now... found that by measuring

$$\boxed{|\psi\rangle = e^{2i\gamma}|+++\rangle + e^{-2i\gamma}|---\rangle}$$

in the $M(2\beta)$ basis, we get $e^{i\gamma(\sigma_x+\sigma_x)} e^{i\beta\,\sigma_z\otimes\sigma_z}|++\rangle$.

Proof:

$$|\psi\rangle = e^{2i\gamma}|+++\rangle + e^{-2i\gamma}|---\rangle$$

$$\approx (|0\rangle + e^{2i\beta}|1\rangle)\left[(e^{2i\gamma}|++\rangle + e^{-2i\gamma}|--\rangle) + e^{-2i\beta}(e^{2i\gamma}|++\rangle - e^{-2i\gamma}|--\rangle)\right]$$

$$+ (|0\rangle - e^{2i\beta}|1\rangle)\left[(e^{2i\gamma}|++\rangle + e^{-2i\gamma}|--\rangle) - e^{-2i\beta}(e^{2i\gamma}|++\rangle - e^{-2i\gamma}|--\rangle)\right]$$

measure & see $\boxed{|0\rangle + e^{2i\beta}|1\rangle}$

$$\to (e^{2i\gamma}|++\rangle + e^{-2i\gamma}|--\rangle) + e^{-2i\beta}(e^{2i\gamma}|++\rangle - e^{-2i\gamma}|--\rangle)$$

$$= (e^{i\gamma(\sigma_x+\sigma_x)})(e^{i\beta\sigma_z\otimes\sigma_z})|++\rangle$$ Done!

or $\boxed{|0\rangle - e^{2i\beta}|1\rangle}$

$$\to (e^{2i\gamma}|++\rangle + e^{-2i\gamma}|--\rangle) - e^{-2i\beta}(e^{2i\gamma}|++\rangle - e^{-2i\gamma}|--\rangle)$$

flip this sign & done. How?

Questions: ① How do we prepare the state

$|\psi\rangle = e^{2i\gamma}|+++\rangle + e^{-2i\gamma}|---\rangle$?

② How do we "flip the sign" when the outcome is

$|0\rangle - e^{2i\beta}|1\rangle$?