

Manometer für Überdruck .	$p = 1$	6	12	kg/qcm
Halbmesser der Röhrenfeder	$r_0 = 5,50$	5,56	5,55	cm
Große Halbachse d. Ellipse .	$a = 1,138$	0,847	0,850	„
Kleine „ „ „ „	$b = 0,293$	0,243	0,241	„
Wandstärke	$h = 0,031$	0,048	0,065	„
Bogenlänge der Röhrenfeder	$\chi = 270^\circ$	270°	270°	
Aufbiegung nach Versuch .	$\Delta\chi: p = 4,575$	0,896	0,454	
„ „ Gl. (25a) .	$\Delta\chi: p = 0,982$	0,766	0,578	

Mit Rücksicht auf die nur unvollkommene Ellipsengestalt der Meridiankurven sowie auf die Verlötung der Enden, welche zweifellos die der Theorie zugrunde liegende Achsensymmetrie um ZZ beeinträchtigt, kann man die Abweichungen der berechneten und gefundenen Aufbiegungen an der 6 kg- und 12 kg-Röhrenfeder als zulässig hinnehmen, zumal sie entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Bei der schwachen 1 kg Feder dagegen reicht dies zur Erklärung einer 4,8fachen Aufbiegung jedenfalls nicht aus, so daß man hierfür auf die strengere Formel (18) zurückgreifen müßte. Außerdem ist es nicht unwahrscheinlich, daß in diesem Falle die Doppelsymmetrie bei der Formänderung verloren gegangen ist, ein Umstand, dem man in Gl. (8) näherungsweise durch Hinzufügung eines oder mehrerer Terme mit geraden Vielfachen von φ genügen könnte.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.

(Eingegangen 26. Februar 1917.)

Zur Quantentheorie der Strahlung.

Von A. Einstein¹⁾.

Die formale Ähnlichkeit der Kurve der chromatischen Verteilung der Temperaturstrahlung mit Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz ist so frappant, als daß sie lange hätte verborgen bleiben können. In der Tat wurde bereits W. Wien in der wichtigen theoretischen Arbeit, in welcher er sein Verschiebungsgesetz

$$\rho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (1)$$

ableitete, durch diese Ähnlichkeit auf eine weitergehende Bestimmung der Strahlungsformel geführt. Er fand hierbei bekanntlich die Formel

$$\rho = c \cdot \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (2)$$

welche als Grenzesetz für große Werte von $\frac{\nu}{T}$ auch heute als richtig anerkannt wird (Wien-

sche Strahlungsformel). Heute wissen wir, daß keine Betrachtung, welche auf die klassische Mechanik und Elektrodynamik aufgebaut ist, eine brauchbare Strahlungsformel liefern kann, sondern daß die klassische Theorie notwendig auf die Rayleighsche Formel

$$\rho = \frac{k\alpha}{h} \nu^2 T \quad (3)$$

führt. Als dann Planck in seiner grundlegenden Untersuchung seine Strahlungsformel

$$\rho = c \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (4)$$

auf die Voraussetzung von diskreten Energie-Elementen gegründet hatte, aus welcher sich in rascher Folge die Quantentheorie entwickelte, geriet jene Wiensche Überlegung, welche zur Gleichung (2) geführt hatte, naturgemäß wieder in Vergessenheit.

Vor kurzem nun fand ich eine der ursprünglichen Wienschen Betrachtung¹⁾ verwandte, auf die Grundvoraussetzung der Quantentheorie sich stützende Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, in welcher die Beziehung der Maxwellschen Kurve zu der chromatischen Verteilungskurve zur Geltung kommt. Diese Ableitung verdient nicht nur wegen ihrer Einfachheit Beachtung, sondern besonders deshalb, weil sie über den für uns noch so dunklen Vorgang der Emission und Absorption der Strahlung durch die Materie einige Klarheit zu bringen scheint. Indem ich einige vom Standpunkte der Quantentheorie naheliegende Hypothesen über die Strahlungs-Emission und -Absorption von Molekülen zugrunde legte, zeigte ich, daß Moleküle mit im Sinne der Quantentheorie bei Temperaturgleichgewicht verteilten Zuständen, im dynamischen Gleichgewicht mit Planckscher Strahlung stehen; es ergab sich auf diesem Wege die Plancksche Formel (4) in verblüffend einfacher und allgemeiner Weise. Sie ergab sich aus der Bedingung, daß die von der Quantentheorie geforderte Zustandsverteilung der inneren Energie der Moleküle allein durch Absorption

¹⁾ Zuerst abgedruckt in den Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich, Nr. 18, 1916.

¹⁾ Verh. d. Deutschen physikal. Gesellschaft Nr. 13/14, 1916, S. 318. In der vorliegenden Untersuchung sind die der eben zitierten Abhandlung gegebenen Überlegungen wiederholt.

und Emission von Strahlung sich einstellen muß.

