

## 第1章 图论预备知识

1.1 解: (1)  $p = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$$(2) p = \{\phi, \{a\}, \{\{b,c\}\}, \{a, \{b,c\}\}\}$$

$$(3) p = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$(4) p = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

$$(5) p = \{\phi, \{\{a,b\}\}, \{\{a,a,b\}\}, \{\{a,b,a,b\}\}, \{\{a,b\}, \{a,a,b\}\}, \{\{a,b\}, \{a,b,a,b\}\}, \{\{a,b\}, \{a,a,b\}, \{a,b,a,b\}\}\}$$

1.2 解: (1) 真 (2) 假 (3) 假 (4) 假

1.3 解: (1) 不成立,  $A = \{1\}$   $B = \{1,2\}$   $C = \{2\}$

(2) 不成立,  $A = \{1\}$   $B = \{1,2\}$   $C = \{1,3\}$

1.4 证明: 设  $(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$  说明  $x \in A \cap B, y \in C \cap D$

由于  $x \in A, y \in C$  所以  $(x,y) \in A \times C$

由于  $x \in B, y \in D$  所以  $(x,y) \in B \times D$

所以  $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

反过来, 如果  $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

由于  $(x,y) \in (A \times C)$  所以  $x \in A, y \in C$

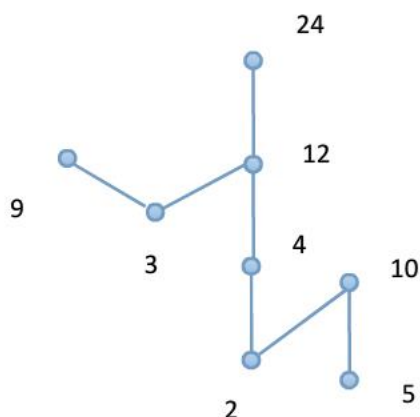
由于  $(x,y) \in (B \times D)$  所以  $x \in B, y \in D$

所以  $x \in (A \cap B)$   $y \in (C \cap D)$

所以  $(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$

所以  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

1.5 解: Hasse 图



极大元{9,24,10,7}

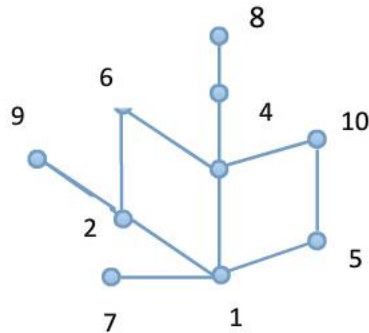
极小元{3,2,5,7}

最大元{24}

最小元{2}

1.6 解 (1) $R=\{<x,y>|x \text{ 整除 } y\}$

(2)关系图为:



(3)不存在最大元, 最小元为{2}

1.7 解: (1) $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>\}$

(2)略

(3) $I_A \subseteq R$  故  $R$  是自反的。

$<1,2> \in R$   $<2,3> \in R$  但是  $<1,3> \notin R$  故不满足传递性

1.8 解: (1) 不成立  $A=\{1\}$   $B=\{2\}$   $C=\{3\}$   $D=\{4\}$  则左式= $\{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>\}$  右式= $\{<1,3>,<2,4>\}$

(2) 不成立  $A=\{1,3\}$   $B=\{1\}$   $C=\{2,4\}$   $D=\{2\}$  则左式= $\{<3,4>\}$

右式= $\{<1,4>,<3,2>,<3,4>\}$

(3) 不成立  $A=\{1\}$   $B=\{2\}$   $C=\{3\}$   $D=\{4\}$  则左式= $\{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>\}$

右式= $\{<1,3>,<2,4>\}$

(4) 成立 证明: 设  $<x,y> \in (A-B) \times C \Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge y \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \Leftrightarrow <x,y> \in A \times C \wedge$

$<x,y> \in B \times C \Leftrightarrow <x,y> \in (A \times C) - (B \times C)$

故得  $(A-B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

## 1.9 略

### 1.10 略

**1.11 解:**  $A$  为  $n$  个元素的优先级和,  $A$  上有  $2^{n^2}$  个不同的二元关系, 理由为: 设  $A, B$  为集合,  $A \times B$  的任何子集所定义的二元关系称作从  $A$  到  $B$  的二元关系, 特别当  $A=B$  时, 称作  $A$  上的二元关系, 若  $|A|=n$ , 则  $|A \times A|=n^2$ , 那么  $A$  上共有  $2^{n^2}$  个不同的二元关系。

### 1.12 略

**1.13 解:** 1)真. 由于  $R_1$  和  $R_2$  都是自反的, 因而对任何, 都有  $(x, x) \in R_1, (x, x) \in R_2$ . 因此, 对任何  $x \in A$ , 都有  $(x, x) \in R_1 R_2$ . 所以  $R_1 R_2$  是自反的。

2)假. 令  $A=\{a, b\}, R_1=\{(a, b)\}, R_2=\{(b, a)\}$ . 那么  $R_1 R_2=\{(a, a)\}$ , 它就不是  $A$  上的反自反关系。

3)假. 令  $A=\{a, b, c\}, R_1=\{(a, b), (b, a)\}, R_2=\{(b, c), (c, b)\}$ . 那末  $R_1 R_2=\{(a, c)\}$ , 就不是  $A$  的对称关系。

4)假. 令  $A=\{a, b, c, d\}, R_1=\{(a, c), (b, c)\}, R_2=\{(c, b), (d, a)\}$  易证  $R_1, R_2$  都是反对称关系. 但是  $R_1 R_2=\{(a, b), (b, a)\}$  就不是  $A$  上的反对称关系。

5)假. 令  $A=\{a, b, c\}, R_1=\{(a, c), (b, a), (b, c)\}, R_2=\{(c, b), (a, c), (a, b)\}$ , 易证  $R_1$  和  $R_2$  都是传递关系, 但  $R_1 R_2=\{(a, b), (b, b), (b, c)\}$  就不是  $A$  上的传递关系。

**1.14 证明:** 由任意的  $a$ , 存在一个  $b$ , 使得  $\langle a, b \rangle \in R$ , 由对称性所以  $\langle b, a \rangle \in R$ , 由传递性  $\langle a, a \rangle \in R$ , 所以  $R$  是等价关系。

**1.15 证明:** ①  $x \in A, \langle x, x \rangle \in R, \langle x, x \rangle \in S \rightarrow \langle x, x \rangle \in R \cap S$ , 所以  $R \cap S$  有自反性;  
②  $x, y \in A$ , 因为  $R, S$  是反对称的,  $\langle x, y \rangle \in R \cap S \wedge \langle y, x \rangle \in R \cap S (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S) \wedge (\langle y, x \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in S) (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \wedge (\langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, x \rangle \in S) x=y \wedge y=x x=y$

所以,  $R \cap S$  有反对称性。

③  $x, y, z \in A$ , 因为  $R, S$  是传递的,

$\langle x, y \rangle \in R \cap S \wedge \langle y, z \rangle \in R \cap S \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in S \langle x, z \rangle \in R \cap S$

所以,  $R \cap S$  有传递性。

所以  $R \cap S$  也是  $A$  上的偏序关系。

**1.16 解:**

$$r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 5,5 \rangle \}$$

$$s(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 5,5 \rangle \}$$

$$t(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle \}$$

**1.17 (1) 证明:** ① 对任意  $a, b, a+b=a+b$ , 故得  $(a,b)R(a,b)$ , 关系  $R$  具有自反性;

② 如果  $(a,b)R(c,d)$ , 则  $a+d=b+c, c+b=d+a$ , 故得  $(c,d)R(a,b)$ ,

关系  $R$  具有对称性;

③ 如果  $(a,b)R(c,d), (c,d)R(e,f)$ , 则  $a+d=b+c, c+f=d+e$ ,

故得  $a+f=b+e, (a,b)R(e,f)$ , 关系  $R$  具有传递性;

于是关系  $R$  是等价关系.

