



清华大学
Tsinghua University

Academic Figure Investigation

Meet Prof. Lars Onsager:

A lifetime of symmetry & structure

Yunfan Huang

2023.11.12





Overview of Lars Onsager (1903-1976)

✓ Plenty of awards and prizes

- 1953 Rumford Gold, AAAS
- 1958 Lorentz Medal, RNAS
- 1962 Lewis/Kirkwood/Gibbs Medal, ACS
- 1964 T. W. Richard Medal, ACS
- 1964 J. W. Gibbs Lecturer, AMS

1965 P. W. Debye Award, ACS

1966 Belfer Award in Pure Science, UYeshiva

1968 Nobel Prize in Chemistry

1968 President's National Medal Science

"for the discovery of the reciprocal relations bearing his name, which are fundamental for the thermodynamics of irreversible processes"

✓ Plenty of honorary degrees

- 1934-1940 Assistant Professor, Yale University
- 1935 Ph.D., Yale University**
- 1954 D.Sc., Harvard University
- 1960 Dr. technicae, Norges Tekniske Høgskole
- 1962 D.Sc., Brown University**

- 1962 Dr. Naturwissenschaften, RWTH, Aachen
- 1968 D.Sc., The University of Chicago
- 1969 D.Cs., Ohio State University
- 1970 Sc.D., Cambridge University
- 1971 D.Cs., Oxford University

Why & how?



*At scientific meetings and conferences,
he could always be counted on to give:*

*penetrating insights, 洞察力
hints of some new result, 线索卡
incisive critiques. 锐评*

[1] H. Longuet-Higgins and M. E. Fisher, *Journal of Statistical Physics* **78**, 605 (1995).

[2] P. J. Wojtowicz, *Ferroelectrics* **15**, 1 (1977).

[3] J. G. Kirkwood, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* **82**, 298 (1953).



Contents

- Background: before/after Onsager discovered Reciprocal Relations
- Academic CV
- Achievements
- Takeaways
- Anecdotes

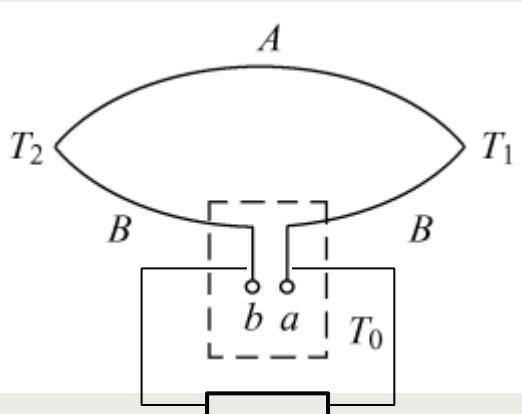


Astonishing multi-phys convergence (I)

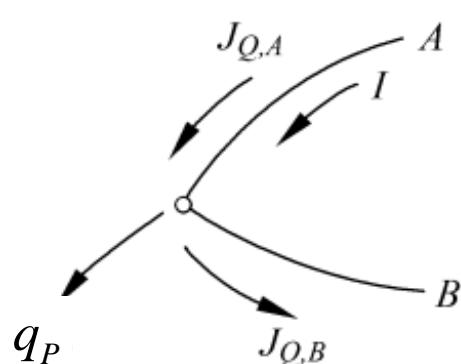
- Thermal effect of electron transport in thermo-electric materials



Seebeck



Peltier



Seebeck effect (1821): $\Delta T \rightarrow \Delta E$

$$S = \frac{E_a - E_b}{T_1 - T_2}$$

S : Seebeck coefficient

$$\varphi_a - \varphi_b = E_b - E_a \quad \Delta_{ab}\varphi: \text{electric potential difference (voltage)}$$

Peltier effect (1834): $I_e \rightarrow q_P$

$$\Pi_{AB} = \left(\frac{q_P}{I_e} \right)_{\Delta T=0} \quad \Pi_{AB}: \text{Peltier coefficient}$$

$$q_P := J_{Q,A} - J_{Q,B} = I_e (S_A - S_B) T =: I_e S_{A-B} T$$

$$\left(\frac{J_{Q,i} / T}{I_e} \right)_{\Delta T=0} = S$$

Used for prediction and measurement

[1] 陈宏芳. 高等工程热力学. (北京, 清华大学出版社, 2000)