Wenn die eingeführten Hypothesen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie das Richtige treffen, so müssen sie aber noch mehr liefern als die richtige statistische Verteilung der inneren Energie der Moleküle. Bei Absorption und Emission von Strahlung findet nämlich auch eine Impuls-Übertragung auf die Moleküle statt; diese führt dazu, daß sich durch die bloße Wechselwirkung von Strahlung und Molekülen eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung der letzteren einstellt. Diese muß offenbar dieselbe sein wie diejenige Geschwindigkeitsverteilung, welche die Moleküle bei alleiniger Wirkung gegenseitiger Zusammenstöße annehmen, d. h. sie muß mit der Maxwell'schen Verteilung übereinstimmen. Es muß gefordert werden, daß die mittlere kinetische Energie, welche ein Molekül (pro Freiheitsgrad) im Planckschen Strahlungsfelde von der Temperatur T annimmt, gleich $\frac{kT}{2}$ sei; dies muß gelten unabhängig von der Natur der betrachteten Moleküle und unabhängig von den von ihnen absorbierten und emittierten Frequenzen. In dieser Abhandlung wollen wir dartun, daß dieser weitgehenden Forderung in der Tat ganz allgemein genügt wird; dadurch erhalten unsere einfachen Hypothesen über die Elementarvorgänge der Emission und Absorption eine neue Stütze.

Damit das genannte Resultat sich ergebe, bedarf es aber einer gewissen Ergänzung der früher zugrunde gelegten Hypothesen, welche sich lediglich auf den Austausch der Energie bezogen. Es entsteht die Frage: Erhält das Molekül einen Stoß, wenn es die Energie ϵ absorbiert oder emittiert? Betrachten wir vom Standpunkt der klassischen Elektrodynamik beispielsweise die Ausstrahlung. Wenn ein Körper die Energie ϵ ausstrahlt, so erhält er den Rückstoß (Impuls) $\frac{\epsilon}{c}$, wenn die ganze Strahlungsmenge ϵ nach der gleichen Richtung ausgestrahlt wird. Erfolgt aber die Ausstrahlung durch einen räumlich symmetrischen Vorgang, z. B. Kugelwellen, so kommt überhaupt kein Rückstoß zustande. Diese Alternative spielt auch bei der Quantentheorie der Strahlung eine Rolle. Nimmt ein Molekül beim Übergang von einem quantentheoretisch möglichen Zustand in einen andern die Energie ϵ in Form von Strahlung auf, oder gibt es hierbei die Energie in Form von Strahlung ab, so kann ein derartiger Elementarprozeß als ein teilweise oder vollständig räumlich gerichteter oder auch als ein symme-

trischer (nicht gerichteter) gedacht werden. Es zeigt sich nun, daß wir nur dann zu einer widerspruchsfreien Theorie gelangen, wenn wir jene Elementarprozesse als vollständig gerichtete Vorgänge auffassen; hierin liegt das Hauptergebnis der nachfolgenden Betrachtungen.

§ 1. Grundhypothese der Quantentheorie. Kanonische Zustandsverteilung.

Nach der Quantentheorie vermag ein Molekül bestimmter Art, abgesehen von seiner Orientierung und Translationsbewegung, nur eine diskrete Reihe von Zuständen $Z_1, Z_2 \dots Z_n \dots$ anzunehmen, deren (innere) Energie $\epsilon_1, \epsilon_2 \dots \epsilon_n \dots$ sei. Gehören Moleküle dieser Art einem Gas von der Temperatur T an, so ist die relative Häufigkeit W_n dieser Zustände Z_n durch die der kanonischen Zustandsverteilung der statistischen Mechanik entsprechende Formel

$$W_n = p_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \quad (5)$$

gegeben. In dieser Formel ist $k = \frac{R}{N}$ die be-

kannte Boltzmann'sche Konstante, p_n eine für das Molekül und den n -ten Quantenzustand desselben charakteristische, von T unabhängige Zahl, die als das statistische „Gewicht“ dieses Zustandes bezeichnet werden kann. Die Formel (5) kann aus dem Boltzmann'schen Prinzip oder auf rein thermodynamischem Wege abgeleitet werden. Die Gleichung (5) ist der Ausdruck der weitgehendsten Verallgemeinerung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten.

Die letzten prinzipiellen Fortschritte der Quantentheorie beziehen sich auf die theoretische Ermittlung der quantentheoretisch möglichen Zustände Z_n und deren Gewichte p_n . Für die vorliegende prinzipielle Untersuchung ist eine nähere Bestimmung der Quantenzustände nicht erforderlich.

§ 2. Hypothesen über den Energieaustausch durch Strahlung.

Es seien Z_n und Z_m zwei im Sinne der Quantentheorie mögliche Zustände des Gasmoleküls, deren Energien ϵ_n bzw. ϵ_m die Ungleichung

$$\epsilon_m > \epsilon_n$$

erfüllen. Das Molekül möge imstande sein, aus dem Zustande Z_n in den Zustand Z_m überzugehen unter Aufnahme der Strahlungsenergie $\epsilon_m - \epsilon_n$; ebenso sei ein Übergang aus dem Zustande Z_m in den Zustand Z_n unter Abgabe dieser Strahlungsenergie möglich. Die hierbei vom Molekül aufgenommene oder abgegebene

Strahlung sei von der für die betrachtete Index-Kombination (m, n) charakteristischen Frequenz ν .