**1.18 略**

**1.19 略**

**1.20 解:** (1) 单射

(2) 满射

(3) 既不是单射, 也不是满射

(4) 满射

(5) 双射

**1.21 解:** (1)  $O(n^3)$

(2)  $O(n^5)$

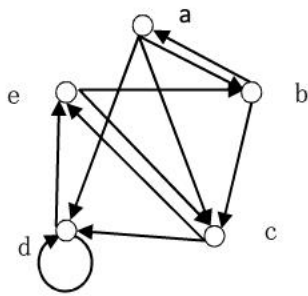
(3)  $O(n^3 n!)$

## 第 2 章 图

### 2.1

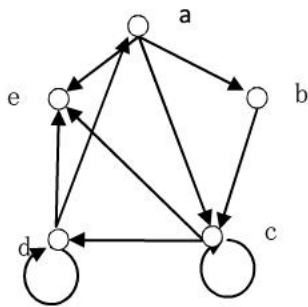
解:

(1)



a:出度为 3、入度为 1  
b:出度为 2、入度为 2  
c:出度为 2、入度为 3  
d:出度为 2、入度为 3  
e:出度为 2、入度为 2

(2)



a:出度为 3、入度为 1  
b:出度为 1、入度为 2  
c:出度为 3、入度为 3  
d:出度为 3、入度为 2  
e:出度为 0、入度为 3

## 2.2

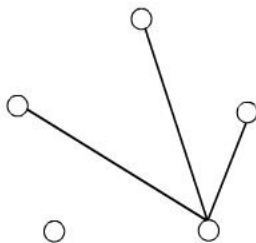
解:

构成无向图的度序列: (1)、(2)、(3)、(4)、(6)

构成无向简单图的度序列: (2)、(3)、(4)

## 2.3

解: 补图为:



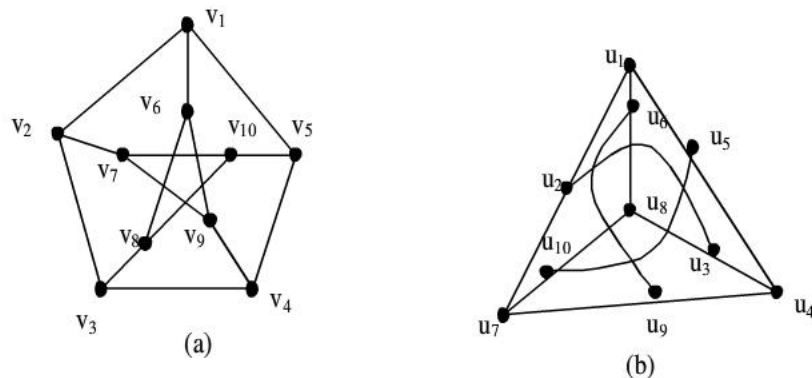
## 2.4

解:

设图  $G$  中结点数为  $n$ , 则有  $3 \times 4 + 3 \times (n-3) = 2 \times 12$ . 求得  $n=7$ , 即图  $G$  有 7 个结点.

## 2.5

证明将习图 2.2 的两图顶点标号为如下的(a)与(b)图



作映射  $f: f(v_i) \rightarrow u_i \quad (1 \leq i \leq 10)$

容易证明, 对  $\forall v_i v_j \in E((a)),$  有  $f(v_i v_j) = u_i u_j \in E((b)) \quad (1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10)$

由图的同构定义知, 两个图是同构的。

## 2.6

解: 同构对应关系:  $a-8$ 、 $b-7$ 、 $c-4$ 、 $d-9$ 、 $e-5$ 、 $f-6$ 、 $g-1$ 、 $h-2$ 、 $i-10$ 、 $j-3$ .

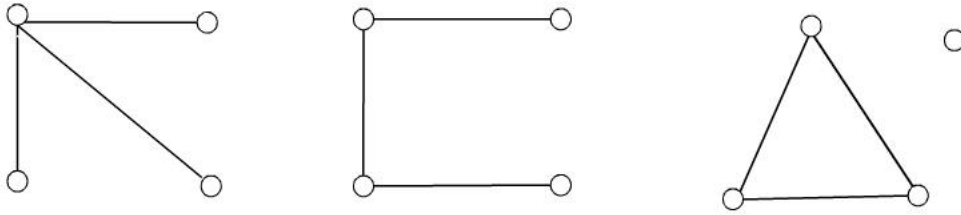
## 2.7

证: 设在一有向完全图  $G$  中, 边数为  $n$ . 则可知  $\sum \deg^+(v_i) = \sum \deg^-(v_i) = n$ . 即所有结点的入度和等于所有节点的出度和, 即所有结点的入度的平方和等于所有节点的出度的平方和。

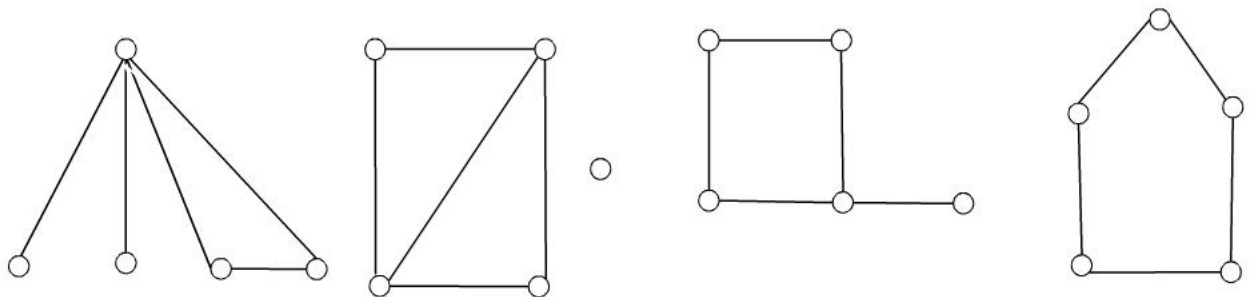
## 2.8

解：

(1)



(2)



## 2.9

证明：用反证法。

设无向图  $G$  只有两个奇点  $u, v$ ，若  $u, v$  不连通，即它们之间没有任何通路，则  $G$  至少有两个连通分支  $G_1, G_2$ ，且  $u, v$  分别属于  $G_1$  和  $G_2$ ，于是  $G_1$  和  $G_2$  中各有一个奇度结点，与握手定理矛盾，因此  $u, v$  必连通。

## 2.10

解：点割集为： $\{v_1, v_3\}$ 、 $\{v_4\}$ 、 $\{v_6\}$

割点为： $v_4$ 、 $v_6$

## 2.11

解：强连通图：(a)

单相连通图：(b) (c) (d)

弱连通图：(a) (b) (c) (d)

