

# 饲料混合加工问题

## 摘要

本题加工动物饲料的原料有 16 种，其中不同原料有不一样的效能率，总量也不一样，不同原料之间有相似度的要求，可供加工的装置有 9 台，分 3 种规格，成本计算也不同。品种代码 10 的原料不能单独成为一个加工包，必须与其他原料混合。分析数据可以获得需要加工的原料有 16 种，共 6000kg，所有 9 台加工装置的加工能力在 5400-8100kg 之间。16 种原料中有六种饲料的能耗率  $<0.8$ ，分别是 2、6、7、11、12、14，这六种的总重量是 2300kg。

问题一，研究 16 种原料两两之间的亲缘度，并进行统计性分析。即依据亲缘值  $N$  的计算方法得出一个  $16 \times 16$  方阵，并做简要统计学分析得出??

问题二，将 16 种原料进行混合全部放入 9 个加工装置中，求出饲料质量最高的混合方案并给出每个加工包的亲缘度。即要求一次性全部加工完毕，且要求饲料质量最高。此问题的目标函数是饲料质量，饲料质量完全可以由“亲缘度”替代，所以优化目标为“亲缘度”，约束条件仅限于原料混合方式、加工装置的重量范围以及全部加工，不考虑加工成本和能耗率。

问题三，要求全部加工，题中的“能耗率”即为“效能率”。求出平均能耗率超过 80% 的加工包数量最多的混合方案并给出每个加工包的能耗率。即要求一次性全部加工完毕，且要求能耗率最高。发现和問題二较相像，只是优化目标变为“能耗率  $>0.8$  的加工包数”，约束条件与问题二相同，不考虑加工成本和饲料质量。对 16 种原料的能耗率分析，发现 2、6、7、11、12、14，这六种饲料的能耗率  $<0.8$ ，所以要与其它种类原料进行混合，这一点作为挖掘出的约束条件。

问题四，部分加工装置可以不生产，用尽量低的加工成本完成整个加工任务，同时要求平均能耗率超过 80% 的加工包尽可能的多。即取消的一次性加工的限制，可以多次加工，优化目标变为“加工成本最低”“能耗率  $>0.8$  的加工包数”，约束条件变为原料混合方式、加工装置的重量范围以及加工成本的构成，不考虑饲料质量。对加工成本分析可发现，使用的加工装置容量越大，加工重量越重，加工成本就越低。考虑极端情况，不需考虑饲料质量——“亲缘度”，尽量使所有加工包能耗率  $>0.8$ ，且尽量用第三类加工装置进行加工。

问题五，在问题四的基础上增加了问题二中“亲缘度”的优化目标。与问题四相同，不要求一次性全部加工。在问题四“加工成本最低”“能耗率  $>0.8$  的加工包数”的基础上，对“亲缘度尽量高”这一目标进行优化。则涉及到一个问题，各优化目标的重要性，需要对三个目标排个先后顺序，定个目标比重。对各指标进行标准化后，按照各占  $1/3$  的重要性进行优化。

**关键词** 饲料混合、效能率、亲缘度、加工窑、混合方案

## 1 问题重述

饲料加工厂需要加工一批动物能量饲料。饲料加工需要原料，如加工猪饲料需要玉米、荞麦、稻谷等。加工厂从不同的产区收购了原料，原料在收购的过程中由于运输、保鲜以及产品本身属性等原因，存在着效能率的问题（如 1 吨玉米可加工成 0.7 吨左右的玉米面）。这个数据在原料进厂之后可以通过随机抽样进行检测得到。

