数值分析第二次上机练习实验报告

——数值方法求非线性方程实根

huangyf15

一、问题描述

用以下方法求方程：

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

在 $x_0=1$ 附近的根.（准确解 $x^*=1.368808107\ldots\ldots$）要求精度达到$10^{-7}$：

(a) $x_{k+1}=\frac{20-2x_k^2-x_k^3}{10}$；

(b) $x_{k+1}=\sqrt[3]{20-10x_k-2x_k^2}$；

(c) 方法(1)的 Steffensen 加速方法；

(d) 方法(2)的 Steffensen 加速方法；

(e) Newton 法.

二、方法描述——非线性方程的典型迭代解法

1.不动点迭代法及 Steffensen 加速

由于问题中的迭代函数已经很明确，故这里只简要叙述不动点迭代法及 Steffensen 加速方法的思想.

不动点迭代法的重点在于选择在不动点附近性质较好的迭代函数，即要求一阶导数绝对值小于 1，这是保证迭代法收敛的一个重要的充分条件. 为了使迭代函数获得更快的收敛，一般还会用基础的单射函数构造收敛阶数更高的迭代函数，但这样不但提高了对迭代函数光滑性的要求，还涉及到了复杂的高阶导数计算. 于是在线性化思想的启发下，Aitken 加速通过对不动点方法原始迭代序列的修正，获得了接近二阶收敛的效果.

Steffensen 加速方法把不动点迭代与 Aitken 加速思想结合，放弃对原始迭代序列的滞后修正，而是在计算过程中采用实时最新结果进行迭代，即构造了新的迭代函数

$$\psi(x)=x-\frac{(\varphi(x)-x)^2}{\varphi\big(\varphi(x)\big)-2\varphi(x)+x}$$

这种方案不但在避免计算高阶导数的情况下获得了更优越的收敛性能，还大大拓宽了迭代方法的适用范围，是一种简便而高效的求解非线性方程实根的方法.

2.Newton 法

Newton 法实际上是不动点迭代法的二阶格式，它具有鲜明的几何意义，即对欲求实根的目标函数用切线进行了局部线性近似．这种方法对于单根能够实现二阶收敛，即使是重根也可以达到超线性收敛．在目标函数是多项式的情况时，不仅其迭代函数很容易构造，还呈现出了更加优越的收敛特性，因此在求解多项式实根时被广为采用．

对于本题来说，需要构造的 Newton 迭代函数为

$$x_{k+1} = x - \frac{x_k^3 + 2x_k^2 + 10x_k - 20}{3x_k^2 + 4x_k + 10}$$

三、方案设计

本次实验问题和方案均非常明确，不再赘述．

四、计算结果及其分析

通过运行上述程序，我们发现(a)(b)的迭代函数并没有收敛，而是在两个固定值之间跳动；经过 Steffensen 加速的(c)(d)迭代函数获得了优越的收敛效果，其中(c)迭代 4 次便获得了10^{-7}的结果精度，(d)迭代了 8 次也达到了同样的精度．对于(e)的牛顿法，与预期一样，迭代了 4 次便达到了10^{-7}的精度要求．下面重点对(a)(b)与(c)(d)差异的产生原因进行分析：

表格 1：简单不动点迭代法结果

(a)不动点迭代（不收敛）		(b)不动点迭代（不收敛）	
0.548946478054766	1.923189476944810	3.162277660168380	-3.162277660168380
初值	迭代次数（精确到 0.01）	初值	迭代次数（精确到10^{-15}）
1.000000	30	1.000000	32
1.500000	40	1.500000	28
1.300000	46	1.300000	30
1.330000	52	1.330000	32
1.368800	134	1.368800	40
1.368808	174	1.368808	44

(1)表格 1 展示了(a)(b)最终“稳定跳动”的两个台阶值．这种现象说明迭代函数除了存在欲求的一阶不动点外，还存在二阶不动点，即满足$\varphi\big(\varphi(\alpha)\big) = \alpha$的 α 值．为了更直观地看出两种不动点的“竞争关系”，我们选取了不同的初值，考察了初值与迭代到二阶不动点附近所需的迭代次数的关系(见表格 1)．从表格中我们可以清晰地看到，初值越靠近一阶不动点，达到二阶不动点所需的迭代次数就越多，这是预料之中的．

(2)从表格 1 以及更多的试验结果中将会看到，即使初值离一阶不动点非常近，(a)(b)最终都无法保证其收敛到一阶不动点处，对于(b)这种现象更加明显．这说明，该点是迭代

不稳定的．从不动点迭代收敛的充分性定理我们推断，这很有可能是由于$|\varphi'(\alpha)| > 1$，即函数在一阶不动点附近波动过大所致．细致的计算证实了我们的猜测，对于(a)(b)，其一阶不动点均在使得$|\varphi'(\alpha)| < 1$成立的范围之外．

(3) 经过 Steffensen 加速后的(c)(d)收敛效果非常好，这从其收敛的充分性定理可以很容易理解．具体地说，经过计算，(a)(b)的不动点均使得$|\varphi'(\alpha)| \neq 1$，因此对应迭代函数的 Steffensen 加速法均收敛且拥有二阶以上的收敛速度．

五、结论

通过这次上机实验，我们可以得到有关数值求解非线性方程实根的以下结论和经验：

(1)先验估计的重要性．在使用简单不动点迭代法时，对迭代函数在其不动点附近特征作适当的先验估计是非常必要的．具体地说，由于不动点的值事先未知，因此就需要估计迭代函数在欲求不动点所在的某一邻域内的导数绝对值的界．尽管这一过程并非绝对地必要(毕竟$|\varphi'(\alpha)| < 1$只是一个充分条件)，但经验表明，这种方法还是可以非常有效地排除某些明显不收敛的迭代函数的．与简单不动点迭代相比，Steffensen 加速方法拥有更广泛的适应性，对迭代函数的要求大大降低．这时的先验估计只需排除含有使得$|\varphi'(\alpha)| < 1$的自变量区间，且迭代函数具有至少二阶收敛的更好的性质．

(2)以 Newton 法为代表的高阶迭代函数构造方法是一类非常有效的方法．高阶迭代函数的具体构造方法是，利用单射的反函数的 Taylor 展开，在不改变不动点的前提下，通过提高余项阶数的办法增加迭代函数的收敛阶数．这种做法采取了与 Steffensen 加速方法不同的思路，其可取之处在于通过巧妙地改造迭代函数，满足了简单不动点迭代法充分性定理的要求；而后者则完全改造了充分性定理．高阶迭代函数构造方法适用于高阶导数易于求得的函数，如多项式；在收敛速度要求不高时，使用最简单的二阶格式，即 Newton 法，是最为常用的办法．

(3)更仔细地思考可以发现，无论是改造定理的 Steffensen 加速方法，还是改造迭代函数的高阶迭代函数构造方法，其基本的思想都是线性化．前者实际上是采用了一阶近似的 Aitken 加速方法的升级版，可以预见，如果 Aitken 加速思想推广到更高阶的近似，将获得收敛性更好的 Steffensen 加速函数．但在实践中，由于同为(至少)二阶格式的 Steffensen 加速方法与 Newton 法已经满足了大部分需求，因此也就得到了相当广泛的应用．