

申请上海交通大学工程硕士学位论文

应用过完备稀疏字典技术的流体模拟

硕 士 研 究 生_____李 欢_____

学 号_____1120379074_____

导 师_____杨旭波教授_____

申 请 学 位_____工程硕士_____

学 科_____软件工程_____

所 在 单 位_____软件学院_____

答 辩 日 期_____2015 年 1 月_____

学位授予单位_____上海交通大学_____

Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University
for the Degree of Master

Fluid Simulation Using Overcomplete Dictionaries Based on Sparse Coding

Candidate:	Huan Li
Student ID:	1120379074
Supervisor:	Prof. Xubo Yang
Academic Degree Applied for:	Master of Engineering
Speciality:	Software Engineering
Affiliation:	School of Software Engineering
Date of Defence:	January, 2015
Degree-Conferring-Institution:	Shanghai Jiao Tong University

上海交通大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：_____

日 期：_____年 ____月 ____日

上海交通大学 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ☐，在 _____ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☐。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

日 期：_____年 ____月 ____日

日 期：_____年 ____月 ____日

应用过完备稀疏字典技术的流体模拟

摘 要

在计算机图形学领域，计算机模拟的目标在于增强虚拟现实的真实感。烟雾、水、空气等流体行为是自然环境的重要组成部分，也是计算机模拟流体行为的主要对象。近年来，已经出现了一大批稳定、逼真、计算较为高效的流体动画模拟方法，并且大量地应用到了影视特效和游戏等产业。但是，基于速度场的欧拉流体模拟方法在计算大规模的流体动画时，投影步骤需要耗费大量的计算时间，成为欧拉流体模拟方法的瓶颈。

针对欧拉流体模拟方法的投影步骤，本文提出一种应用过完备稀疏字典技术的流体模拟方法，从流体场数据的局部细微结构入手，利用稀疏编码技术，建立能够匹配并重构高精度网格空间的复杂流体数据稀疏表示的过完备稀疏字典，然后线性组合该高精度字典与降采样矩阵生成适用于低精度流场数据的过完备稀疏字典。

同时，为了将过完备稀疏字典技术应用到流体的加速模拟中，本文还建立了一个适用于流体模拟的重构上采样框架。该框架巧妙地将欧拉方法的瓶颈步骤放到了低精度网格上计算，有效地避开了投影步骤的高耗时问题，从整体上提高了流体模拟的计算效率。另外，该框架引入的将高精度速度场数据降采样到低精度网格空间的降采样方法可以用一个降采样矩阵表示，本文使用该降采样矩阵计算生成适用于低精度速度场空间的过完备稀疏字典，故在重构上采样速度场的步骤中，该低精度空间的过完备稀疏字典理论上能够准确匹配低精度速度场数据的稀疏表示。实验部分给出了本文方法的实验效果图，实验结果表明，本文方法能在一定程度上恢复流场的细节。在选取合适的参数时，即使与模拟较快的流体模拟器相比，本文的方法也可以在一定程度上加快流体模拟的速度。

关键词：流体动画，过完备稀疏字典，稀疏编码，重构上采样，投影

Fluid Simulation Using Overcomplete Dictionaries Based on Sparse Coding

ABSTRACT

Smoke, water and other fluids is an important part of the natural environment, and the computer simulation for fluid behavior of real world can make the virtual world more real. In recent years, the fields of computer graphics have proposed a lot of stable, realistic, efficient fluid simulation methods, and have been widely used in movie and video game industry. However, when simulating large-scale fluid scene, the projection step of Euler method which based on the computation of velocity field will be very time-consuming, and it is the bottleneck of Euler method of fluid simulation.

Considering the bottleneck of Euler method of fluid simulation, the paper proposed a method applies a couple of overcomplete dictionaries based on sparse coding into fluid simulation. We use the local fine structure of high-resolution fluid data to learn an overcomplete dictionary, which can match various complex local fine structures of high-resolution fluid data and be used to recover these local fine structures by combining with the sparse representation. We calculate a low-resolution dictionary by multiplying the learned high-resolution dictionary with a down-sampling matrix. The down-sampling matrix will also be used to down-sample the high-resolution fluid velocity data to its low-resolution version, thus in theory, this dictionary of low-resolution space can be used to decomposite the sparse representation of low-resolution velocity field.