Über die Gesetze, welche für diesen Übergang maßgebend sind, führen wir einige Hypothesen ein, welche durch Übertragung der für einen Planckschen Resonator nach der klassischen Theorie bekannten Verhältnisse auf die noch unbekannten der Quantentheorie gewonnen sind.

a) Ausstrahlung. Ein in Schwingung befindlicher Planckscher Resonator strahlt nach Hertz in bekannter Weise Energie aus, unabhängig davon, ob er durch ein äußeres Feld angeregt wird oder nicht. Dementsprechend möge ein Molekül aus dem Zustande Z_m unter Emission der Strahlungs-Energie $\epsilon_m - \epsilon_n$ von der Frequenz ν ohne Anregung durch äußere Ursachen in den Zustand Z_n übergehen können. Die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß dies im Zeitelement dt wirklich stattfindet, sei,

$$dW = A_m^n dt, \quad (A)$$

wobei A_m^n eine für die betrachtete Indexkombination charakteristische Konstante bedeutet.

Das angenommene statistische Gesetz entspricht dem einer radioaktiven Reaktion, der vorausgesetzte Elementarprozeß einer derartigen Reaktion, bei welcher nur γ -Strahlen emittiert werden. Es braucht nicht angenommen zu werden, daß dieser Vorgang keine Zeit beanspruche; diese Zeit muß nur vernachlässigbar sein gegenüber den Zeiten, in denen das Molekül in den Zuständen Z_1 usw. ist.

b) Einstrahlung. Befindet sich ein Planckscher Resonator in einem Strahlungsfelde, so ändert sich die Energie des Resonators dadurch, daß das elektromagnetische Feld der Strahlung auf den Resonator Arbeit überträgt; diese Arbeit kann je nach den Phasen des Resonators und des oszillierenden Feldes positiv oder negativ sein. Dementsprechend führen wir die folgende quantentheoretische Hypothese ein. Unter der Wirkung der Strahlungsdichte ρ der Frequenz ν kann ein Molekül vom Zustande Z_n in den Zustand Z_m übergehen, indem das Molekül die Strahlungsenergie $\epsilon_m - \epsilon_n$ aufnimmt, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_n^m \rho dt. \quad (B)$$

Ebenso sei ein Übergang $Z_m \rightarrow Z_n$ unter der Einwirkung der Strahlung möglich, wobei die Strahlungsenergie $\epsilon_m - \epsilon_n$ frei wird, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_m^n \rho dt. \quad (B')$$

B_n^m und B_m^n sind Konstante. Beide Vorgänge nennen wir „Zustandsänderungen durch Einstrahlung“.

Es fragt sich nun, was für ein Impuls bei diesen betrachteten Zustandsänderungen auf das Molekül übertragen wird. Beginnen wir mit den Vorgängen der Einstrahlung. Leistet ein Strahlenbündel von bestimmter Richtung Arbeit auf einen Planckschen Resonator, so wird dem Strahlenbündel die entsprechende Energie entzogen. Dieser Energieübertragung entspricht nach dem Impulssatz auch eine Impulsübertragung vom Strahlenbündel auf den Resonator. Der letztere erleidet also eine Kraftwirkung in der Richtung des Strahles des Strahlenbündels. Ist die übertragene Energie negativ, so ist auch die Kraftwirkung auf den Resonator von entgegengesetzter Richtung. Im Falle der Quantenhypothese bedeutet dies offenbar folgendes. Findet durch Bestrahlung mit einem Strahlenbündel durch Einstrahlung der Vorgang $Z_n \rightarrow Z_m$ statt, so wird auf das Molekül der Impuls $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$ in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels übertragen. Bei dem Einstrahlungsvorgang $Z_m \rightarrow Z_n$ hat der übertragene Impuls dieselbe Größe, aber die entgegengesetzte Richtung. Für den Fall, daß das Molekül gleichzeitig mehreren Strahlenbündeln ausgesetzt ist, setzen wir voraus, daß die ganze Energie $\epsilon_m - \epsilon_n$ eines Elementarprozesses in einem dieser Strahlenbündel entnommen bzw. zugefügt wird, so daß auch in diesem Falle der Impuls $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen wird.

Bei der Energieabgabe durch Ausstrahlung wird im Falle des Planckschen Resonators im ganzen kein Impuls auf den Resonator übertragen, weil nach der klassischen Theorie die Ausstrahlung in einer Kugelwelle erfolgt. Es wurde aber bereits bemerkt, daß wir zu einer widerspruchsfreien Quantentheorie nur gelangen können, indem wir voraussetzen, daß auch der Prozeß der Ausstrahlung ein gerichteter Prozeß sei. Es wird dann bei jedem Elementarprozeß der Ausstrahlung ($Z_m \rightarrow Z_n$) ein Impuls von der Größe $\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen.

Ist letzteres isotrop, so müssen wir alle Ausstrahlungsrichtungen als gleich wahrscheinlich annehmen. Ist das Molekül nicht isotrop, so gelangen wir zu derselben Aussage, wenn die Orientierung im Laufe der Zeit nach den Gesetzen des Zufalls wechselt. Eine derartige Voraussetzung muß übrigens auch für die statistischen Gesetze (B) und (B') der Einstrahlung gemacht werden, da sonst die Konstanten B_n^m und B_m^n von der Richtung abhängen müßten, was wir durch diese Annahme der Isotropie oder Pseudoisotropie (durch zeit-

liche Mittelwert-Bildung) des Moleküls vermeiden können.