[2] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin. *Solid State Physics*. (Harcourt, New York, 1976)



Astonishing multi-physics convergence (II)

- Thermal effect of mass transfer (chemE “3 trans + 1 react”)

Type	Heat transfer	Mass transfer
Potential	T	x_A
Flow rate	\mathbf{q}	\mathbf{J}_A^*
Requiring gradient of	temperature	concentration fraction
Constitutive equation	$\mathbf{q} = -k\nabla T$ Fourier's law	$\mathbf{J}_A^* = -CD_{AB}\nabla x_A$ Fick's law
Transport coefficient	thermal conductivity k	binary diffusivity D_{AB}

Soret effect (1893): $\Delta T \rightarrow \Delta x_A$

Dufuor effect (1872): $\Delta x_A \rightarrow \Delta T$

$$T\sigma = \mathbf{j}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{j}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{j}_q \mathbf{X}_u$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{F}_i - T\nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right), i = 1, 2$$

$$\mathbf{X}_u = -\frac{\nabla T}{T}$$

$$\mathbf{j}_1 = L_{11}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + L_{1u} \mathbf{X}_u$$

$$\mathbf{j}_q = L_{u1}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + L_{uu} \mathbf{X}_u$$

$$L_{1u} = L_{u1}$$

Used for measurement

Maxwell-Stefan eqn. $\mathbf{J}_A^* = -C\hat{D}_{AB}x_A \frac{\nabla \mu_A}{k_B T} \Leftrightarrow x_A x_B (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = -\hat{D}_{AB}x_A \nabla \ln a_A$

[1] R. B. Bird, et al, *Transport Phenomena*, 2nd ed. (Wiley, New York, 2002)

[2] J. A. Wesselingh, R. Krishna. *Mass Transfer in Multicomponent Mixtures*. (Delft University Press, Delft, 2006)

[3] 王涛. *高等化工传递原理*. (北京, 科学出版社, 2020)

[4] 陈宏芳. *高等工程热力学*. (北京, 清华大学出版社, 2000)

Milestone: “Triumph of atomism”



➤ Microscopic picture of diffusion and electrolyte

- van't Hoff, 1880s: Principle of mobile equilibrium
Theory of osmotic pressure in dilute solution
- Arrhenius, 1884: Electrolytic theory of electrolyte dissociation
- Einstein, 1905: Atomic theory of Brownian motion (1827)
 - ✓ Macroscopic measurable quantities \leftrightarrow microscopic modelling parameters

Particle suspension $\overline{x^2(t)} = 2Dt \longrightarrow \frac{1}{6\pi\eta r_p} = \frac{D}{RT / N_A}$ “Stokes-Einstein relation”

Molecular solution $\frac{\eta^*}{\eta} = 1 + \frac{\rho N_A}{M} \frac{4}{3} \pi r_m^3 \longleftrightarrow \frac{1}{6\pi\eta r_m} = \frac{D}{RT / N_A}$

Nobel Prize in Physics (1921)
Albert Einstein (1904)

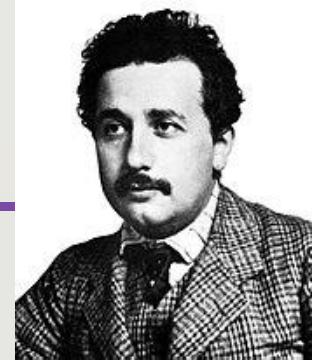
- Perrin, 1908: Experimental verification of N_A

“for his work on the discontinuous structure of matter, and especially for his discovery of sedimentation equilibrium.”

[1] Einstein, Albert (1905). Annalen der Physik. 322 (8): 549–560 (2006). (Translated)

[2] Penrose, R. (2005). **Einstein's Miraculous Year: Five Papers That Changed the Face of Physics** (J. Stachel, T. Lipscombe, A. Calaprice, & S. Elworthy, Eds.).

[3] G, D. Patterson. Les Atomes: a landmark book in chemistry. *Foundations of Chemistry* 12, 223–233 (2010)





Onsager's Reciprocal Relations (1931)

- Irreversible processes in electrolyte solutions (1931, 28 yrs old)

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{F}_i - \nabla \mu_i, i = 1, 2$$

$$\mathbf{j}_1 = L_{11}\mathbf{X}_1 + L_{12}\mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{j}_2 = L_{21}\mathbf{X}_1 + L_{22}\mathbf{X}_2$$

$$\rightarrow L_{12} = L_{21}$$

Reciprocal
relations?