## 2.12

证明:设  $v_0v_1\dots v_k$  为  $G$  中一条最长路, 则  $v_0$  的邻接顶点一定在该路上, 否则, 与假设矛盾。现取与  $v_0$  相邻的脚标最大者, 记为  $l$ , 则  $l \geq \delta$ , 于是得圈  $v_0v_1v_2\dots v_lv_0$ , 该圈长为  $l+1$ , 显然不小于  $\delta + 1$ 。

### 2.13

证明: 证其逆否命题:  $e$  不是割边当且仅当  $e$  含在  $G$  的某个圈中。

必要性: 设  $e=xy$  不是割边。假定  $e$  位于  $G$  的某个连通分支  $G_1$  中, 则  $G_1-e$  仍连通。故在  $G_1-e$  中有  $(x,y)$  路  $P$ ,  $P+e$  便构成  $G_1$  中一个含有  $e$  的圈。

充分性: 设  $e$  含在  $G$  的某个圈  $C$  中, 而  $C$  含于某连通分支  $G_1$  中, 则  $G_1-e$  仍连通。故  $W(G-e)=W(G)$ , 这说明  $e$  不是割边, 证毕。

### 2.14

证明: 用数学归纳法证明:

(1)  $n=1$  时,  $G$  为平凡图, 显然  $G$  连通。

(2)  $n=2$  时,  $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1 = 1$  此时  $G$  为  $K_2$ , 当然连通。

(3) 假设当  $n=k$  ( $k \geq 2$ ) 时,  $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$  结论成立。

当  $n=k+1$  时, 若此时每个结点度数为  $k$ , 则结论显然成立, 否则必存在一个结点  $v$  度数至多只有  $k-1$  度, 即这个结点最多只有  $k-1$  条边和它相连。因为此时总的边数  $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$ , 则其它  $k$  个结点之间的边数  $m' \geq \frac{1}{2}k(k-1) - (k-1) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ 。根据归纳假设, 显然这  $k$  个结点之间是连通的, 而根据上面我们知道, 至少有一条边使  $v$  和其它结点相连, 所以此时这个图是连通的, 结论成立。

### 2.15

证明:

(1) 因为  $G$  连通, 且  $G$  无割边, 所以任意两个结点  $u, v$ , 都存在简单道路  $p=u \dots wv$ 。又因为  $G$  无割边, 所以, 删除边  $wv$  后, 子图依然连通, 即  $w, v$  存在简单道路  $p'$ , 以此类推, 可以找到一条和  $p$  每条边都不相同的  $p''=v \dots u$ , 这样  $p$  和  $p'$  就



构成了一条回路。

(2) 因为  $G$  中任意两个结点都位于同一回路中，所以任意结点  $u$  和任意边  $e$  的两个端点  $v_1, v_2$  都分别在两个回路  $C_1, C_2$  中，如果  $C_1 = C_2 = u \cdots v_1 \cdots v_2 \cdots u$ ，那么将回路中  $v_1 \cdots v_2$  用  $v_1 v_2 = e$  替换，就得到新的新的回路，并满足要求。如果  $C_1 \neq C_2$ ， $C_1 = u \cdots v_1 \cdots u$ ， $C_2 = u \cdots v_2 \cdots u$ ，那么构成新的道路  $P = u \cdots v_1 \cdots u \cdots v_2 \cdots u$ ，在其中将重复边剔出掉，得到新的回路  $C_3$ ，其中包含  $v_1, v_2$  结点，可以将回路中  $v_1 \cdots v_2$  用  $v_1 v_2 = e$  替换，就得到新的新的回路，并满足要求。

(3) 对任意两条边  $e_1, e_2$  其端点分别为  $u_1, u_2, v_1, v_2$ 。根据(2)存在回路  $C_1 = u_1 \cdots v_1 v_2 \cdots u_1$ ， $C_2 = u_2 \cdots v_1 v_2 \cdots u_2$ 。那么可以形成新的闭道路  $P = u_1 \cdots v_1 v_2 \cdots u_2 \cdots v_1 v_2 \cdots u_1$ ，在其中将重复边剔出到，得到新的回路  $C_3$ ，其中包含  $e_2$  和  $u_1, u_2$  结点，可以将回路中  $u_1 \cdots u_2$  用  $u_1 u_2 = e_1$  替换，就得到新的新的回路，包含  $e_1, e_2$ ，满足要求。

(4) 因为任意两条边都在同一回路中，所以不存在割边。假设边  $e$  是割边，那么删除此边，图不连通，分支中的任何一对不在同一分支中的边，不能构成回路，与条件矛盾。所以， $G$  中无割边。

## 2.16

解：(1)  $\deg(v_1) = 2$ 、 $\deg(v_2) = 3$

(2) 否 (3) 4

(4) 略

## 2.17

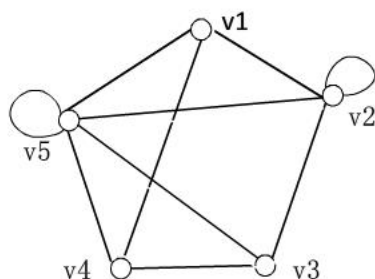
解：(1)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2)  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$   $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

V1 到 V4 长度为 1、2、3、4 的路各有 1、1、2、3 条。

## 2.18

解：无向图 G:



可达矩阵  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  有可达矩阵可知改图为强连通图。

## 2.19

解：

(1) 邻接矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) G 中长度为 3 的通路有 23 条，其中有 7 条为回路。

(3) 图 G 为强连通图

## 2.20

解：邻接矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

关联矩阵  $M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## 2.21

解: (1)当  $r=1$  时, 没有长度大于等于 1 的圈。

当  $2 \leq r \leq s$  时, 有长度为  $4, 6, \dots, 2r$  的圈, 它们都是偶圈, 因而非同构的圈共有  $r-1$  种。

(2)至多有  $r$  个顶点彼此不相邻。

(3)至多有  $r$  条边彼此不相邻。

(4) $k=\lambda=r$

## 2.22

证明: 反证法。

若存在某个具有奇数个面, 且每个面均有奇数条棱的多面体  $V$ , 不妨设  $V$  有  $r$  ( $r$  为奇数) 个面, 设为  $R_1, R_2, \dots, R_r$ ,  $S_1, S_2, \dots, S_r$  分别为它们的棱数, 均为奇数。作无向图  $G$  如下: 在  $V$  的每个面中放一个顶点  $v_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ , 且两个面  $R_i$  与  $R_j$  有公共面就连边。若存在这样的无向图  $G$ , 则  $d(v_i)$  均为奇数  $S_i$ , 由握手定理得

$$\sum_{i=1}^r d(v_i) = \sum_{i=1}^r S_i = 2m (m \text{ 为边数})$$

但因  $r, S_i (i=1, 2, \dots, r)$  均为奇数, 上面等式不可能成立。故不存在这样的无向图  $G$ , 从而也不存在满足要求的多面体。

## 2.23

解: 设  $G$  是  $n$  阶  $m$  条边的自补图, 即  $G$  为  $n$  阶  $m$  条边的简单图, 且  $G \cong \overline{G}$ 。

于是,  $\overline{G}$  的边数  $m'=m$ , 且  $m+m'=2m=n(n-1)/2$ 。于是  $n(n-1)=4m$ , 因而  $n=4k$ , 或  $n-1=4k$ ,  $k$  为正整数。