§ 3. Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes.

Wir fragen jetzt nach derjenigen wirksamen Strahlungsdichte ρ , welche herrschen muß, damit der Energieaustausch zwischen Strahlung und Molekülen vermöge der statistischen Gesetze (A), (B) und (B') die Zustandsverteilung der Moleküle gemäß Gleichung (5) nicht stört. Dafür ist nötig und hinreichend, daß pro Zeiteinheit durchschnittlich ebenso viele Elementarprozesse vom Typus (B) stattfinden als von den Typen (A) und (B') zusammen. Diese Bedingung liefert vermöge (5), (A), (B), (B') für die der Indexkombination (m, n) entsprechenden Elementarprozesse die Gleichung

$$\phi_n e^{\frac{\epsilon_n}{kT}} B_n'' \rho = \phi_m e^{\frac{\epsilon_m}{kT}} (B_m'' \rho + A_m'').$$

Soll ferner ρ mit T ins Unendliche wachsen, was wir annehmen wollen, so muß zwischen den Konstanten B_n'' und B_m'' die Beziehung

$$\phi_n B_n'' = \phi_m B_m'' \quad (6)$$

bestehen. Wir erhalten dann als Bedingung des dynamischen Gleichgewichts aus unserer Gleichung

$$\rho = \frac{\frac{A_m''}{B_m''}}{e^{\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT}}} - 1. \quad (7)$$

Es ist dies die Abhängigkeit der Strahlungsdichte von der Temperatur gemäß dem Planckschen Gesetze. Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetze (1) folgt hieraus sofort, daß

$$\frac{A_m''}{B_m''} = \alpha \nu^3 \quad (8)$$

$$\text{und } \epsilon_m - \epsilon_n = h \nu \quad (9)$$

sein muß, wobei α und h universelle Konstanten sind. Um den numerischen Wert der Konstante α zu ermitteln, müßte man eine exakte Theorie der elektrodynamischen und mechanischen Vorgänge haben; man bleibt hier vorläufig auf die Behandlung des Rayleighschen Grenzfalles hoher Temperaturen angewiesen, für welchen die klassische Theorie in der Grenze gilt.

Gleichung (9) bildet bekanntlich die zweite Hauptregel in Bohrs Theorie der Spektren, von der man nach Sommerfelds und Epsteins Vervollständigung schon behaupten darf, daß sie zum gesicherten Bestande unserer Wissenschaft gehört. Sie enthält implizite auch das photochemische Äquivalenzgesetz, wie ich gezeigt habe.

§ 4. Methode zur Berechnung der Bewegung der Moleküle im Strahlungsfelde.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Bewegungen, welche unsere Moleküle unter dem Einflusse der Strahlung ausführen. Wir bedienen uns dabei einer Methode, welche aus der Theorie der Brownschen Bewegung wohl bekannt ist, und von mir schon mehrfach zur rechnerischen Untersuchung von Bewegungen im Strahlungsraume benutzt wurde. Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir die letztere lediglich für den Fall durch, daß Bewegungen nur in einer Richtung, der X -Richtung des Koordinatensystems, vorkommen. Wir begnügen uns ferner damit, den Mittelwert der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung zu berechnen, verzichten also auf den Beweis dafür, daß diese Geschwindigkeiten v nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt sind. Die Masse M des Moleküls sei hinreichend groß, daß

höhere Potenzen von $\frac{v}{c}$ gegen niedrigere vernachlässigt werden; wir können dann auf das Molekül die gewöhnliche Mechanik anwenden. Wir können ferner ohne wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit so rechnen, wie wenn die Zustände mit den Indizes m und n die einzigen wären, die das Molekül annehmen kann.

Der Impuls Mv eines Moleküls erfährt in der kurzen Zeit τ zweierlei Änderungen. Trotzdem die Strahlung nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, wird das Molekül infolge seiner Bewegung eine von der Strahlung herrührende, der Bewegung entgegenwirkende Kraft erfahren. Diese sei gleich Rv , wobei R eine später zu berechnende Konstante bedeutet. Diese Kraft würde das Molekül zur Ruhe bringen, wenn nicht die Unregelmäßigkeit der Strahlungseinwirkungen zur Folge hätte, daß in der Zeit τ auf das Molekül ein Impuls A wechselnden Vorzeichens und wechselnder Größe übertragen würde; dieser unsystematische Einfluß wird entgegen dem vorher genannten eine gewisse Bewegung des Moleküls aufrecht erhalten. Am Ende der betrachteten kurzen Zeit τ wird der Impuls des Moleküls den Wert

$$Mv - Rv\tau + \Delta$$

besitzen. Da die Geschwindigkeitsverteilung zeitlich konstant bleiben soll, so muß die angegebene Größe ihrem mittleren absoluten Betrag nach ebenso groß sein wie die Größe Mv ; die Mittelwerte der Quadrate beider Größen, erstreckt über eine lange Zeit oder über eine große Zahl Moleküle, müssen also einander gleich sein:

$$(Mv - Rv\tau + \Delta)^2 = (\overline{Mv})^2.$$

Da wir den systematischen Einfluß von v auf den Impuls des Moleküls besonders in Rechnung gezogen haben, werden wir den Mittelwert $\bar{v}A$ zu vernachlässigen haben. Durch Entwickeln der linken Seite der Gleichung erhält man daher