Meanwhile, in order to accelerate the simulation of fluid animation by using overcomplete dictionaries, this paper also established a reconstruction and up-sampling framework for fluid animation, Which compute the projection step on a low-resolution grid, and can accelerate the computation of fluid simulation. The result of this method will be shown in the result section, and proves that our method can recover the high-

resolution details of fluid to a certain extend. Using the appropriate parameters, even compared with a relatively fast fluid simulator used in our experiment, our method can accelerate the computation speed to a certain extend.

KEY WORDS: fluid animation, overcomplete dictionaries, sparse coding, reconstruct and up-sampling, projection

目 录

摘要	i
ABSTRACT	ii
目录	iv
插图索引	vii
表格索引	viii
第一章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状	2
1.2.1 流体模拟的基本方法	2
1.2.2 流体模拟优化方法	3
1.2.3 过完备稀疏字典技术	5
1.3 本文的主要工作及创新点	6
1.3.1 主要研究工作	6
1.3.2 本文创新点	7
1.4 本文组织结构	8
第二章 流体模拟的基本方法与过完备训练字典技术	9
2.1 Navier-Stokes 方程组	9
2.1.1 Navier-Stokes 方程组的描述形式	9
2.1.2 Navier-Stokes 方程组的意义	10
2.1.3 忽略粘性力作用	12
2.2 流体模拟的基本方法	13

2.2.1	网格介绍	13
2.2.2	欧拉网格方法及其计算框架	14
2.3	基于稀疏编码的过完备稀疏字典技术	15
2.3.1	训练过完备稀疏字典	15
2.3.2	信号的稀疏分解问题	16
2.4	本章小结	17
第三章	应用重构上采样方法的流体动画基本框架	18
3.1	流体动画疏密数据的特点	18
3.2	流体动画的重构上采样框架	19
3.2.1	对流	20
3.2.2	投影	23
3.3	本章小结	26
第四章	基于过完备字典技术的重构上采样方法	27
4.1	应用过完备字典技术的重构上采样方法的计算框架	27
4.2	过完备字典的训练	29
4.2.1	联合训练字典的问题描述	29
4.2.2	联合训练字典方法	30
4.2.3	降采样联合字典方法	31
4.3	过完备字典重构上采样方法	34
4.3.1	预处理速度场数据	35
4.3.2	重构上采样算法	36
4.4	本章小结	38
第五章	实验与结果分析	39
5.1	L1SR 和 scSR 重构上采样方法与框架	39
5.1.1	实验目的与环境	39
5.1.2	实验结果与分析	41
5.2	应用降采样矩阵的重构上采样方法	48

5.2.1	实验背景	48
5.2.2	实验目的与环境	48
5.2.3	实验结果与分析	49
5.3	本章小结	53
第六章	全文总结	55
6.1	工作总结	55
6.2	存在的问题和未来工作展望	55
	参考文献	58
	致谢	62
	攻读学位期间发表的学术论文目录	63

插图索引

2-1 流体粒子受压力示意图	11
2-2 流体不可压示意图	12
2-3 中心网格 2D 示意图	13
2-4 MAC 网格示意图	13
3-1 流体动画重构上采样框架	20
3-2 半拉格朗日对流方法示意图	21
3-3 MacCormack 对流方法示意图	22
3-4 水的自由表面示意图	25
4-1 过完备字典技术的整体框架	28
4-2 过完备稀疏字典的可视化效果图	33
5-1 L1SR 重构上采样实验结果对比图	40
5-2 重构上采样低频速度场数据	41
5-3 scSR vs L1SR 方法重构图像效果图比较	44
5-4 无障碍物场景下 scSR 重构上采样实验结果对比图	45
5-5 多障碍物场景下 scSR 重构上采样实验结果对比图	46
5-6 C++ 模拟器中应用 scSR 重构上采样实验结果对比图	47
5-7 应用降采样矩阵的重构上采样方法重构 Lena	49
5-8 应用降采样矩阵的重构上采样方法重构流体动画	50
5-9 应用降采样矩阵的字典方法重构上采样方法重构有障碍物场景 的流体动画	51
5-10 对流体速度场选择性地应用过完备训练字典技术	53