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{F}_i - \nabla \mu_i, i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{j}_1 = L_{11}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) + L_{12}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)$$

$$\mathbf{j}_2 = L_{21}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) + L_{22}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)$$

$$\mathbf{j}_3 = -\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2$$

$$\rightarrow L_{12} = L_{21}$$

Used for
prediction

$$\mathbf{j}_A = \rho_A \mathbf{V}_A = \rho_A (\mathbf{v}_A - \mathbf{v})$$

$$\mathbf{j}_B = \rho_B \mathbf{V}_B = \rho_B (\mathbf{v}_B - \mathbf{v})$$

$$\mathbf{v} = m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{j}_A + \mathbf{j}_B = 0$$

$$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB}^{(AA)} \nabla m_A$$

$$\mathbf{j}_B = -\rho D_{AB}^{(BB)} \nabla m_B$$

Defs : $\begin{cases} D_{AB} = \text{mixture components (A B)} \\ D^{(AA)} = \text{related quantities } (\mathbf{j}_A, m_A) \end{cases}$

$$D_{AB}^{(AA)} \nabla m_A = -D_{AB}^{(BB)} \nabla m_B$$

$$m_A + m_B = 1$$

$$\nabla m_A = -\nabla m_B$$

$$D_{AB}^{(AA)} = D_{AB}^{(BB)} \Leftrightarrow D_{AB}^{(AB)} = D_{AB}^{(BA)}$$

Maxwell-Stefan eqn.

$$\mathbf{J}_A^* = -C \hat{D}_{AB} x_A \frac{\nabla \mu_A}{k_B T} \Leftrightarrow x_A x_B (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = -\hat{D}_{AB} x_A \nabla \ln a_A$$

[1] L. Onsager and R. M. Fuoss, *The Journal of Physical Chemistry* **36**, 2689 (1931).

[2] L. Onsager, *Physical Review* **37**, 405 (1931); L. Onsager, *Physical Review* **38**, 2265 (1931).

[3] V. G. Levich. *Physico-chemical Hydrodynamics*. (Wiley, Russia, 1959)



Extension: entropy production rate



$$\sum dS =: d_e S + d_i S > 0,$$

$$d_e S = \frac{d_e U' + p' dV'}{T'} + \frac{d_e U'' + p'' dV''}{T''},$$

$$\sigma \equiv \frac{d_i S}{d\tau} = J_u X_u + \sum_k J_k X_k,$$

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \sum_i \frac{\mu_i}{T} dn_i.$$

$$\frac{d_i S}{d\tau} = J_u \Delta\left(\frac{\mu}{T}\right) - J_m \Delta\left(\frac{1}{T}\right) = J_m X_m + J_u X_u.$$

$$X_u = \Delta\left(\frac{1}{T}\right), \quad X_k = -\Delta\left(\frac{\mu_k}{T}\right).$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum_k J_k X_k$$

$$J_m = -\frac{dm'}{d\tau} = \frac{dm''}{d\tau} = -L_{11} X_m + L_{12} X_u.$$

$$(J_u, J_m, i) = L_{(u,i),(u,i)} X_{(u,i)}.$$

$$J_k = \sum_i L_{ki} X_i, \quad L_{ki} = L_{ik}.$$

$$J_u = -\frac{d_i U'}{d\tau} = \frac{d_i U''}{d\tau} = -L_{21} X_m + L_{22} X_u.$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X_i}\right)_{X_u} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta c_i}\right)_{\Delta p, \Delta T} = 0.$$

梯度
grad

连续系-多组分
Continuum-multi-component

放宽定态假设
考虑扰动演化
evolution

非平衡定态
Non-eq stationary state

线性唯象率
倒易关系
唯象系数恒定
assumptions

非线性问题
Non-linear problems

$$T\sigma \equiv J_q X_u + \sum_k J_{m,k} X_k.$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial X_i}\right)_{i=1, \dots, k} = 0 \Rightarrow (J_i)_{i=k+1, \dots, n} = 0.$$