## 2.24

证明:  $\forall v \in V(G) = V(\overline{G}) = V(K_n)$

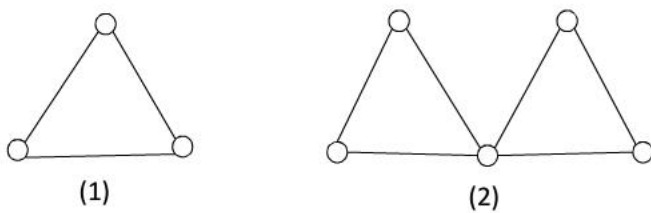
$$d_{\overline{G}}(v) + d_G(v) = d_{K_n}(v) = n - 1 \text{ 为偶数}(n \text{ 为奇数}).$$

于是, 若  $d_{\overline{G}}(v)$  为奇数, 必有  $d_G(v)$  也为奇数。

故  $\overline{G}$  与  $G$  中奇度顶点个数相等。

### 2.25

解: 都可以实现, 如下图



### 2.26

解: (1)错误、(2)正确、(3)正确

### 2.27

略

### 2.28

解: 无向完全图  $K_n$  当  $n \geq 3$  且  $n$  为奇数时才是欧拉图。

当  $n > 3$  且  $n$  为偶数时存在欧拉路而不存在欧拉回路。

2.29 略

2.30 略

2.31 略

## 第 3 章 树与最短路径

### 3.1

该树的结点个数  $n=5$ ，故边数  $m=n-1=4$ ，因为  $2m = \sum_{i=1}^n \deg(v_i)$ ，所以 5 个结点分配的

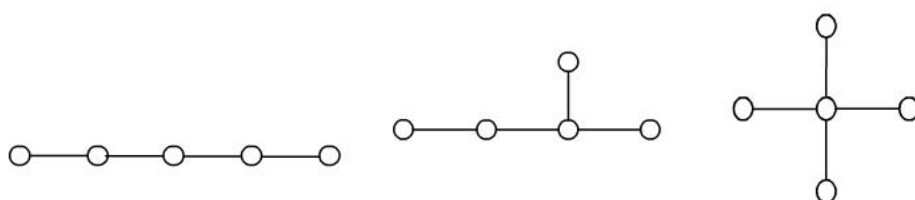
度数为 8，由于树是简单连通图，知  $1 \leq \deg(v) \leq 4$ ，则该树的度数序列必是下列情况之一，

(1) 1, 1, 2, 2, 2

(2) 1, 1, 1, 2, 3

(3) 1, 1, 1, 1, 4

这些度数序列对应的简单树为



### 3.2

该树的结点个数为  $|V|$ ，则边数  $m = |V| - 1$ ，又因为  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = 2(|V| - 1)$ ，所以

可知一棵树的结点个数之和为  $2(|V| - 1)$ 。

### 3.3

设有  $n$  个一度结点，则结点个数  $= 3 + 5 + 8 + n$ ，边数为  $= 3 + 5 + 8 + n - 1$ ，则

$$2 \times 3 + 5 \times 3 + 8 \times 4 + n = 2(3 + 5 + 8 + n) \text{ 可得 } n = 23.$$

### 3.4

设有  $n$  个一度结点，边数： $n + n_2 + n_3 + \dots + n_k - 1$ ，度数： $n + 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k$  则：

$$2(n + n_2 + n_3 + \dots + n_k - 1) = n + 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k$$

$$n = n_3 + 2n_4 + \dots + (k-2)n_k + 2$$

### 3.5

反证法。假设没有结点度数大于等于 3 的结点，则只有度为 1 的结点 3 个和度为 2 的结点  $n$  个。边数： $3 + n - 1$ ，度数： $3 + 2n$ 。所以  $2(3 + n - 1) = 3 + 2n$ 。等式左边为偶数，右边为奇数，相互矛盾，假设不成立。所以至少有一个结点度数大于等于 3。

### 3.6

设度为  $2, 3, \dots, k$  的结点个数为  $n_2, n_3, \dots, n_k$  则

$$2(2+n_2+n_3+\dots+n_k-1) = 2+2n_2+3n_3+\dots+kn_k$$

则  $n_3+2n_4+\dots+(k-2)n_k=0$  由于  $n_2, n_3, \dots, n_k \geq 0$ , 故  $n_2, n_3, \dots, n_k$  全为 0.

当  $n_2=0$  时, 只有两个度为 1 的结点, 所以  $T$  是一条直线。

当  $n_2 \neq 0$  时, 有两个度为 1 的结点, 其他结点度数都为 2,  $T$  仍为一条直线。

综上  $T$  是一条直线。

### 3.7

$\Rightarrow$  若  $(d_1 d_2 \dots d_n)$  为度数序列, 则该树的结点个数为  $n$ , 边数为  $n-1$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n-1)$$

$\Leftarrow$  若  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n-1)$ , 则该树的结点为  $n$ , 且结点度数依次为  $d_1 d_2 \dots d_n$ 。

即  $(d_1 d_2 \dots d_n)$  是一棵树的度数序列。

### 3.8 证明

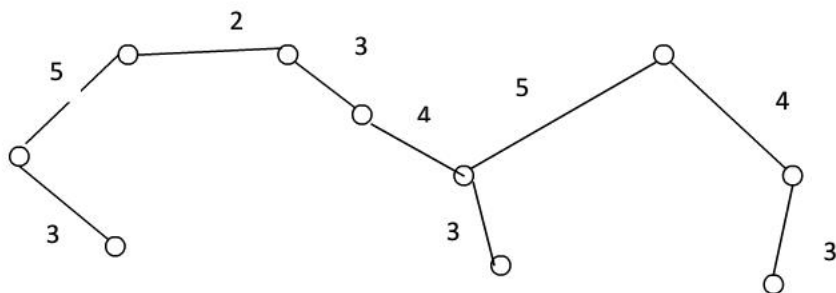
假设  $v_1$  中没有树叶, 则  $\deg(v_1) \geq 2|v_1|$ ,  $v_1 v_2$  是二部图结点分类, 且  $v_1$  中顶点的出度最少为 2, 则  $\deg(v_1) \leq 2|v_2|$ , 可得  $|v_2| \geq |v_1|$  与题中给的  $|v_2| \leq |v_1|$  相矛盾。所以  $v_1$  中至少有一片树叶。

### 3.9

$T$  是一棵树, 则  $T$  中任意两个结点之间有且仅有一条路, 所以  $T$  中任意两点仅有唯一的简单通路, 反之亦成立。

### 3.10

Kruskal 算法可求得如下最小生成树:



### 3.11

证明:因为  $G$  为连通图  $v \in V$  且  $\deg(v)=1$ , 所以结点  $v$  的关联边只有一条。又因为  $G$  的任何一棵生成树  $T$  必为  $G$  的生成子图且连通, 即  $T$  包含  $G$  的所有结点且连通, 而  $v$  的关联边只有  $e$  一条边, 故  $e$  一定是任何一棵树的枝。

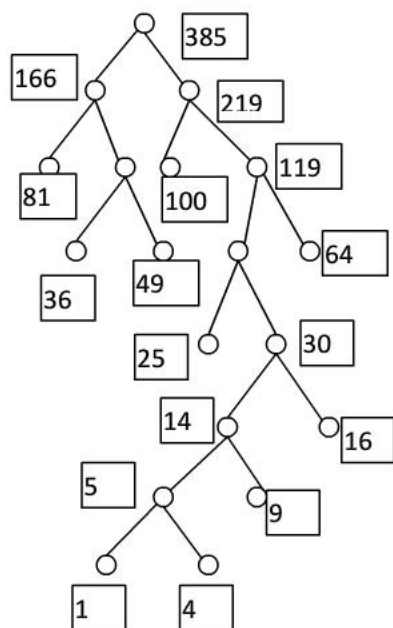
### 3.12

证明: 如果简单连通图  $G$  无回路, 则  $G$  本身就是生成树。即  $G$  的任何一条边都可以是某一生成树的枝。若  $G$  中有回路, 则去掉任意一条边, 则图仍连通, 若图中仍有回路, 重复上述过程知道图中无回路为止。去掉的边不一样, 则得到的生成树不一样, 又因为去边是在回路中任意去掉的一条边, 所以  $G$  中任一条边都可以是某一生成树的枝。