表格索引

5-1 对比 L1SR 和 scSR 方法重构 Lena 结果图的 PSNR 值	43
5-2 降采样训练字典方法的重构时间	52

第一章 绪论

1.1 研究背景

在计算机图形学领域, 计算机模拟的目标在于增强虚拟现实的真实感。烟雾、水、空气等流体行为是自然环境的重要组成部分, 计算机模拟自然界中这些流体的行为, 能很好地烘托环境的气氛。传统的动画开发需要由动画师自己手动绘制流体动画的每一帧, 虽然这样的创作方式可以让动画师更加灵活地创作, 但是同时也需要巨大的工作量, 并且手工绘制的动画难以获得高精度和复杂变化的流体效果。随着流体动画技术和相关应用需求的发展, 流体动画产业越来越多地采用计算机来模拟和渲染流体的行为和现象, 成为计算机图形学领域的一个非常重要的研究分支, 并且已经在影视游戏、虚拟现实和科学计算等领域取得了广泛的应用价值。在计算机图形学领域, 近年来已经出现了一大批稳定、逼真、并且计算较为高效的流体模拟方法, 已经大量地应用到了影视特效和游戏等产业。例如在电影设计的辅助下, 现有的流体模拟方法 [1] [2] [3] 成功地模拟出了海浪奔涌、烟雾缭绕等震撼人心的效果。

但是, 随着电影和游戏产业的迅速发展, 对大规模场景下的复杂流体动画的模拟技术的要求也越来越高。而现有的流体模拟方法都受限于大规模场景的海量网格数据的计算, 导致在计算较大规模的流体动画的每一帧时, 需要消耗几十甚至几小时的时间。因此, 研究如何快速高效地模拟大规模场景下的流体动画技术具有十分重要的意义。现有研究中, 人们提出了很多方法改进流体模拟的计算速度, 但是仍然存在很多问题。虽然有些方法通过简化流体力学模型能达到加速的目的, 但其计算耗费仍然非常巨大。

压缩感知理论 [4] [5] [6] 颠覆了经典的尼奎斯特 (Nyquist) 采样定理, 在学术界被誉为一个 “Big Idea”。该定理在 2006 年诞生后的短短几年里, 就很快在通信、声音、图像等领域成功应用, 并取得了令人难以置信的突破。基于压缩感知理论的可完备稀疏训练字典技术 [7] 指出, 如果训练字典足够完备, 就可以利用重构上采样方法准确地重构出原信号数据。近年来, 可完备稀疏字典也在图像处理、信号处理、分类等领域得到了成功应用。本课题拟针对大规模流体动画的快速高效模拟问题, 探索将压缩感知理论技术应用到流体动画领域

的方法与框架。

1.2 国内外研究现状

本文研究的是一个交叉性的课题，将基于稀疏编码技术的过完备训练字典技术应用到流体模拟领域，达到提高流体动画模拟方法的计算速度的目的。在该部分章节中，我们将会重点介绍流体模拟方法的国内外现状，并简单描述基于稀疏编码技术的过完备训练字典方法的发展过程和要解决的问题。

1.2.1 流体模拟的基本方法

计算机动画领域中的流体动画模拟方法，不同于传统工程计算中的计算流体力学方法，追求高精度的数值计算，而是更加看重视觉效果和计算效率，故计算机动画中使用的流体动画模拟算法具有高效、简单和易于实现等特点。基于物理的流体动画方法通过求解 Navier-Stokes 物理方程组来模拟流体，主要有三种基本模拟方法：欧拉网格法、拉格朗日粒子法和基于旋度的方法。

1.2.1.1 欧拉网格法

欧拉网格法通过在空间中设置固定的点，观测流体的物理量 (如速度场、压强场、温度场等) 在通过该点时随着时间的变化来表示流体的运动。通常在欧拉方法中，流体空间被划分成规则或不规则的网格，通过在这些离散网格上求解 Navier-Stokes 方程组得到一定时间序列中这些离散网格上的物理量的变化过程，从而达到描述流体运动的目的。1997 年 Foster 和 Metaxas [8] 建立一种气体在热气浮力作用下运动的气体运动模型，率先把流体模拟引入进计算机图形学领域。1999 年 Stam [9] 首次定义了一种投影的方法，将流体模拟的基础模型分解为四个主要部分分别求解，同时还引入了一种无条件稳定的半拉格朗日方法，奠定了欧拉网格法的基础。Fedkiw 等人 [10] 在 2001 年提出的对烟模拟的框架，基本完善了欧拉网格法的步骤和流程；Enright 等人 [11] 使用高精度网格模拟复杂流体表面，至此，基于欧拉方法的流体模拟框架基本趋于稳定。