Irreversible thermodynamics →
non-equilibrium statistical mechanics
(Boltzmann transport equation /
scattering term modeling)

$$X_u = -\frac{\nabla T}{T}, \quad X_k = F_k - T \nabla \left(\frac{\mu_k}{T}\right).$$

$$(J_q, J_{m,i}) = L_{(u,i),(u,i)} X_{(u,i)}.$$

$$d\mu_k = -s_k dT + v_k dp + \partial_{c_i} \mu_k dc_i.$$

$$\text{e.g. } T\sigma = (\nabla T)^2 \left\{ L'_{11} - \frac{(L'_{12})^2}{L'_{22}} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{\tau_H}\right) \right] \right\}.$$

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{d_e S}{d\tau} + \frac{d_i S}{d\tau} = 0. \text{ (steady-state)}$$

$f =: f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots$
 $f = f^{(0)}:$ eq thermodynamics
 $f = f^{(0)} + f^{(1)}:$ differential rel.
 Higher order: strong non-eq

[1] 陈宏芳. 高等工程热力学. (北京, 清华大学出版社, 2000)

[2] I. Prigogine. *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes (Third Edition)*. (Wiley, New York, 1967)

[3] I. Prigogine. *Non-equilibrium Statistical Mechanics*. (Dover, New York, 1962)



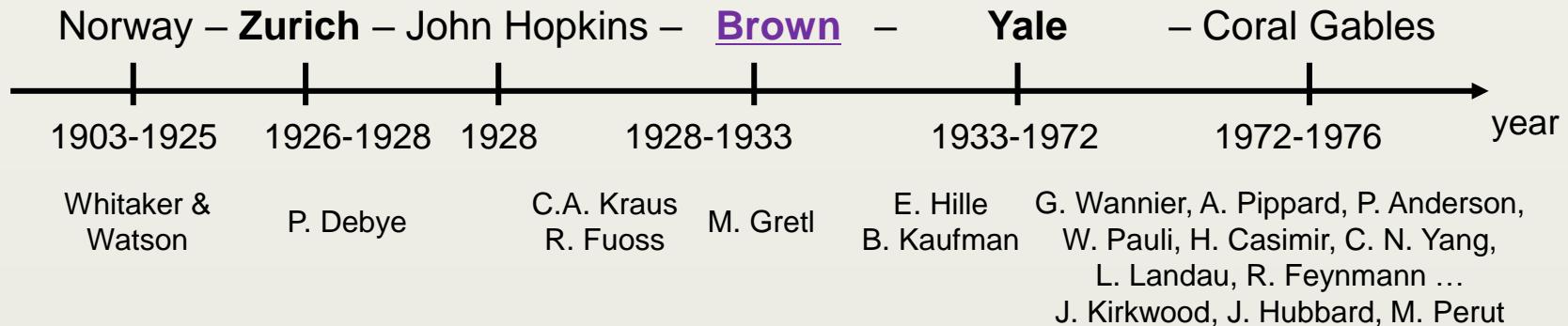
Contents

- Background
- Academic CV: from Zurich/Brown to Yale
- Achievements: symmetry & structure; electrolyte solutions
- Takeaways
- Anecdotes