某饲料加工厂有 9 个加工窖，现有一批加工任务，要将 16 个加工原料（见表 1）按照某种混合方案一次性放入加工窖中进行加工。一个加工窖的混合产品称为一个加工包。如果某加工原料重量不少于 500 千克，则可以单独成为一个加工包。因产品属性原因，要求品种代码 10 的加工原料不能单独成为一个加工包。每一个加工窖能够加工的重量有限定范围（见表 2）。加工窖加工成本由点火成本（也称固定成本）与加工量成本（也称可变成本）构成，其他成本暂不考虑。表 1 提供了各加工原料的品种代码、总重量和效能率。表 2 提供了每一个加工窖能够加工的重量范围以及点火成本、加工量单位成本数据。由于加工窖数量低于饲料加工原料的品种数，所以在加工前需要将若干个加工原料进行混合。为了保证加工后饲料的质量，要求混合的任何两个加工原料之间必须具有亲缘关系。工厂技术人员对每种加工原料进行了基因检测，得到了 10 个关键位点的基因序列（见表 1），并规定，两个加工原料如果有  $N$  个相同位点的基因序列标记相同，就认为这两个加工原料的亲缘值为  $N$ （如果  $N$  大于 0，则说明这两种加工原料之间具有亲缘关系），一个加工包中所有原料两两之间亲缘值的平均值称为亲缘度。例如品种代码 1、2、5 的加工原料混合成为一个加工包，假设品种代码 1 和品种代码 2 的亲缘值为 5，品种代码 1 和品种代码 5 的亲缘值为 3，品种代码 2 和品种代码 5 的亲缘值为 5，那么它们的亲缘度就是  $(5+3+5)/3$ 。如果一个加工包中只含有一种加工原料，则该加工包的亲缘度为 10。本题仅从亲缘度角度考虑混合加工饲料的质量，亲缘度越高，饲料质量就越高。

请考虑下列问题：

1. 请研究 16 个加工原料两两之间的亲缘值，并进行统计性分析。
2. 将 16 个加工原料进行混合全部放入 9 个加工窖中。请建立数学模型，求出饲料质量最高的混合方案并给出每个加工包的亲缘度。
3. 将 16 个加工原料进行混合全部放入 9 个加工窖中。请建立数学模型，求出平均能耗率超过 80% 的加工包数量最多的混合方案并给出每个加工包的能耗率，并将结果填入表 3。
4. 如果饲料加工厂允许部分加工窖不生产，请建立数学模型，给出混合加工方案，用尽量低的加工成本完成整个加工任务，同时要求平均能耗率超过 80% 的加工包尽量多。
5. 如果饲料加工厂允许部分加工窖不生产，但必须完成整个加工任务。请建立数学模型，给出混合加工方案使得（1）饲料质量尽量高，（2）加工成本尽量低，（3）平均能耗率超过 80% 的加工包尽量多。

品种 代码	总重量 千克	效能 率	位点基因序列（用字母简化表达）									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	300	0.88	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
2	500	0.60	a	b	c	d	e	o	p	k	l	m
3	200	0.93	f	g	h	a	j	o	p	k	l	m
4	500	0.90	f	g	h	i	j	l	p	f	o	p
5	300	0.90	f	b	h	d	e	o	p	a	o	z
6	400	0.78	r	m	t	u	q	f	g	a	f	z
7	300	0.70	r	s	t	u	k	f	g	h	f	c
8	300	0.83	r	s	t	u	a	b	h	i	j	c
9	400	0.95	c	s	a	f	v	w	a	i	j	c
10	600	0.87	b	m	n	i	a	z	h	f	o	z
11	100	0.65	m	a	m	e	a	z	a	b	a	b
12	600	0.75	m	c	m	e	x	h	a	b	n	a
13	500	0.8	b	a	n	y	c	g	m	b	m	b
14	400	0.68	m	c	m	y	x	g	m	b	n	b
15	300	0.87	b	x	n	i	c	l	b	c	m	p
16	300	0.83	c	c	a	f	x	h	b	c	m	j

图 1: 各加工原料的品种代码、总重量、效能率和基因序列标记

加工窖编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
加工重量下限（千克）	300	300	300	600	600	600	900	900	900
加工重量上限（千克）	600	600	600	900	900	900	1200	1200	1200
点火成本（元）	400	400	400	500	500	500	600	600	600
加工量单位成本（元/千克）	2	2	2	1.8	1.8	1.8	1.6	1.6	1.6