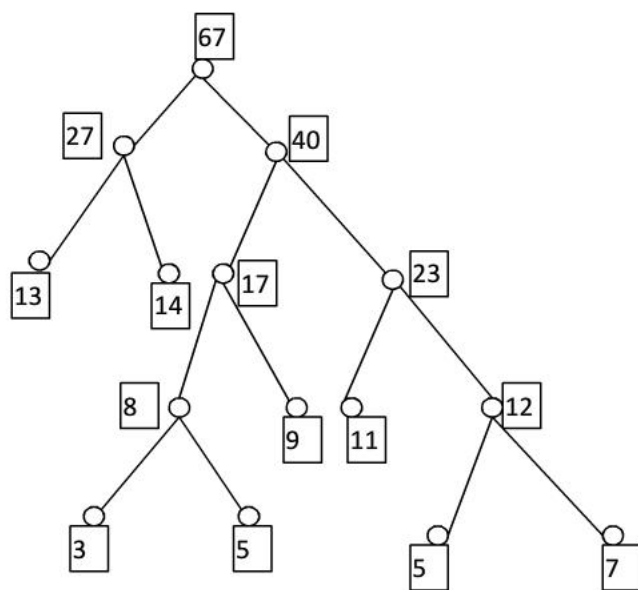
### 3.13

正则二叉树为完全二叉树且所有叶结点在同一层。因为完全二叉树的分支节点的出度都是 2, 则可知除根节点外, 其他每层上的结点个数都为偶数, 故一棵正则二叉树必有奇数个结点。

### 3.14



3.15



3.16

0 次迭代	$l(u_0) = 0$ $l(u_1) = \dots = l(u_7) = \infty$ $s = \emptyset$
1 次迭代	$u = u_0, s = \{u_0\}$



	$l(u_0) + w(u_0, u_1) = 1 < l(u_1)$ $l(u_0) + w(u_0, u_2) = 2 < l(u_2)$ $l(u_0) + w(u_0, u_3) = \infty$ $l(u_0) + w(u_0, u_4) = 7 < l(u_4)$ $l(u_0) + w(u_0, u_5) = \infty$ $l(u_0) + w(u_0, u_6) = 4 < l(u_6)$ $l(u_0) + w(u_0, u_7) = 8 < l(u_7)$
	$l(u_1) = 1, l(u_2) = 2, l(u_3) = \infty, l(u_4) = 7, l(u_5) = \infty, l(u_6) = 4, l(u_7) = 8$
2 次迭代	$u = u_1, s = \{u_0, u_1\}$
	$l(u_1) + w(u_1, u_2) = 3 > l(u_2)$ $l(u_1) + w(u_1, u_3) = 4$ $l(u_1) + w(u_1, u_4) = \infty > l(u_4)$ $l(u_1) + w(u_1, u_5) = \infty$ $l(u_1) + w(u_1, u_6) = \infty > l(u_6)$ $l(u_1) + w(u_1, u_7) = 8 = l(u_7)$
	$l(u_2) = 2, l(u_3) = 4, l(u_4) = 7, l(u_5) = \infty, l(u_6) = 4, l(u_7) = 8$
3 次迭代	$u = u_2, s = \{u_0, u_1, u_2\}$
	$l(u_2) + w(u_2, u_3) = 3 < l(u_3)$ $l(u_2) + w(u_2, u_4) = 7 = l(u_4)$ $l(u_2) + w(u_2, u_5) = \infty$ $l(u_2) + w(u_2, u_6) = \infty > l(u_6)$ $l(u_2) + w(u_2, u_7) = \infty > l(u_7)$
	$l(u_3) = 3, l(u_4) = 7, l(u_5) = \infty, l(u_6) = 4, l(u_7) = 8$
4 次迭代	$u = u_3, s = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$
	$l(u_3) + w(u_3, u_4) = 6 < l(u_4)$ $l(u_3) + w(u_3, u_5) = 9 < l(u_5)$ $l(u_3) + w(u_3, u_6) = \infty > l(u_6)$ $l(u_3) + w(u_3, u_7) = \infty > l(u_7)$
	$l(u_4) = 6, l(u_5) = 9, l(u_6) = 4, l(u_7) = 8$
5 次迭代	$u = u_6, s = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_6\}$

	$l(u_6) + w(u_6, u_4) = 7 > l(u_4)$ $l(u_6) + w(u_6, u_5) = 10 > l(u_5)$ $l(u_6) + w(u_6, u_7) = 6 < l(u_7)$
	$l(u_4) = 6, l(u_5) = 9, l(u_7) = 6$
6 次迭代	$u = u_4, s = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_6, u_4\}$
	$l(u_4) + w(u_4, u_5) = 10 > l(u_5)$ $l(u_4) + w(u_4, u_7) = \infty > l(u_7)$
	$l(u_5) = 9, l(u_7) = 6$
7 次迭代	$u = u_7, s = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_6, u_4, u_7\}$
	$l(u_7) + w(u_7, u_5) = 10 > l(u_5)$
	$l(u_5) = 9$
结束	$u = u_5, s = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_6, u_4, u_7, u_5\}$

$u_0$  到各结点的最短路径为:

$$u_0 \rightarrow u_1 \quad l = 1$$

$$u_0 \rightarrow u_2 \quad l = 2$$

$$u_0 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \quad l = 3$$

$$u_0 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_4 \quad l = 6$$

$$u_0 \rightarrow u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow u_5 \quad l = 9$$

$$u_0 \rightarrow u_6 \quad l = 4$$

$$u_0 \rightarrow u_6 \rightarrow u_7 \quad l = 6$$

**3.17**

$v_1 \rightarrow v_2$  1  
 $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_3$  3     $v_2 \rightarrow v_3$  4  
 $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4$  5     $v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$  6  
 $v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5$  7     $v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5$  8  
 $v_1 \rightarrow v_6$  2     $v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6$  3  
 $v_3 \rightarrow v_4$  2  
 $v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$  5     $v_4 \rightarrow v_5$  3  
 $v_3 \rightarrow v_6$  1     $v_4 \rightarrow v_6$  3  
 $v_5 \rightarrow v_6$  5

### 3.18

$v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow v_8$   $l=13$

### 3.19

解：图中有两个奇点 E,F。取一条连接 EF 的路 EGF，添加重复边 (E, G) 和 (G, F)，经检验可得满足定理的条件，即为最优方案,其最优回路:DBACBEGEDFGFCD.