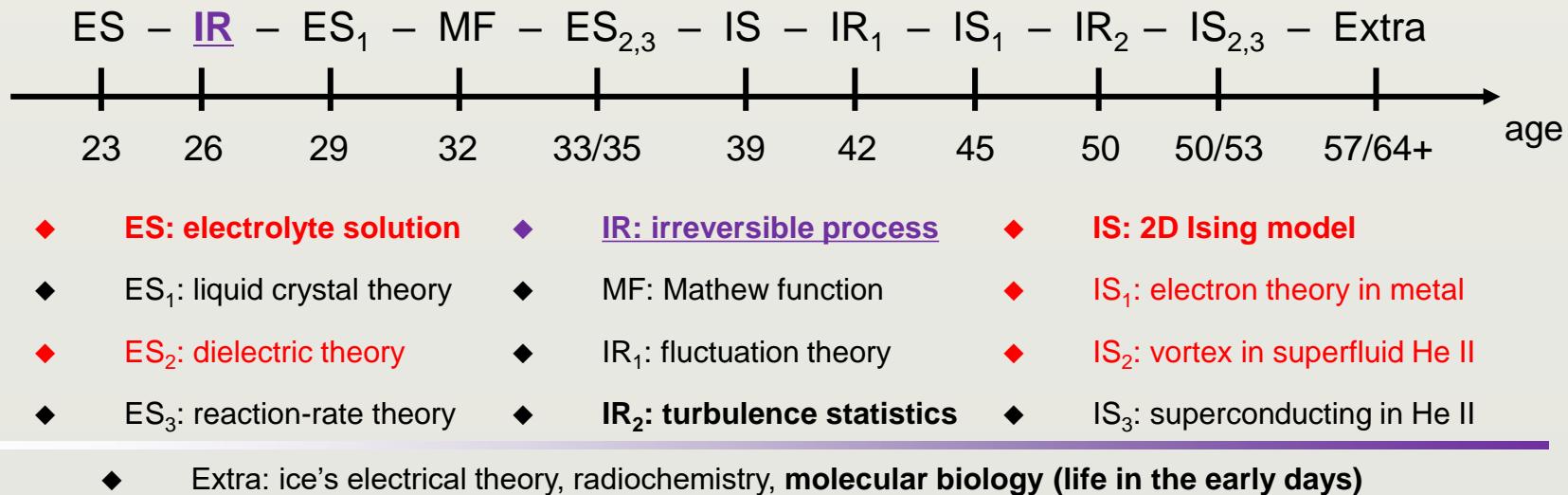


Academic CV & achievements

➤ Academic CV: from Zurich/Brown to Yale



➤ Achievements: symmetry & structure





Example: Zur Theorie der Elektrolyte

390

Onsager, Zur Theorie der Elektrolyte. I. Physik.Zeitschr.XXVII,1926.

Ionic atmosphere around an ion with effective radius of b

extrapolierten wanderungsgeschwindigkeit des Ions berechnen. Die Ionenatmosphäre beginnt

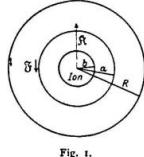


Fig. 1.

in einem gewissen Abstand vom Ion; wir bezeichnen denselben mit a , und nehmen entsprechend der zweiten Näherung von Debye und Hückel, indem wir den endlichen Ionen-durchmesser berücksichtigen, für die Ladungs-dichte den Wert

$$\frac{e_1}{4\pi} \frac{e^{\kappa r}}{1 + \kappa a} e^{-\kappa r}$$

Zur Theorie der Elektrolyte. I.

Von Lars Onsager.

§ 1. Debye und Hückel haben vor einiger Zeit den Einfluß der inter-ionischen Kräfte auf die thermodynamischen Eigenschaften sowie auf die Leitfähigkeit von Elektrolyten theoretisch berechnet^{1).}

Die Theorie der thermodynamischen Eigen-schaften leistet nun gewissermaßen mehr als diejenige der Leitfähigkeit. Es wird nämlich z. B. für die Abhängigkeit der osmotischen Konzentrations von der Konzentration der für hinreichend verdünnte Lösungen gültige Ausdruck:

$$g = 1 - \alpha \sqrt{c} \quad (1)$$

abgeleitet, wobei im Koeffizienten α außer Tem-

$$\Lambda = \Lambda_0 (1 - \alpha \sqrt{c}) \quad (2)$$

$$f_1 = 1 - h \sqrt{c} \quad (2)$$

1) Diese Zeitschrift 24, 185, 305, 1923.

Die Gleichungen von Stokes lauten nun, wenn v = Geschwindigkeit, P = Druck, η = Visko-sität der Flüssigkeit:

$$\eta \text{ rot } v = - \text{ grad } P + \vec{F} \quad (4)$$

$$\text{div } v = 0$$

Wir dürfen immer das Stromsystem in zwei Teile zerlegen:

$$v = v_1 + v_2$$

derart, daß v_1 dem Fall

$$\begin{cases} R_1 = R \\ \vec{F}_1 = 0 \end{cases}$$

v_2 dem Fall

$$\begin{cases} R_2 = 0 \\ \vec{F}_2 = \vec{F} \end{cases}$$

entsprechen. Eine solche Zerlegung ist dann zulässig, wenn die Gleichungen mehr mit hinreichender Genauigkeit beschrieben werden, sofern nur Gesetz gilt.

Was wir letzten Endes suchen, ist nur die Geschwindigkeit des Ions. Wir kümmern uns deshalb nicht um die Einheiten im Stromsystem v_1 , sondern stellen einfach $v_1 = 0$. Die Kraft \vec{F} dem Ion die Geschwindigkeit

$$V_1 = \frac{P}{\eta}$$

erteilt, und suchen weiter den das Kräfteystem \vec{F} zur Geschwindigkeit des Ions liefert.