图 2: 加工窖加工的重量范围、点火成本、加工量单位成本

加工窖 加工原料	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
能耗率									

图 3: 问题 3 的结果（每个加工窖所含每种加工原料的重量，千克）

## 2 问题一

为了保证加工后饲料的质量，要求混合的任何两个加工原料之间必须具有亲缘关系。工厂技术人员对每种加工原料进行了基因检测，得到了 10 个关键位点的基因序列。我们规定，两个加工原料如果有  $N$  个相同位点的基因序列标记相同，就认为这两个加工原料的亲缘值为  $N$ （如果  $N$  大于 0，则说明这两种加工原料之间具有亲缘关系），一个加工包中所有原料两两之间亲缘值的平均值称为亲缘度。本题仅从亲缘度角度考虑混合加工饲料的质量，亲缘度越高，饲料质量就越高。

根据题中所给条件，加工原料的基因序列用小写的英文字母表示。因此，若想得到所有 16 个加工原料间的亲缘度，只需统计基因序列中相同的位点数目，即可得到结果。

由此，我们采取了 Python 编程，计算得到每个加工原料两两之间的亲缘度，并将结果保存至一个  $16 \times 16$  的矩阵，称其为“亲缘度矩阵”，后续解题中如有用到亲缘度，直接查询矩阵便可得到结果，十分方便。

得到亲缘度结果后，需要对其进行统计学分析。考虑到加工原料亲缘度的特殊性以及特点，我们采用热图的方式进行分析，是的结果一目了然，并可粗略分析得到亲缘度的分布规律。

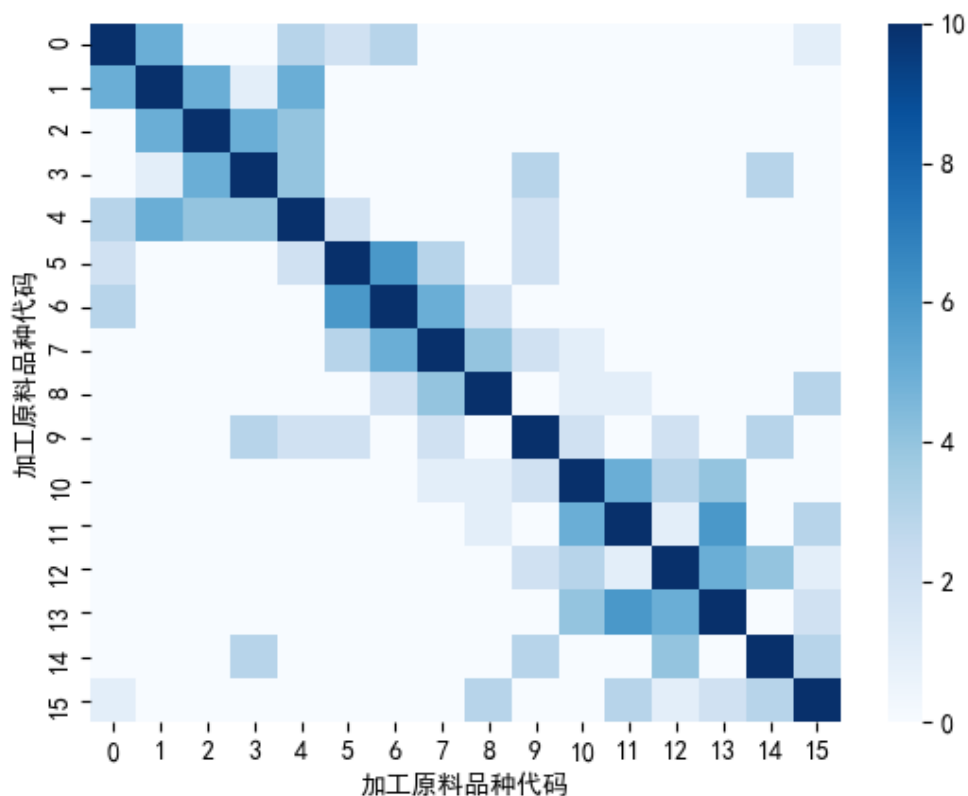


图 4: 亲缘度的热图表示

如图所示，热图中颜色越深处两个加工饲料间的亲缘度越高。且颜色较深区域主要分布在对角线区域，由此我们可知，大体上来说，两个加工饲料的编号越相近，则其亲缘度越高。在实际解题中，我们可以利用这一特性，优化算法。