1.2.1.2 拉格朗日粒子法

拉格朗日粒子法将流体当做一个粒子系统来处理。模拟区域中的流体或者固体点都相应地标记成一个独立的、具有速度和位置属性的粒子。这些粒子在

外力和周围其他粒子的相互影响下,物理量随着时间的变化而变化,拉格朗日粒子法使用这些变化的物理量描述流体的运动。Müller, Adams [12] [13] 等人先后采用拉格朗日方法快速高效地模拟出流体动画效果。相较于欧拉网格方法,拉格朗日粒子法计算量更小,具有模拟速度快的优点。但是该方法无法保证流体的无散条件,难以生成稳定的动画效果,并且渲染较为困难,不适合需要很高真实感的流体动画场合。

1.2.1.3 基于旋度的方法

基于旋度的方法通过描述涡旋粒子随着时间的运动来模拟流体动画的效果。该方法通过计算涡旋粒子的旋度变化来计算流体的速度变化,因流体的细节主要来自于涡旋粒子,故该方法可以生成较多的流体细节。在 2005 年和 2006 年, Alexis [14] [15] 等人相继提出了基于旋度的流体模拟方法,并且成功地生成了烟雾缭绕的效果。基于旋度的方法具有计算效率高、可快速模拟流体动画的优点,但是该方法难以处理各种边界条件,如流体的自由表面和固体边界等。另外,单独使用该种类型的方法,难以保证模拟的稳定性。

1.2.2 流体模拟优化方法

相较于其他方法,欧拉网格法因易于离散、能够保证无散条件等优点,相关的研究工作最多。但是欧拉方法的模拟效果依赖于网格精度,想要模拟出涡旋等细节,需要在足够高的网格精度上模拟才能实现。但是提高网格的精度会大幅度地增加模拟的时间开销,常常会消耗几个甚至几十个小时来计算很小一段时间帧的流体动画。在学术界,拟针对如何提高流体模拟的计算效率,提出了各种优化方法,主要相关工作可归纳为四类。

1.2.2.1 自适应网格方法

在流体模拟过程中,并不是所有的模拟区域都包含有丰富的细节特征。自适应网格方法针对流场不同区域的不同级别的细节特征,分配不同粗细的网格。对包含丰富流体细节的流场区域,分配较细的网格,而对变化平缓、流体细节较少的流场区域,则分配较粗的网格。如文献 [2] 提出的八叉树方法,使用八叉树结构对流体区域进行自适应划分,在边界区域等包含丰富流体细节的区域使用精细的网格,在其他流体细节较少的区域使用粗略网格。该类方法的

优点是能够在总体上使用较少网格数量的同时,模拟出流体动画的细节效果,达到提高流体模拟的计算效率的目的。但是自适应网格方法要控制不同级别的网格精度,增加了算法的数据处理和计算的复杂性。

1.2.2.2 混合模型方法

混合模型方法的基本思想是根据流场不同区域的计算要求,采用不同类型的计算模型。现有的该类方法有混合网格法 [16]、网格-粒子混合法 [17]、欧拉-旋度混合法 [3] 等。由于这类优化方法结合了不同计算模型的优点,可在优化计算速度的同时,保留流体动画尽可能多的细节。如文献 [16] 提出的方法混合使用不同的网格计算模型达到加速的目的;文献 [17] 使用粒子的方法求解对流步骤,但是在求解投影步骤时使用网格的方法保证流体的无散条件;文献 [3] 采用欧拉网格处理自由边界和障碍物边界等边界条件,有效地避免了基于旋度方法不能处理各种边界条件的缺陷,在其他无边界区域采用基于旋度的方法,又具有基于旋度的模拟方法的计算速度快的优点。但是这类方法需要维护不同计算模型数据之间的耦合,其算法的设计与实现比较复杂,并且数据的耦合计算过程也会引入额外的计算误差。

