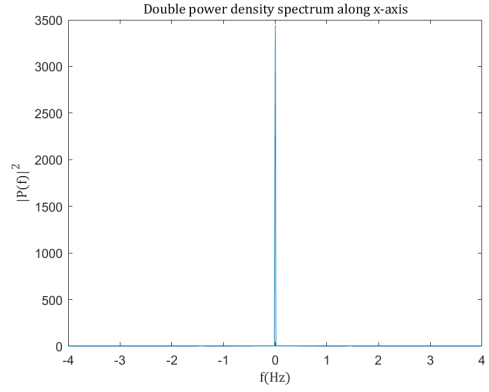


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 7: $r = 22.5$ 的结果(参数取值见 Sec 3.2)

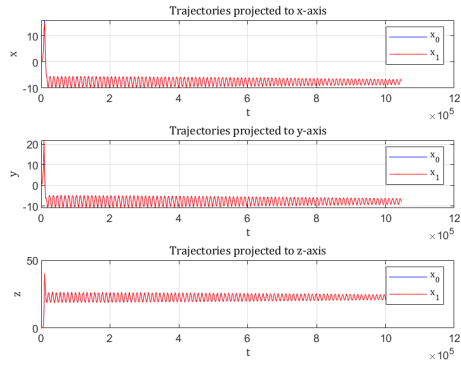


(a) 相轨迹一维投影

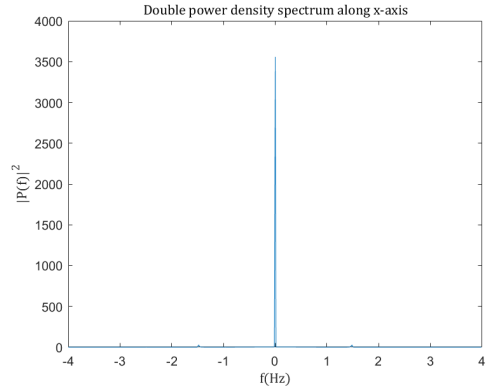


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 8: $r = 22.5$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.3)

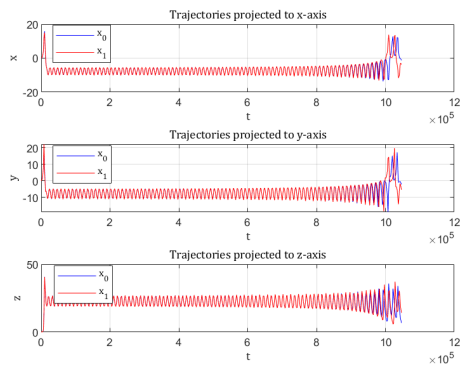


(a) 相轨迹一维投影

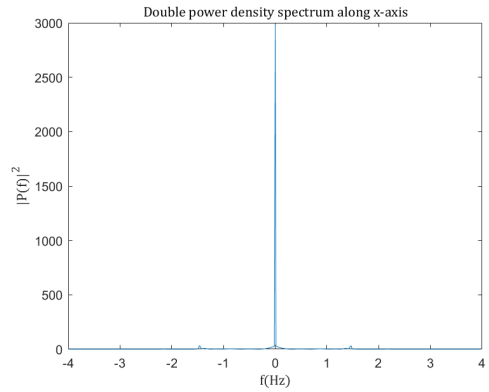


(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 9: $r = 23.8$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.3)



(a) 相轨迹一维投影



(b) 相轨迹功率谱密度

Figure 10: $r = 24$ 的结果 (参数取值见 Sec 3.3)