$$\bar{\Delta}^2 = 2RM\bar{v}^2\tau. \quad (10)$$

Der Mittelwert \bar{v}^2 , welchen die Strahlung von der Temperatur T bei unseren Molekülen durch ihre Wechselwirkung mit ihnen erzeugt, muß ebenso groß sein, wie derjenige Mittelwert v^2 , welcher dem Gasmolekül nach den Gasgesetzen bei der Temperatur T nach der kinetischen Gastheorie zukommt. Denn die Anwesenheit unserer Moleküle würde sonst das thermische Gleichgewicht zwischen Temperaturstrahlung und einem beliebigen Gase derselben Temperatur stören. Es muß also sein

$$\frac{M\bar{v}^2}{2} = \frac{kT}{2}. \quad (11)$$

Gleichung (10) geht also über in

$$\frac{\bar{\Delta}^2}{\tau} = 2RkT. \quad (12)$$

Die Untersuchung wird nun wie folgt weiterzuführen sein. Bei gegebener Strahlung ($\rho(v)$) werden \bar{A}^2 und R durch unsere Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Molekülen berechenbar sein. Setzt man die Resultate in (12) ein, so muß diese Gleichung identisch erfüllt sein, wenn ρ in Funktion von v und T ausgedrückt wird vermöge der Planckschen Gleichung (4).

§ 5. Berechnung von R .

Ein Molekül der betrachteten Art sei längs der X -Achse des Koordinatensystems K mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt. Wir fragen nach dem im Mittel von der Strahlung auf das Molekül pro Zeiteinheit übertragenen Impuls. Um diesen berechnen zu können, müssen wir die Strahlung von einem Koordinatensystem K' aus beurteilen, welches relativ zum betrachteten Molekül ruht. Denn unsere Hypothesen über Emission und Absorption haben wir nur für ruhende Moleküle formuliert. Die Transformation auf das System K' ist in der Literatur mehrfach durchgeführt, besonders genau in Mosengeils Berliner Dissertation. Ich will jedoch die einfachen Überlegungen der Vollständigkeit halber hier wiederholen.

Bezüglich K ist die Strahlung isotrop, d. h. die einem bestimmten infinitesimalen Körperwinkel $d\alpha$ bezüglich ihrer Strahlrichtung zugeordnete Strahlung vom Frequenzbereich $d\nu$ pro Volumeneinheit ist

$$\rho d\nu \frac{d\alpha}{4\pi}, \quad (13)$$

wobei ρ nur von der Frequenz ν , nicht aber von der Richtung abhängig ist. Dieser hervorgehobenen Strahlung entspricht in bezug auf das Koordinatensystem K' eine hervorgehobene Strahlung, welche ebenfalls durch einen Frequenzbereich $d\nu'$ und durch einen gewissen Körperwinkel $d\alpha'$ charakterisiert ist. Die Volumendichte dieser hervorgehobenen Strahlung ist

$$\rho'(\nu', \varphi') d\nu' \frac{d\alpha'}{4\pi}. \quad (13')$$

Hierdurch ist ρ' definiert. Es ist von der Richtung abhängig, welche letztere in geläufiger Weise durch den Winkel φ' mit der X' -Achse und dem Winkel ψ' der Y' - Z' -Projektion mit der Y' -Achse definiert sei. Diesen Winkeln entsprechen die Winkel φ und ψ , welche in analoger Weise die Richtung von $d\alpha$ in bezug auf K festlegen.

Zunächst ist klar, daß zwischen (13) und (13') dasselbe Transformationsgesetz gelten muß wie für die Amplitudenquadrate A^2 und A'^2 einer ebenen Welle von entsprechender Richtung. Deshalb ist in der von uns gewünschten Näherung

$$\frac{\rho'(\nu', \varphi') d\nu' d\alpha'}{\rho(\nu) d\nu d\alpha} = 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \varphi \quad (14)$$

oder

$$\rho'(\nu', \varphi') = \rho(\nu) \frac{d\nu}{d\nu'} \frac{d\alpha}{d\alpha'} \left(1 - 2 \frac{v}{c} \cos \varphi\right). \quad (14')$$

Die Relativitätstheorie ergibt ferner die mit der gewünschten Näherung gültigen Formeln

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c} \cos^2 \varphi\right) \quad (15)$$

$$\cos \varphi' = \cos \varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \cos^2 \varphi \quad (16)$$

$$\psi' = \psi. \quad (17)$$

Aus (15) folgt mit entsprechender Näherung

$$\nu = \nu' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi'\right).$$

Also ist, ebenfalls in der gewünschten Näherung,

$$\rho(\nu) = \rho(\nu') + \frac{v}{c} \nu' \cos \varphi'$$

oder

$$\rho(\nu) = \rho(\nu') + \frac{\partial \rho(\nu')}{\partial \nu} \cdot \frac{v}{c} \nu' \cos \varphi'. \quad (18)$$

Ferner ist gemäß (15), (16), und (17)