1.2.2.3 低-高精度重采样方法

欧拉网格方法通常分成三个主要步骤:对流、添加外力和投影。当提高网格精度时,计算投影步骤所消耗的时间会以指数级的速度增长,成为该方法所有步骤中耗时最为显著的部分。低-高精度重采样方法的基本思想就是尽量减少投影步骤的计算时间,其具体做法为将高耗时的投影步骤放到低精度网格计算。Yoon 等人 [18] 和 Kim 等人 [1] 先在低精度网格上计算流体场,再用双三次插值的方法将其上采样到对应的高精度网格上,使用涡旋粒子或者小波湍流合成高精度流场细节。M.Lentine [19] 在高精度网格上计算流场数据,然后再将高精度网格流场数据降采样到对应的低精度网格上,在低精度网格中求解泊松方程,保证低精度网格上流场数据的无散条件,最后将其上采样到高精度网格,并在每个粗网格内局部调整流体速度场数据,保证其在高精度网格中的无散条件。前人的工作表明,这种类型的优化模拟方法确实减少了泊松方程求解的时间开销,但是目前还缺乏针对流体场数据设计的计算高效和准确的重采样方法。

1.2.2.4 模型缩减法

模型缩减的方法的核心思想是对流体的数据和计算模型降维处理，然后在低维度空间中求解方程，达到提高流体模拟速度的目的。Treuille [20] 提出一种实时的模型缩减方法，先使用离线的高精度模拟器对一个给定场景做预计算，并求解生成一组能表示流场数据特征的正交基函数。然后在实时的流体模拟计算过程中，先将流体速度场映射到基函数空间，再求解流体方程。由于基函数空间的维度远小于原计算模型空间的维度，故可大幅提高流体模拟的计算效率。文献 [21] 将分块的思想引入到上述算法中，先对场景进行分块，再在每个分块的对场景中采用模型缩减的方法进行模拟。但是这种方法不能灵活变换场景，并且大幅降低了计算模型的准确度。

1.2.3 过完备稀疏字典技术

压缩感知理论是 2006 年由 Donoho, Candes 等数学家提出的一个数学理论 [5] [4] [6], 该定理在诞生后的短短几年里，就很快在通信、声音、图像等领域成功应用，并取得了令人难以置信的突破。文献 [22] 结合稀疏编码技术和压缩感知理论，成功地识别出完全被噪声遮蔽，连人眼都无法辨认的图像。

近年来，基于压缩感知技术的过完备稀疏字典技术也成为了一个热门话题。过完备稀疏字典技术假设低—高精度信号之间的关系可以由其稀疏表示形式表示，而数据的稀疏表示模型也假设信号可以由一个预定义字典的很少量原子的线性组合表示，因此选择一个使信号稀疏化的字典是一个极其重要的问题。文献 R. Rubinstein [23] 描述了选择字典的两种方法：(1) 使用基于数据的数学模型建立一个稀疏字典；(2) 使用训练数据集学习一个训练字典。第一种方法基于谐波分析，对一个更简单的数学运算建模并根据该模型设计一个高效表示。如傅里叶字典根据平滑函数建模，小波字典根据含奇异点的分段平滑函数建模。该类字典具有不涉及字典矩阵乘法、快速隐实现的特点，但是该类字典使用的数学模型过于简单，不能很好地表示自然现象的复杂性。第二种方法假设复杂自然现象的结构可以从数据本身更直接地提取，这种直接提取的好处是可以更好地适应特定数据。 l^0 范数指矩阵中非 0 元素的个数，矩阵中非 0 元素越少，说明矩阵越稀疏，故 l^0 范数直观上可以表示矩阵的稀疏度。 l^1 范数指矩阵中各元素绝对值之和，是 l^0 范数的最优凸近似，故 l^1 范数也可以实现稀疏。近年来，基于训练数据集的字典方法受到稀疏表示理论影响，都集中于研究 l^0

和 l^1 范数,使得基于训练数据集的字典方法可以应用最新的稀疏编码技术提取数据的特征,实现得以简化。

过完备稀疏字典技术融合基于训练数据集的训练字典和基于数学模型的分析字典的优点,使用稀疏编码技术学习特定的训练数据,建立一个可以使训练数据足够稀疏化的字典。由于该字典拥有比原数据信号更多维度的基信号原子,故我们称该字典是过完备的。过完备字典技术指出,一个信号在其表示域可以表述成多种形式,能否选取最合适的表示取决于使用的字典和解码方法。1993年,文献[24]提出了一种基于冗余函数字典的新奇的分解方案;两年后,Chen, Donoho 和 Saunders 发表了一篇基于基追踪(Basis Pursuit)的分解算法[25],他们的工作奠定了使用字典的稀疏信号表示方法的基础。多年来,正交和双正交的字典表示方法因其简单性和有效性在信号处理领域被广泛应用,如小波去噪[26]。但是该类型的字典方法受限于其表征能力,于是产生了过完备字典技术的发展。