Dafür zerlegen wir die Ionenatmosphäre in dünne konzentrische Kugelschalen, und untersuchen das Stromsystem dV_2 , das von den Abständen r und $r + dr$ vom Ion angreifenden Kräften herrührt. Wir gelangen sofort zum Ziel, wenn wir die Resultate von Stokes über die Bewegung der ziehen. Nach Stokes bewegt sich eine Kugel vom Radius r unter Einwirkung einer Kraft P mit der Geschwindigkeit

$$\frac{P}{6\pi\eta r}$$

durch die Flüssigkeit. Die pro Einheit der Flüssigkeit auf die Kugel wirkende Kraft, die sich aus Druck und Fliehkräfte zusammensetzt, ist dabei gleichmäßig über die gesamte Kugeloberfläche verteilt, und für alle Teile deselben der Bewegungsrichtung parallel und entgegengesetzt gerichtet^{2).}

2) Vgl. Lamb, Hydrodynamics, Dritte Ausgabe S. 552.

Superposition principle of different types of forces on the ion: electrostatic & electrophoretic

External force (e.g. electric force)

Stokes force to balance the electrophoretic force

start from P. Debye's work

253

254

Physik.Zeitschr.XXVII,1926. Onsager, Zur Theorie der Elektrolyte. I.

391

oder mit Rücksicht auf (3):

$$V_2 = - \frac{Ge_1}{6\pi\eta} \frac{x}{1 + \kappa a}.$$

§ 4. Erweiterung der Voraussetzungen. Wir lassen jetzt die Annahme von der unbeschränkten Gültigkeit der hydrodynamischen Gesetze fallen, und fordern nur, daß die Kräfte außerhalb des Abstandes R von der Kugel V_2 streng gelten sollen. Der Anteil, den die in größerer Entfernung angreifenden Kräfte zu V_2 liefern, ist immer noch mit Hilfe von (2) berechnen. Es ergibt sich sofort dafür:

$$V'_2 = \int_{r=a}^{\infty} dV_2 = - \frac{2}{3} A \frac{1}{\eta} \frac{e^{-xR}}{x} = \left[- \frac{Ge_1}{6\pi\eta} e^{-x(R-a)} \frac{x}{1 + \kappa a} \right]. \quad (8)$$

Für hinreichend kleine x können wir die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, so daß man erhält:

$$V'_2 \simeq - \frac{Ge_1}{6\pi\eta} x. \quad (9)$$

Für die innerhalb des Abstandes R angreifenden Kräfte läßt sich zeigen, daß ihr Gesamtbetrag bei kleinen Konzentrationen proportional x^2 ist, da:

$$\int_a^R 4\pi r^2 A \frac{e^{-xr}}{r} dr \simeq \int_a^R 4\pi r A e^{-xr} dr = \frac{1}{2} 4\pi A e^{-xa} = \frac{1}{2} Ge_1 \frac{x^2}{1 + \kappa a}.$$

Beim Übergang von der Ionenatmosphäre zu einem geschlossenen Ionenfaktor tritt ein Proportionalitätsfaktor auf, dem wir nichts anderes wissen, als daß er endlich bleibt. Daraus schließen wir, daß der Beitrag zu dem Gesamtbetrag von diesen Kräften, gelernt, die Schwindigkeit des Ions bei kleinen Konzentrationen proportional x abnimmt, ebenso schnell wie der Gesamtbetrag der Kräfte abnimmt, x^2 ist. Dann dürfen wir ihn, aber die kleinen Konzentrationen neben V'_2 , x verschwinden, vernachlässigen, nach bei kleinen Konzentrationen:

$$V_2 \simeq V'_2 \simeq - \frac{Ge_1}{6\pi\eta} x. \quad (10)$$

Wir erhalten somit für die Geschwindigkeit des Ions in erster Näherung³⁾:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{R}{\eta} - \frac{Ge_1 n}{6\pi\eta} \quad (11)$$

3) Die Formel (11) ist nicht neu; man erhält dieselbe ohne weiteres aus denjenigen von Debye und Hückel, wenn man den „elektrophoretischen Radius“ dieser Autoren mit dem nach Stokes aus der Beweglichkeit der Ionen berechneten Radius identifiziert. Man vergleiche E. Hückel, „Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften“ III, 267 (1924), Fußnote.