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \frac{v}{c} \cos \varphi'$$

$$\frac{d\alpha}{d\alpha'} = \frac{\sin \varphi' d\varphi' d\psi'}{\sin \varphi d\varphi d\psi} = \frac{d(\cos \varphi)}{d(\cos \varphi')} = 1 - 2 \frac{v}{c} \cos \varphi'$$

Vermöge dieser beiden Relationen und (18) geht (14') über in

$$\rho'(\nu', \varphi') = \left[(\rho)_{\nu} + \frac{\nu}{c} \nu' \cos \varphi' \left(\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right)_{\nu} \right] (1 - 3 \frac{\nu}{c} \cos \varphi'). \quad (19)$$

Mit Hilfe von (19) und unserer Hypothese über die Ausstrahlung und Einstrahlung des Moleküls können wir leicht den pro Zeiteinheit im Mittel auf das Molekül übertragenen Impuls berechnen. Bevor wir dies tun, müssen wir aber noch etwas sagen zur Rechtfertigung des eingeschlagenen Weges. Man kann einwenden, daß die Gleichungen (14), (15), (16) auf die mit der Quantentheorie nicht vereinbare Maxwell'sche Theorie des elektromagnetischen Feldes gegründet seien. Dieser Einwand trifft jedoch mehr die Form als das Wesen der Sache. Denn wie die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge sich auch gestalten mag, so wird doch jedenfalls das Dopplersche Prinzip und das Gesetz der Aberration erhalten bleiben, damit also auch die Gleichung (15) und (16). Ferner geht die Gültigkeit der energetischen Beziehung (14) sicher über die der Undulationstheorie hinaus; dies Transformationsgesetz gilt nach der Relativitätstheorie z. B. auch für die Energiedichte einer mit (Quasi-) Lichtgeschwindigkeit bewegten Masse von unendlich kleiner Ruhedichte. Die Gleichung (19) kann daher für jede Theorie der Strahlung Gültigkeit beanspruchen. —

Die zum räumlichen Winkel $d\alpha'$ gehörige Strahlung würde gemäß (B) pro Sekunde zu

$$B_n^m \rho'(\nu', \varphi') \frac{d\alpha'}{4\pi}$$

Elementarprozessen der Einstrahlung von Typus $Z_n \rightarrow Z_m$ Veranlassung geben, wenn das Molekül nach jedem solchen Elementarprozeß sofort wieder in den Zustand Z_n zurückgebracht würde. In Wirklichkeit ist aber die Zeit des Verweilens im Zustande Z_n pro Sekunde gemäß (5) gleich

$$\frac{1}{S} \phi_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}},$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \phi_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} + \phi_m e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \quad (20)$$

gesetzt ist. Die Zahl dieser Prozesse pro Sekunde beträgt also in Wahrheit

$$\frac{1}{S} \phi_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} B_n^m \rho'(\nu', \varphi') \frac{d\alpha'}{4\pi}.$$

Bei jedem derartigen Elementarprozeß wird in Richtung der positiven X' -Achse der Impuls

$$\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c} \cos \varphi'$$

auf das Atom übertragen. Auf analogem Wege fanden wir, gestützt auf (B), daß die entsprechende Zahl der Elementarprozesse der Einstrahlung vom Typus $Z_m \rightarrow Z_n$ pro Sekunde

$$\frac{1}{S} \phi_m e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} B_m^n \rho'(\nu', \varphi') \frac{d\alpha'}{4\pi}$$

ist, und es wird bei jedem solchen Elementarprozeß der Impuls

$$-\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{c} \cos \varphi'$$

auf das Molekül übertragen. Der im ganzen pro Zeiteinheit durch Einstrahlung pro Zeiteinheit auf das Molekül übertragene Impuls ist daher mit Rücksicht auf (6) und (9)

$$\frac{h\nu}{cS} \phi_n B_n^m \left(e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \right) \int \rho'(\nu', \varphi') \cos \varphi' \frac{d\alpha'}{4\pi},$$

wobei die Integration über alle räumlichen Elementarwinkel zu erstrecken ist. Durch Ausführung der letzteren ergibt sich vermöge (19) der Wert:

$$-\frac{h\nu}{c^2 S} \left(\rho - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \phi_n B_n^m \left(e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\epsilon_m}{kT}} \right) \cdot \nu.$$

Dabei ist die wirksame Frequenz wieder mit ν (statt ν') bezeichnet.

Dieser Ausdruck stellt aber den ganzen pro Zeiteinheit im Mittel auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Molekül übertragenen Impuls dar. Denn es ist klar, daß die ohne Einwirkung der Strahlung stattfindenden Elementarprozesse der Ausstrahlung, vom System K' aus betrachtet, keine Vorzugsrichtung besitzen, also im Mittel auch keinen Impuls auf das Molekül übertragen können. Wir erhalten daher als Endergebnis unserer Betrachtung:

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S} \left(\rho - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \phi_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \quad (21)$$

§ 6. Berechnung von A^2 .

Viel einfacher ist es, die Wirkung der Unregelmäßigkeit der Elementarprozesse auf das mechanische Verhalten des Moleküls zu berechnen. Denn man kann dieser Rechnung ein ruhendes Molekül zugrunde legen bei dem Grade der Näherung, mit dem wir uns von Anfang an begnügen haben.