应用过完备训练字典的重构上采样方法以低精度信号为输入,根据离线生成的过完备训练字典分解计算出对应的稀疏表示,从而推断出原高精度空间信号。该类方法的重构效果对训练字典的依赖性很大,训练字典越完备,其重构出的结果越准确;训练字典对训练数据的依赖性也很大,使用的训练数据集越丰富,生成的字典也越完备。Yang 等人[27][28][7]将压缩感知技术应用到图像重构领域,达到了令人瞩目的效果;文献[29]采用类似的方法,将压缩感知技术应用到照相机的光场重构,也取得了较为理想的效果。近年来,基于稀疏编码技术的过完备训练字典技术和重构上采样技术也成为了各领域研究的一个热门话题,但是在流体动画领域,还没有任何使用感知技术和过完备训练字典技术的相关文献。

1.3 本文的主要工作及创新点

1.3.1 主要研究工作

本文借鉴流体模拟优化方法中的低—高精度重采样方法,将流体模拟中最为耗时的投影步骤放到低精度网格模拟,提高投影步骤求解泊松方程的计算效率。然后使用基于稀疏编码的过完备稀疏训练字典技术,将低精度网格流体速度场数据重构上采样到高精度网格空间,用于下一帧模拟计算,达到在尽量少的时间耗费下提供尽可能多的高精度流体细节的目的。

本文的主要研究工作包括如下部分：

- 通过学习复杂流体数据的稀疏表示和疏密样本数据之间的映射关系，生成适用于流体速度场的过完备训练字典。实际上，自然界的流体现象可以看作是由许多局部细微结构组成的，因此可以尝试将复杂流体数据用局部细微结构的线性组合来表示，这些局部细微结构可以从大量流体数据中采集、提取和存储，形成一个经验数据集。如果这样的一个经验数据集可以表示几乎所有的流体现象的局部细微结构，我们称其为过完备的训练字典；
- 研究流体疏密数据重构上采样方法。利用压缩感知理论中的稀疏逼近手段，探索一个适合复杂流体疏密速度场数据的重构上采样方法；
- 建立 2D 场景流体动画压缩重采样的高效计算框架。借鉴已有的低—高精度重采样方法，在高精度流场上计算对流和加外力步骤，然后将高精度流场数据降采样投影到低精度网格计算投影步骤，保证无散条件，再使用过完备稀疏训练字典，将低精度流场数据重构上采样到高精度网格的流体场中；
- 解决应用过完备稀疏字典的重构上采样方法到流体动画模拟中导致的流体形态改变、边界条件等问题。

1.3.2 本文创新点

目前，基于物理的计算机流体模拟技术已经较为成熟，但是如何快速高效地模拟流体动画而尽可能多且真实地保留住流体动画的细节，一直是一个研究的热点问题。本课题拟针对这样一个问题，探索稀疏编码理论在流体动画领域的适用性，对流体动画领域的研究有重要的意义。

本课题的研究内容十分新颖，主要包括如下创新点：

- 将基于稀疏编码技术的过完备稀疏训练字典技术引入到流体动画研究领域，学习复杂流体的局部细微结构，探索应用过完备训练字典的重构上采样技术在流体动画领域的可行性与适用性；

- 通过降采样矩阵与高精度稀疏字典的线性组合，计算生成适用于低精度流体速度场空间的稀疏字典，并根据该低精度空间的稀疏训练字典获得低精度速度场的稀疏表示形式；
- 基于稀疏编码技术，系统地探索复杂流体数据的稀疏表示形式，建立基于局部细微结构的稀疏表示形式，提出适用于流体动画的重构上采样方法与框架。

1.4 本文组织结构

本文共有六个章节，第一章绪论部分主要介绍了本课题的研究背景与国内外现状，后面的五个章节依次为：

第二章主要介绍流体动画物理模型 Navier-Stokes 方程组的推导过程及其在计算机图形学领域的基本求解方法，并在第二章的后面部分简要介绍基于稀疏编码技术的过完备训练字典技术要求解的问题。