### 3.20

最邻近算法：

acedba 37    bdecab 37    cedbac 37    dbeacd 36

最短哈密顿回路为：dbeacd

最邻近插入法：

aa

aca

acea

acdea

abcdea acbdea acdbea acdeba 其权值分别为：52，40，36，43

最短哈密顿回路为：acdbea

## 第五章 独立集、支配集与匹配

### 5.1

证明： $\Rightarrow$ 由 G 是二部图可知，其子图 H 也是二部图，显然二部图的顶点划分 (X, Y) 中的 X, Y 均是二部图的独立集，则有  $\alpha(H) \geq \max\{|X(H)|, |Y(H)|\} \geq \frac{V(H)}{2}$ ,

其中  $v(H)$  是子图 H 的顶点数， $\alpha(H)$  是图 H 的最大独立集中具有的点的数目。

⇐ 反证法：若  $G$  不是二部图，则  $G$  含有奇圈  $H$ ， $H$  是  $G$  的子图，但

$$\alpha(H) = \frac{v(H)-1}{2} < \frac{v(H)}{2}, \text{ 这与已知条件矛盾，故 } G \text{ 是二部图。}$$

## 5.2

证明：⇒  $G$  是二部图，则其子图  $H$  也是二部图，因为  $\alpha(H) = \frac{1}{2}|v(H)|$ ，故对子图  $H$  有  $v_1 = \frac{1}{2}|v(H)|, v_2 = \frac{1}{2}|v(H)|$ ，则必有一个匹配关联  $G$  中所有结点，故  $G$  有一个完美匹配。

⇐  $G$  有一个完美匹配，则子图  $H$  也有完美匹配，故该匹配关联  $H$  的所有结点，所以  $\alpha(H) = \frac{1}{2}|v(H)|$ 。

## 5.3

(1)  $G$  中极小支配集为  $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\}$ ，支配数 2。

(2)  $G$  中极小点覆盖集为  $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\}$ ，点覆盖数 2。

(3)  $G$  中极大点独立集为  $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\}$ ，点独立数 3。

(4)  $G$  中极大匹配为  $\{a, c\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{e, c\}, \{e, d\}$ ，匹配数 2。

(5)  $G$  中极小边覆盖集为  $\{a, b, f\}, \{a, e, c\}, \{b, e, d\}, \{d, c, e\}, \{d, f, b\}, \{c, f, a\}$ ，边覆盖数 3。

## 5.4

证明： $G$  是二分图，并且  $\delta(G) > 0$  则  $\eta + \theta = \alpha + \beta$ ，又  $\eta = \beta$ ，故  $\alpha = \theta$ 。

## 5.5

(a) 极小点覆盖  $\{a, c, e, g\}, \{b, c, d, e, g\}, \{b, d, e, f\}, \{b, c, d, f\}$

极大独立集  $\{b, d, f\}, \{a, f\}, \{a, c, g\}, \{a, e, g\}$

最小点覆盖  $\{a, c, e, g\}, \{b, d, e, f\}, \{b, c, d, f\}$

最大独立集  $\{b, d, f\}, \{a, c, g\}, \{a, e, g\}$

(b) 极小点覆盖  $\{b, c, e, f\}, \{b, c, d, f\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}$

极大独立集  $\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, f\}$

最小点覆盖  $\{b, c, e, f\}, \{b, c, d, f\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}$

最大独立集  $\{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, f\}$

## 5.6

## 5.7

$$(1) \alpha(K_n) = 1$$

$$(2) \alpha(K_{m,n}) = \max(m, n)$$

## 5.8

证明：设  $M$  为树的一个完美匹配，则满足：(1)  $T$  的所有点均为  $M$  饱和点，且与所有叶子结点关联的边均在  $T$  的任意一个匹配里。(2)  $T$  的顶点数  $n=2|M|$  为偶数，而  $T$  的边数  $m=2n-1=2|M|-1$  为奇数。

反证：设  $M_1$  和  $M_2$  都是树的完美匹配，并且他们是不同的，则  $M_1 \oplus M_2 \neq \emptyset$ ，

设  $M_1 \oplus M_2$  导出子图为  $H$ 。由于  $M_1$  和  $M_2$  都是  $T$  的完美匹配，则  $H$  中定点的度均为 2，所以  $H$  中存在圈，这与  $T$  是树相矛盾。故树至多有一个完美匹配。

## 5.9

(1) 归纳法

$n=1$  时完美匹配数是 1

$n=2$  时完美匹配数是 3，满足  $(2n-1)!!$

设当  $n=k$  时，完美匹配数是  $(2k-1)!!$ ，

当  $n=k+1$  时，即向  $k_{2n}$  中加入两点  $u, v$ ，则多出  $4k+1$  条边，(1) 取  $k_{2n}$  的一个完美匹配  $M_1$ ，则只加入边  $uv$  有  $M_1'$  为  $k_{2k+2}$  的一个完美匹配，无妨设

$u_1u_2, u_3u_4 \cdots u_{2k-1}u_{2k}$  为  $M_1$  中的边 (2) 则去掉  $u_1u_2$  添加  $u_1u, u_2v$  有另一个  $k_{2k+2}$  的完

美匹配  $M_1''$  添加  $u_1v, u_2u$  有另一个  $k_{2k+2}$  的完美匹配  $M_1'''$ 。(3) 对  $u_3u_4 \cdots u_{2k-1}u_{2k}$  同

样的操作则共有  $2k$  种设法，算上  $M_1'$  共有  $2k+1$  种，(4) 不同完美匹配有  $(2k-1)!!$

每一种均可增加为  $2k+1$ ，所以  $k_{2n}$  不同完美匹配有  $(2k+1)(2k-1)!! = (2k+1)!!$

种，得证。

(2) 对于  $k_{m,n}$  有  $n!$  种完美匹配。

5.10 利用匈牙利算法可求得最大匹配

5.11 略

5.12  $j_2 \rightarrow j_3 \rightarrow j_4 \rightarrow j_5 \rightarrow j_1 \rightarrow j_6$

### 5.13

由 Kuhn-Munkres 算法可得。

## 第六章 平面图与着色

### 6.1 略

### 6.2 略

### 6.3

由题意可得： $n=6$ ， $m=(4 \times 6)/2=12$  由欧拉公式  $n-m+r=2$  可得： $r=8$ 。

### 6.4

$n-m+r=n-30+20=2$  所以  $n=12$ 。

### 6.5

证明：反证法

假设极大平面图  $G$  是非联通的，则它至少有两个连通分支，在这两个连通分支的外部边界上各取一顶点，则这两个顶点是不相邻的，在这两个顶点之间加一条边，则所得的图还是平面图，这与  $G$  是极大平面图相矛盾，所以极大平面图一定是连通图。

### 6.6

证明：用反证法，若  $\delta(G) \leq 2$  分情况讨论。

(1)  $\delta(G)=1$ ， $G$  中存在顶点  $v_1$ ， $d(v_1)=1$  设与  $v_1$  相邻的顶点  $v$ ，并设  $v$  除与  $v_1$  相邻外还依次与  $v_2, \dots, v_s$  相邻。因  $v_1$  不与  $v_2$  相邻，加边  $\{v_1, v_2\}$  不破坏平面性，这与  $G$  为极大平面图相矛盾，所以  $\delta(G) \geq 2$ 。

(2)  $\delta(G)=2$ 。 $G$  中存在顶点  $v_1$ ，设与  $v_1$  相邻的顶点  $v$  和  $v_2$ ，这时  $v$  与  $v_2$  相邻，否则加边  $\{v_1, v_2\}$  不破坏平面性，这与  $G$  为极大平面图相矛盾，设  $v$  除与  $v_1$  和  $v_2$  相邻外，还依次与  $v_3, \dots, v_s$  相邻。在  $G$  中  $v_1$  不能与  $v_s$  相邻（因为  $d(v_1)=2$ ），加边  $\{v_1, v_s\}$  不破坏平面性，这又矛盾与  $G$  为极大平面图，所以  $\delta(G) \geq 3$ 。

### 6.7

解：因为  $G$  为极大平面图，所以  $G$  是连通的，由欧拉公式得： $r=m-n+2$  (1)

设  $G$  的平面图各面边界长度之和为  $l$ ， $G$  的平面图每个面的边界之长均为 3，所

以  $3r-l=2m$  (2)

将 (1) 代入 (2) 中可得  $m=3n-6$ .