Es verursache irgendein Ereignis, daß auf ein Molekül ein Impuls λ in der X -Richtung übertragen werde. Dieser Impuls sei in verschiedenen Fällen von verschiedenen Vorzeichen und verschiedener Größe. Es gelte jedoch für λ ein solches statistisches Gesetz, daß der Mittelwert λ verschwindet. Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ die Impulswerte, welche mehrere voneinander unabhängig wirkende Ursachen auf das Molekül in

der X -Richtung übertragen, so daß der im ganzen übertragene Impuls Δ gegeben sei durch

$$\Delta = \sum \lambda_{\nu}.$$

Dann ist, wenn für die einzelnen λ_{ν} die Mittelwerte $\overline{\lambda_{\nu}}$ verschwinden:

$$\overline{\Delta^2} = \sum \overline{\lambda_{\nu}^2}. \quad (22)$$

Sind die Mittelwerte $\overline{\lambda_{\nu}^2}$ der einzelnen Impulse einander gleich ($= \overline{\lambda^2}$), und ist l die gesamte Zahl der die Impulse liefernden Ereignisse, so gilt die Beziehung

$$\overline{\Delta^2} = l \overline{\lambda^2}. \quad (22a)$$

Nach unseren Hypothesen wird nun bei jedem Prozeß der Einstrahlung und der Ausstrahlung auf das Molekül der Impuls

$$\lambda = \frac{h\nu}{c} \cos \varphi$$

übertragen. Dabei bedeutet φ den Winkel zwischen der X -Achse und einer nach den Gesetzen des Zufalls gewählten Richtung. Daher ergibt sich

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2. \quad (23)$$

Da wir annehmen, daß alle stattfindenden Elementarvorgänge als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind, so dürfen wir (22a) anwenden. l ist dann die Zahl der im ganzen in der Zeit τ stattfindenden Elementarvorgänge. Diese ist doppelt so groß als die Zahl der Einstrahlungsvorgänge $Z_n \rightarrow Z_m$ in der Zeit τ . Es ist also

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho \tau. \quad (24)$$

Es ergibt sich aus (23), (24) und (22)

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S} \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \rho. \quad (25)$$

§ 7. Ergebnis.

Um nun zu zeigen, daß die nach unseren Grundhypothesen von der Strahlung auf die Moleküle ausgeübten Impulse das thermodynamische Gleichgewicht niemals stören, brauchen wir nur die in (25) und (21) für $\frac{A^2}{\tau}$ und R berechneten Werte einzusetzen, nachdem in (21) die Größe

$$\left(\rho - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)$$

gemäß (4) durch $\frac{\rho h\nu}{3kT}$ ersetzt ist. Es zeigt sich dann sofort, daß unsere Fundamentalgleichung (12) identisch erfüllt ist. —

Die nunmehr beendeten Überlegungen liefern eine starke Stütze für die in § 2 angegebenen Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung durch Prozesse der Absorption und Emission, bzw. durch Einstrahlung und Ausstrahlung. Zu diesen Hypothesen wurde ich durch das Bestreben geführt, in möglichst einfacher Weise ein quantentheoretisches Verhalten der Moleküle zu postulieren, das dem eines Planckschen Resonators der klassischen Theorie analog sei. Es ergab sich zwanglos aus der allgemeinen Quantenannahme für die Materie die zweite Bohrsche Regel (Gleichung 9), sowie die Plancksche Strahlungsformel.

Am wichtigsten erscheint mir aber das Ergebnis bezüglich der bei Einstrahlung und Ausstrahlung auf das Molekül übertragenen Impulse. Wenn eine unserer Annahmen über letztere abgeändert würde, so würde eine Verletzung der Gleichung (12) die Folge sein; es erscheint kaum möglich, anders als auf Grund unserer Annahmen mit dieser durch die Wärmetheorie geforderten Beziehung im Einklang zu bleiben. Wir können daher folgendes als ziemlich sicher erwiesen betrachten.

Bewirkt ein Strahlenbündel, daß ein von ihm getroffenes Molekül die Energiemenge $h\nu$ in Form von Strahlung durch einen Elementarprozeß aufnimmt oder abgibt (Einstrahlung), so wird stets der Impuls $\frac{h\nu}{c}$ auf das Molekül übertragen, und zwar bei Energieaufnahme in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels, bei Energieabgabe in der entgegengesetzten Richtung. Befindet sich das Molekül unter der Wirkung mehrerer gerichteter Strahlenbündel, so ist immer nur eines derselben an einem Elementarvorgang der Einstrahlung beteiligt; dieses Bündel allein bestimmt dann die Richtung des auf das Molekül übertragenen Impulses.

Erleidet das Molekül ohne äußere Anregung einen Energieverlust von der Größe $h\nu$, indem es diese Energie in Form von Strahlung abgibt (Ausstrahlung), so ist auch dieser Prozeß ein gerichteter. Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht. Das Molekül erleidet in einer beim jetzigen Stande der Theorie nur durch den „Zufall“ bestimmten Richtung bei dem Elementarprozeß der Ausstrahlung einen Rückstoß von der Größe $\frac{h\nu}{c}$.