第三章将会给出本文提出的基于稀疏过完备训练字典技术的流体重构上采样框架，并详细介绍该框架中的一些基本步骤的求解方法。

第四章主要介绍本文的重构上采样方法的整体框架，并详细描述本文提出的应用降采样矩阵的过完备训练字典方法及其重构上采样方法的具体实现过程。

在第五章中，我们将会给出大量的实验结果，探讨本文提出方法的可行性。首先，我们会在图像域验证本文提出的重构算法，确定其与双三次插值方法相比，能够重构出更多的细节效果之后，再将本文的重构算法应用到流体模拟领域，并与模拟器直接模拟生成的低-高精度流体动画、双三次插值重构上采样生成的流体动画比较，证明本文提出的算法确实能在一定程度上增加流体的细节。在实验章节的最后部分，我们还会给出本文提出的重构方法与框架的时间开销。

最后一章将会对本文的工作做一个总结，分析本文方法的局限性以及未来可能的研究方向。

第二章 流体模拟的基本方法与过完备训练字典技术

本文研究的内容是一个交叉性课题，主要包括应用重构上采样方法的流体动画计算框架和应用过完备稀疏字典技术的重构上采样方法。在介绍本文研究的流体动画计算框架和过完备稀疏字典方法之前，本章先介绍流体模拟的基本数学模型 Navier-Stokes 方程组和该模型求解的基本方法，并指出过完备稀疏字典技术重点研究的两个问题。

2.1 Navier-Stokes 方程组

计算机图形学最有趣的问题之一是类流体行为的仿真，并且，不同的领域，对流体模拟求解的目标要求也有所不同。在特效产业中，模拟流体动画的目的是如何产生令人信服的譬如烟雾、水和火等流体的外观和行为；在计算机动画领域模拟流体动画，我们更关心的则是动画的视觉效果，而不是求解的准确性。尤其对于烟的模拟而言，我们更关心烟动画中的小规模细节，而不是速度场的数值精度。在基于仿真的流体模拟领域，流体力学被作为标准数学框架在使用。科学家们一致表示，Navier-Stokes 方程式是模拟流体流动现象的一个很好的数学模型。

2.1.1 Navier-Stokes 方程组的描述形式

在流体力学中，Navier-Stokes 方程组描述了满足不可压条件的粘性流体，被称为世界上“最复杂的方程之一”。Navier-Stokes 方程组的名字记录了推导出该方程组的人的姓名，分别是 Claude Louis Navier 和 George Gabriel Stokes，通常也被简称为 N-S 方程组。可以写成如下形式 [30]：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-2)$$

其中, \mathbf{u} 表示流体的速度场。在欧拉网格方法中, 该速度表示流体经过每个固定的点空间时所具有的速度矢量。在 3D 情况下, \mathbf{u} 通常被写成 (u, v, w) 的形式, 分别表示 3D 空间标准坐标系下的 x, y, z 三个方向上的速度大小。

p 表示压强场, 在流体的内部, 每个欧拉网格的中心都有存储了一个压强分量。

t 代表时间。

ν 代表流体的粘性系数, ν 越大, 表示流体的粘性越大。

ρ 表示流体的密度。

\mathbf{g} 表示施加在流体上的外力合力产生的加速度, 这些外力包括重力、浮力等。大部分情况下, 流体只受重力的影响, 故在此处, 我们使用通常表示重力加速度的变量 \mathbf{g} 表示流体所受到的外力合力加速度。

∇ 是向量空间的偏导数, 如 $\nabla \mathbf{u}$ 表示速度场的偏导数。 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 表示 2D 空间的偏导, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ 则表示 3D 空间的偏导。另外, $\nabla \cdot \nabla$ 表示拉普拉斯算子。

2.1.2 Navier-Stokes 方程组的意义

Navier-Stokes 方程组对流体做了以下几个假设: 第一, 流体是连续的, 该假设指液体的内部不能包含空隙, 如雾状粒子的聚合、溶解的气泡等。第二, 所有涉及到的场都是可微的, 如压强场、速度场、密度场和温度场等。