Total velocity, including electrophoresis & electromigration

L. Onsager, Physikalische Zeitschrift 27, 388 (1926).

【L. Onsager's first published paper】

Method: math & fluid mechanics, particle statistics & symmetry

page11



Contents

- Background
 - Academic CV
 - Achievements
 - Takeaways: direct – transit – encrypt
 - Anecdotes: a brilliant scientist with colorful personalities
-



Takeaway: direct – transit – encrypt

专注: immersion

沉浸于学术研究
聚焦具体科学问题



- ✓ 定量理论计算-实验验证结合
 - 电解质溶液, 电离平衡
 - 倒易关系, 同位素分离



精明: “sharp cookie”

“拿锤子找钉子” →
“在啃硬骨头中锻造武器”

洞察: cryptogram

回归开普勒-伽利略时代
似的“加密对话”



- ✓ 坚实数学基础下的持续创新
 - 倒易关系/统计/“灵感-尝试”
 - 伊辛模型/矩阵/“迭代-坚持”



- ✓ 前沿学科视野-敏锐学术嗅觉
 - 电解质溶液^[2]/对称性
 - 伊辛模型/长程关联
- ✓ 准确判断何时应转换状态
 - 时而像老鹰翱翔/抖落掉羽毛
 - 时而像蠕虫挖洞/咀嚼腐殖质



- ✓ 学术趣闻
 - “screening effect”
 - “physical terms”
 - “talking in riddles”
 - 亚稳态-甘油工厂



- ✓ 从简单例子求解找一般规律
 - 倒易关系^[2]/复杂输运共性
 - 伊辛模型/高维矩阵计算



- ✓ 某领域创新性不足便转向
 - 冰的电学性质 (57)
 - 生物膜与大分子 (64)



- ✓ 学术联系
 - 湍流统计 (JQ Lin/SJ Lu)^[3]
 - 伊辛模型 (Yang/Landau)^[4]
 - 液氦超流 (Feynmann)^[4]

[1] H. Longuet-Higgins and M. E. Fisher, *Journal of Statistical Physics* **78**, 605 (1995); P. J. Wojtowicz, *Ferroelectrics* **15**, 1 (1977).

[2] E. T. Jaynes, *Annual Review of Physical Chemistry* **31**, 579 (1980); U. M. B. Marconi, et al., *Physics reports* **461**, 111 (2008). page14

[3] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan, *Reviews of Modern Physics* **78**, 87 (2006). 13

[4] 杨振宁, *自然杂志*, **723** (1989); J. D. Reppy, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, **1** (2022).



Anecdotes: colorful personalities

➤ **Teaching**

- “Sadistical mechanics”, “Advanced Norwegian I/II”; “study for keeps”

➤ **Communication**

- AP before PhD, story of “spinor”; “drop the level on stage at a time”

➤ **“Duets”**

- P. Debye; C. A. Kraus, New Boy, RA w Nobel Prize; J. Kirkwood, B Kaufman

➤ **Critiques**

- “need sterilizing”, blackboard “X” or erasing, 3D Ising problem

➤ **Interests**

- Norse mythology, gardening, encyclopedia; paleontology; swimming

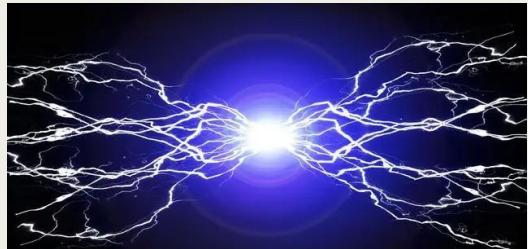
[1] H. Longuet-Higgins and M. E. Fisher, *Journal of Statistical Physics* **78**, 605 (1995).

[2] P. J. Wojtowicz, *Ferroelectrics* **15**, 1 (1977).