Diese durch die Gleichung (12) geforderten Eigenschaften der Elementarprozesse lassen die Aufstellung einer eigentlich quantenhaften Theorie der Strahlung fast unvermeidlich erscheinen. Die Schwäche der Theorie liegt einerseits darin,

daß sie uns dem Anschluß an die Undulationstheorie nicht näher bringt, andererseits darin, daß sie Zeit und Richtung der Elementarprozesse dem „Zufall“ überläßt; trotzdem hege ich das volle Vertrauen in die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges.

Noch eine allgemeine Bemerkung soll hier Platz finden. Fast alle Theorien der Temperaturstrahlung beruhen auf der Betrachtung der Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Molekülen. Aber im allgemeinen begnügt man sich mit der Betrachtung des Energie-Austausches, ohne den Impuls-Austausch zu berücksichtigen. Man fühlt sich dazu leicht berechtigt, weil die Kleinheit der durch die Strahlung übertragenen Impulse es mit sich bringt, daß letztere gegenüber anderen bewegungserzeugenden Ursachen in der Wirklichkeit fast stets zurücktreten. Aber für die theoretische Betrachtung sind jene kleinen Wirkungen neben den ins Auge fallenden der Energieübertragung durch Strahlung als durchaus gleichwertig anzusehen, indem Energie und Impuls aufs engste miteinander verknüpft sind; es kann deshalb eine Theorie erst dann als berechtigt angesehen werden, wenn gezeigt ist, daß die nach ihr von der Strahlung auf die Materie übertragenen Impulse zu solchen Bewegungen führen, wie sie die Wärmetheorie verlangt.

(Eingegangen 3. März 1917.)

Über Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten.

Von M. Wolfke.

(Mit Tafel I.)

Bekanntlich gibt es zwei verschiedene photographische Wirkungen der Kanalstrahlen. Bei kurzer Exposition entstehen an den von Kanalstrahlen getroffenen Stellen Schwärzungen, bei längerer Exposition — eine Art Solarisation¹⁾.

Zwecks Anwendung der Kanalstrahlen auf einige neue Forschungsgebiete habe ich mir vor allem die Aufgabe gestellt, mit möglichst kurzen Expositionen scharfe Parabeln zu erhalten. Hierzu ist die Solarisationsmethode nicht geeignet, da sie eine längere Expositionszeit erfordert, so daß ich auf die Schwärzungsmethode allein angewiesen war.

J. Koenigsberger und J. Kutschewski²⁾, die wohl die ersten gewesen sind, welche die photographische Methode auf die Kanalstrahlen

anwandten, suchten vergebens scharfe Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. Sie untersuchten mehrere Sorten von Trockenplatten mit negativem Resultat; auch nach mehreren Minuten der Exposition erhielten sie nur allgemeine Schwärzungen der Platten, ohne daß die Parabeln der Kanalstrahlen zu sehen waren. Nur auf einer nichtabgeschliffenen Lippmannplatte war nach 4' Expositionszeit der neutrale Fleck ohne die abgelenkten Strahlen schwach sichtbar. Bessere Resultate erhielten Koenigsberger und Kutschewski mit Chlorbromsilberpapier. Auch die Schwärzungsbilder von T. Retschinsky¹⁾, wie aus seinen Reproduktionen zu ersehen ist²⁾, sind nur diffuse Flecke, nicht nur zur quantitativen, sondern auch zur qualitativen Untersuchung vollkommen unbrauchbar. T. Retschinsky arbeitete deshalb ausschließlich mit der Solarisationsmethode³⁾, die er zu einer großen Vollkommenheit ausgebildet hat. Im Gegensatz zu diesen negativen Resultaten stehen die schönen, äußerst scharfen Aufnahmen von J. J. Thomson⁴⁾. Allerdings läßt sich aus seinen Publikationen nicht ersehen, ob die Bilder Schwärzungsparabeln oder Solarisationsbilder sind, und T. Retschinsky, gestützt auf eigene Erfahrung und das Aussehen der Thomsonschen Reproduktionen, vermutet, daß auch die Thomsonschen Aufnahmen keine Schwärzungsbilder, sondern Solarisationsbilder sind⁵⁾.

Nach einigen Wochen Vorversuchen in dieser Richtung ist es mir gelungen, scharfe, zu quantitativen Messungen gut geeignete, Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. In Anbetracht des oben Gesagten ist wohl nicht ohne Interesse die näheren Versuchsbedingungen anzugeben, die die Aufnahme von scharfen Schwärzungsparabeln ermöglichen.

Die Anordnung des Aufbaues war im Prinzip mit einigen technischen Veränderungen und Verbesserungen die gleiche wie sie in Würzburg bei W. Wien ausgearbeitet worden ist und die auch T. Retschinsky⁶⁾ vor zwei Jahren bei seinen Versuchen in Zürich benutzte. Sei es mir gestattet, Herrn Dr. T. Retschinsky auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen für seine Liebenswürdigkeit, mit der er mich seinerzeit in die Einzelheiten seiner Anordnung und die Kanalstrahltechnik eingeweiht hat.

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

2) Vgl. l. c. Taf. VI. Fig. 1 u. 2.

3) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **48**, 546, 1915.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6), **24**, 244, 1912.

5) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 540, 1915.

6) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

1) Vgl. Bericht von T. Retschinsky, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 75, 1916.

2) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, diese Zeitschr. **11**, 666, 1910; Verh. d. D. Phys. G. **13**, 133, 1911.