### 3 问题二

#### 3.1 分析

将 16 种原料进行混合放入 9 个加工装置中，求出饲料质量最高的混合方案并给出每个加工包的亲缘度。

此问题的优化目标是饲料质量，也就是“亲缘度”最高。假如我们已经有最优的混合方案，那么饲料质量为九个加工装置的“混合后亲缘值  $\times$  加工质量”之和。

16 种一次性放入 9 个装置中，必有混合。而所有装置的加工下限是 300kg，所以小于 300kg 的原料必须与其他混合。

假设只考虑可以两两混合的情况。

总的饲料质量用亲缘值表示。在问题二中，九个加工装置要求一次性加工完全，那就是九种成品饲料，可以计算出九个亲缘值。九种饲料的重量不一，总的饲料质量需要使用饲料重量对九种饲料的亲缘值进行加权。

饲料重量等于各加工装置中不同原料的重量与能效率的乘积之和。

## 4 问题三

求解效能率大于 0.8 的加工包数最多的混合方案及每个加工包的效能率。

$EC_i$ , 第  $i$  个加工包中的平均效能率 = 饲料重量/原料重量

$$EC_i = \frac{W_i}{WC_i} = \frac{\sum_{j=1}^{16} w_{ij} \times E_j}{\sum_{j=1}^{16} w_{ij}} (W_i \text{ 第 } i \text{ 个加工包成品饲料的重量, } WC_i \text{ 加工包总重量})$$

$E_t$ , 平均效能率大于 0.8 的加工包的数量

$$E_t = \text{sum}(EC_i > 0.8)$$

目标函数为

$$\max f(x) = E_t$$

每个加工包的效能率即为  $EC_i$

混合方案为  $w_{ij} (i = 1, 2, \dots, 9, j = 1, 2, \dots, 16)$

## 5 问题四

能耗率大于 0.8 的加工包数最多且加工成本尽量低的混合方案及每个加工包的能效率。

第一部分, 先建立模型求成本最低, 因为不再要求一次性加工完毕, 所以加工包个输不再限制在 9 个。据分析, 3 和 11 号原料 >300kg, 所以最多需要 14 个加工包。

第二部分, 队耗能率 >0.8 的加工包数最多且加工成本最低同时进行优化。假设加工成本和能耗率的重要性相等, 则分别赋权 0.5 将前面的最优值作为基准。

## 6 问题五

给出混合加工方案使得饲料质量尽量高, 加工成本尽量低, 平均能耗率超过 80% 的加工包尽量多。

假设饲料质量、加工成本和能耗率的重要性相等, 则分别赋权 1/3. 将前面计算的最优值作为基准。

$S$ , 加工成本的基准 = 只考虑总加工成本时的最优值

$$S = S_t$$

$E$ , 能耗率的基准 = 只考虑能耗率 >0.8 加工包数的最优值

$$E = E_t$$

$K$ , 饲料质量的基准 = 只考虑饲料质量的最优值

$$K = K_t$$

## 附录

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# load raw material's gene list
path='data.xls'
material_info=pd.read_excel(path,sheet_name='加工原料信息')
info=material_info.iloc[0:16,3:13]

# function to compute kinship
def kinship(x,y):
    lenth=len(x)
    kin=0
    for i in range(0,lenth):
        if x[i]==y[i]:
            kin+=1
    return kin

kin_mat=np.zeros((16,16))
for i in range(0,16):
    for j in range(0,16):
        kin_mat[i][j]=kinship(list(info.iloc[i]),list(info.iloc[j]))

plt.figure()
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
ax = sns.heatmap(kin_mat, cmap='Blues')
plt.xlabel('加工原料品种代码')
plt.ylabel('加工原料品种代码')
plt.savefig('kinship.png')
plt.show()
```