### 6.8

证明:  $G$  为自对偶平面图, 所以  $G$  为联通平面图, 由欧拉公式:  $n-m+r=2$  (1);

自对偶图的性质可得:  $n^*=r=n$  (2); 将 (2) 式代入 (1) 式可得  $m=2n-2$ .

### 6.9

证明:  $\Rightarrow$ :  $r_i$  为  $G$  的面,  $v_i^*$  为  $G^*$  的结点,  $G$  的对偶图为  $G^*$ , 可得  $\deg(r_i) = \deg(v_i^*)$

又因为  $G^*$  为欧拉图所以  $\deg(v_i^*)$  为偶数,  $\deg(r_i)$  为偶数, 所以  $G$  的每一个面都有偶数条边围城。

$\Leftarrow$ :  $G$  的面,  $v_i^*$  为  $G^*$  的结点,  $G$  的对偶图为  $G^*$ , 可得  $\deg(r_i) = \deg(v_i^*)$ , 又因为  $G$  的每一面均有偶数条边围城, 所以  $\deg(r_i)$  为偶数, 所以  $\deg(v_i^*)$  为偶数。故  $G^*$  中所有结点的度是偶数, 无奇度结点, 所以  $G^*$  为欧拉图。

### 6.10

证明:  $G$  有  $n$  个结点  $m$  条边, 则

$$3n \leq \sum \deg(v_i) = 2m = 2(n+r-2) = 2n+2r-4, \therefore n \leq 2r-4。$$

假设每一个面的度数大于等于 5, 则

$$5r \leq \sum \deg(r_i) = 2m = 2n+2r-4 \leq 4r-8+2r-4, \text{ 整理得 } r \geq 12, \text{ 这与题目给出的 } r < 12 \text{ 相矛盾, 故假设不成立, 即至少有一个面的度数小于 } 5。$$

### 6.11

证明: 假设  $G$  和  $\bar{G}$  都是平面图, 则对图  $G$  可得  $m \leq 3n-6$  (1)

$$\text{对图 } \bar{G} \text{ 可得 } \frac{n(n-1)}{2} - m \leq 3n-6 \text{ (2); 整理 (1) 式和 (2) 式得: } n^2 - 13n + 24 \leq 0,$$

又因为  $n \geq 11$ , 故  $n^2 - 13n + 24 \geq 2$ , 这与  $n^2 - 13n + 24 \leq 0$  相矛盾, 故假设不成立,

即  $G$  和  $\bar{G}$  至少有一个是非平面图。

### 6.12

证明(1)由于  $G$  无割点所以  $G$  肯定无割边, 且每两个面之间最多有一条公共边,

所以  $G^*$  是简单图，因此  $G^*$  中至少有两个度相同的顶点，即  $G$  中至少有两个面相同的度数。

(2) 设  $G$  中有  $k$  个度为 5 的面， $\therefore \sum d(f) = 2m \therefore 5k + 6(r - k) \leq 2m \therefore k \geq 6r - 2m$ ,

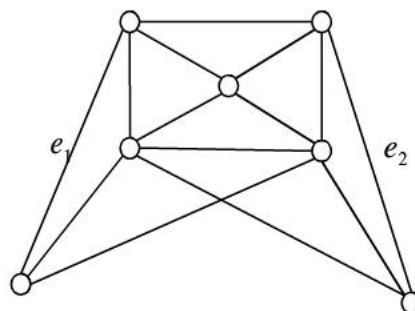
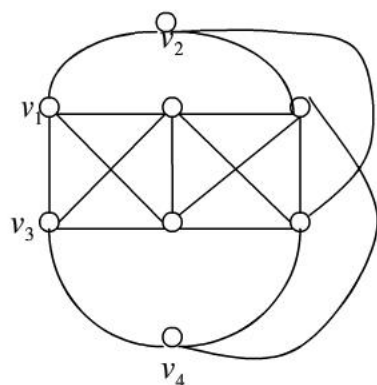
又因为  $G^*$  为简单平面图  $\therefore m \leq 3r - 6, \therefore k \geq 6r - 2m \geq 6r - 2(3r - 6) = 12$ ，所以  $G$  中至少有 12 个这样的面。