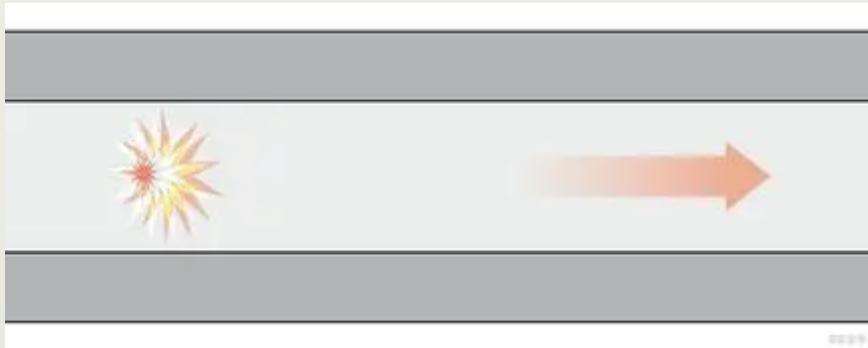
Thank you

Appendix: dissipation in electron transport



Electrical energy
dissipates into heat

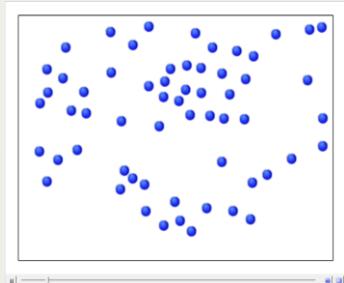
electron “friction”



Ohmic dissipation function $W = R_t I^2 = UI$

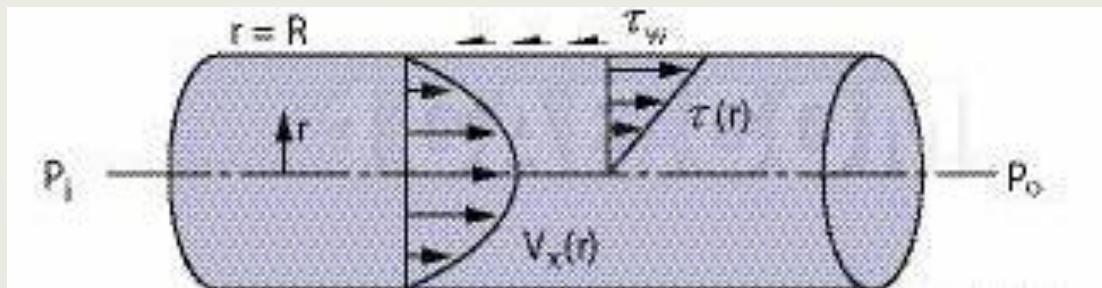
(Refer to Prof. Wang' slides)

Appendix: dissipation in fluid flow



Mechanical energy
dissipates into heat

molecule “friction”

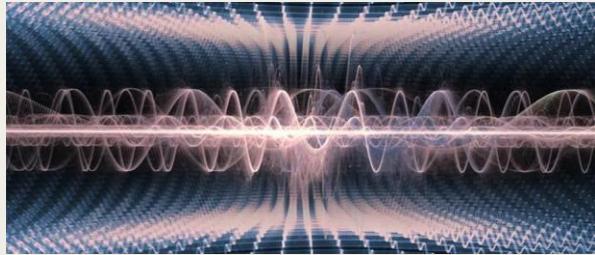


Viscous dissipation function $\psi = \int \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 dA \sim (\bar{u})^2 \bar{\mu}$

$$\bar{u} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dr} \quad \bar{\mu} = \frac{12}{3} \frac{\mu}{R}$$

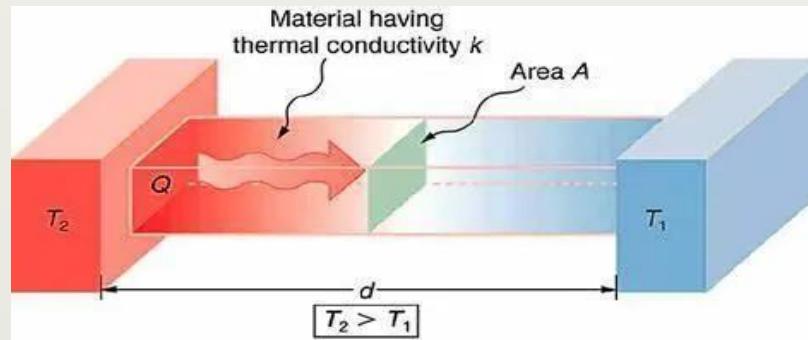
(Refer to Prof. Wang' slides)

Appendix: dissipation in heat transfer



Heat dissipates into what?

phonon “friction”



- “Heat dissipation function”
- Every spontaneous transport needs costs (no free lunch)
 - Are there other candidates than the concept of entropy?