**6.13** 没做出来

**6.14**

证明：  $n=15$ ，  $m = (32+36+8)/2=38$ ，  $3n-6=45-6=39$  没做出来感觉题有问题

**6.15**

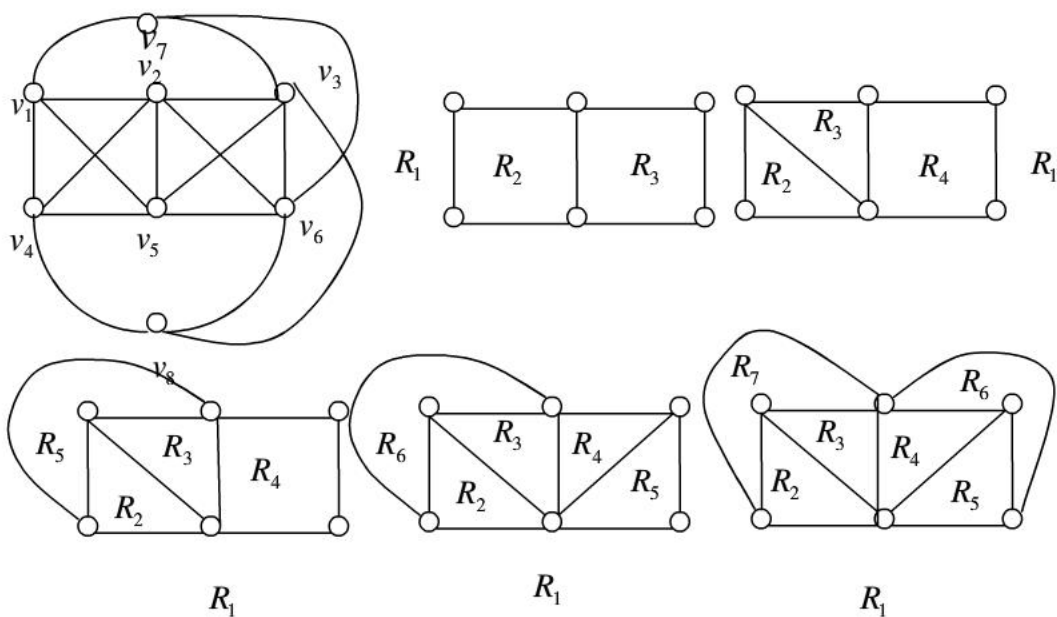


(1) 收缩边  $(v_1, v_2)(v_3, v_4)$ ，所得图中存在与  $K_{3,3}$  同胚的子图，故为非平面图。

(2) 收缩边  $e_1, e_2$  得到  $K_5$ ，故该图为非平面图。

**6.16**

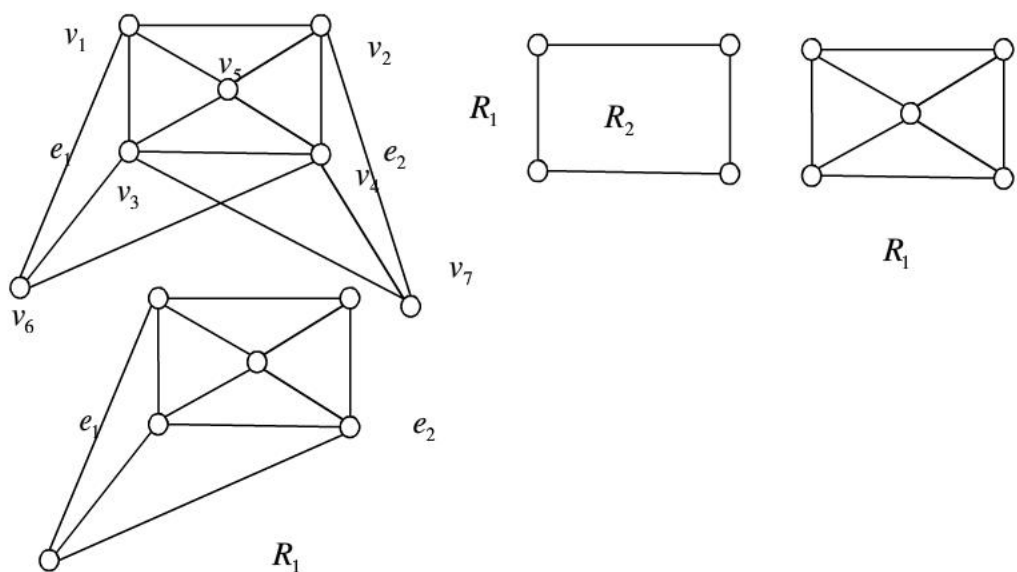




$\tilde{G}$	面的个数	片 B	$F_G(B, \tilde{G}_i)$	选取的片 B	选取的面	加入的回路
$\tilde{G}_1$	2	$B_1$ $B_2$ $B_3$ $B_4$ $B_5$ $B_6$ $B_7$	$(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$	$B_1$	$R_2$	$(v_2, v_5)$
$\tilde{G}_2$	3	$B_2$ $B_3$ $B_4$ $B_5$ $B_6$ $B_7$	$(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_3)$ $(R_1, R_3)$ $(R_1)$ $(R_1)$	$B_2$	$R_2$	$(v_1, v_5)$
$\tilde{G}_3$	4	$B_3$ $B_4$ $B_5$ $B_6$ $B_7$	$(R_1)$ $(R_1, R_4)$ $(R_1, R_4)$ $(R_1)$ $(R_1)$	$B_3$	$R_1$	$(v_2, v_4)$

$\tilde{G}_4$	5	$B_4$ $B_5$ $B_6$ $B_7$	$(R_1, R_4)$ $(R_1, R_4)$ $(\phi)$ $(R_1)$	$B_4$	$R_4$	$(v_3, v_5)$
$\tilde{G}_5$	6	$B_5$ $B_6$ $B_7$	$(R_1)$ $(\phi)$ $(R_1)$			

所以该图是非可平面图。



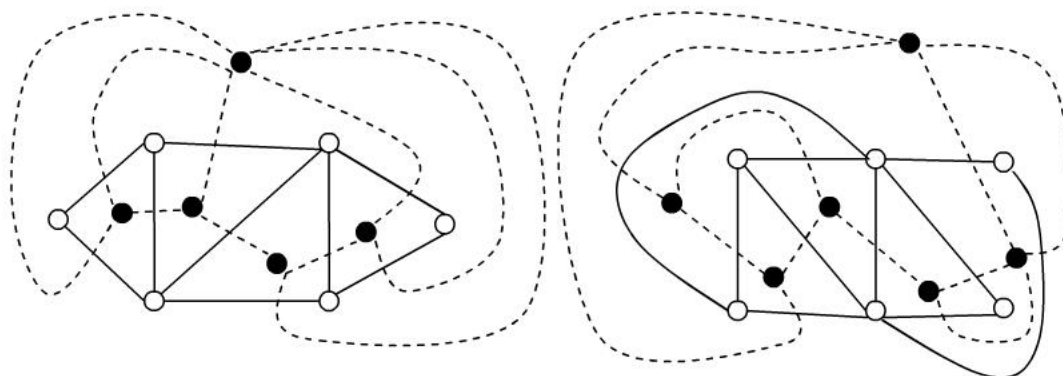
$\tilde{G}$	面的个数	片 B	$F_G(B, \tilde{G}_i)$	选取的片 B	选取的面	加入的回路
$\tilde{G}_1$	2	$B_1$ $B_2$ $B_3$	$(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$ $(R_1, R_2)$	$B_1$	$R_2$	$(v_1, v_5)$ $(v_2, v_5)$ $(v_3, v_5)$ $(v_4, v_5)$
$\tilde{G}_2$	5	$B_2$ $B_3$	$(R_1)$ $(R_1)$	$B_2$	$R_1$	$(v_1, v_6)$ $(v_3, v_6)$

						$(v_4, v_6)$
$\tilde{G}_3$	7	$B_3$	$(\phi)$			

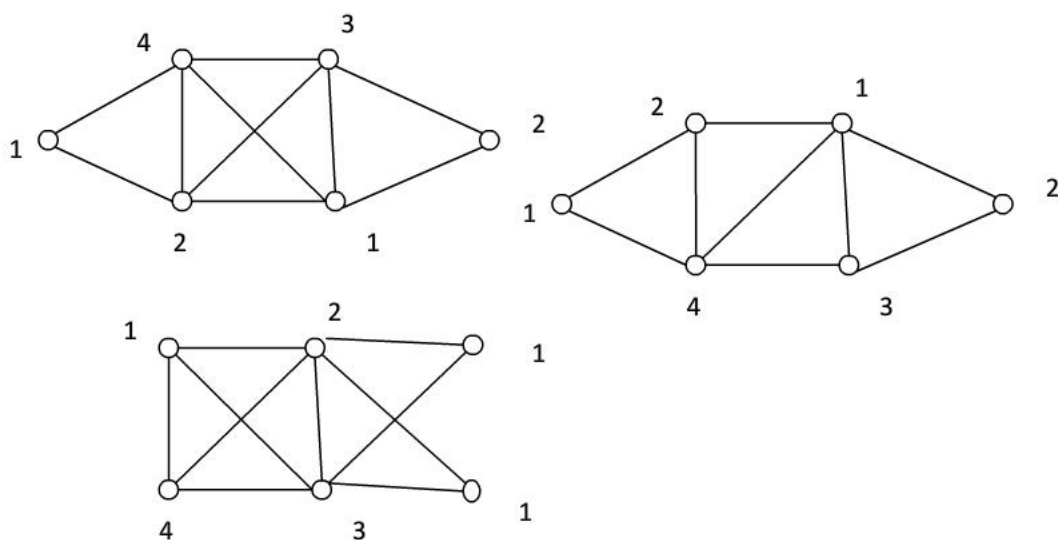
所以该图是非可平面图。

### 6.17

对偶图



### 6.18



$$\chi(a)=4, \chi(b)=4, \chi(c)=4$$

### 6.19

结点太多，需加的边也多，此题计算太麻烦，感觉不好。