Navier-Stokes 方程组的式 2-1 根据质量、动量和能量守恒的基本原理导出。我们可以把流体想象成一个粒子系统, 每个粒子代表一个小水珠。那么, 我们可以描述每个粒子的质量为 m , 速度为 \mathbf{u} , 体积为 V 。那么根据动量守恒定理, 我们可以得到如下方程式:

$$\mathbf{F} = m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (2-3)$$

假设粒子受到的来自流体系统以外的力只有重力, 表示为 $m\mathbf{g}$ 。那么我们只需要分析流体粒子来自于粒子系统中其他粒子的力。

首先是压力。流体在运动的过程中, 压力的作用会把高压区的流体推向低压区, 从而使得流体粒子在整体上始终保持均匀分布的趋势。图 2-1 画出了流场内部流体粒子受到的所有压力的示意图。从左边的图中, 我们可以看出流体粒子所受的压力来自四面八方。我们假设粒子每个方向上所受的压力都相等,

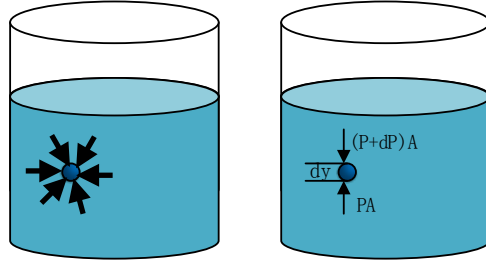


图 2-1 流体粒子受压力示意图

Fig 2-1 Illustration of how fluid particles are affected by pressure

根据图2-1右边的示例图片，可知流体粒子的压力只与其深度有关。为了简化模型，我们用压强梯度的负值 $-\nabla p$ 表示压强的不平衡效果，而 $(-\nabla p)V$ 表示粒子所有到的压力。

然后是粘滞力。粘滞力总是阻碍两个粒子之间的相对运动，并且相对运动越大，粘滞力越大。这里，我们直接给出粘滞力的表达式为 $V\mu\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$ 。其中， μ 为动态粘性系数，是流体自身的属性，通常是常量。故用重力、压力以及粘滞力表示方程式 2-3 中的外力 \mathbf{F} ，可得到流体运动的加速度方程：

$$m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = m\mathbf{g} - V\nabla p + V\mu\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2-4)$$

我们已知 $\frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ ，设变量 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ，上述方程式两边都除以粒子的质量 m ，则有：

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2-5)$$

展开速度场 \mathbf{u} 关于时间 t 的导数，即可得到方程式 2-1。

方程式 2-2 表示流体的不可压缩条件，而图 2-2 展示了流体不可压缩时的宏观表现，即压缩流体时，流体会保持其体积不变。从微观的角度讲，当我们说流体是不可压缩的时，指的是在微观时间段 Δt 内，流入与流出流体任意体积为 Ω 的流体表面的体积是相等的，即流体的体积变化速率为0，可以表示成如下形式：

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2-6)$$

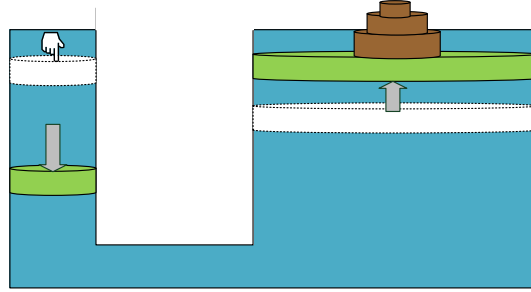


图 2-2 流体不可压示意图

Fig 2-2 Illustration of imcompressible condition

根据微积分基本定理，我们可以将上式转化为如下形式：

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-7)$$

由于上述方程式对于流体内部的任意体积 Ω 都是成立的，故只有当被积函数处处为0时，上述函数积分才能为0。当上述积分方程式的被积函数为0时，即可得方程式 2-2。

2.1.3 忽略粘性力作用

通常，在计算机动画模拟的数值计算中，会忽略掉粘性力这一项。因为相比较于其他作用力，粘性力的值通常是很小的。另外，在流体模拟的数值计算的过程中不可避免地会有数值耗散，而该数值耗散项的值的数量级与粘性力项的值的数量级比较接近，故可以近似认为数值耗散项替代了粘性力项的计算。并且从方程式 2-1中，我们可以看出，粘性力项的计算开销也比较大，忽略粘性力作用可以在很大程度上减少计算的开销。故流体模拟的一般方法求解的是如下形式的 Navier-Stokes 方程组：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g} \quad (2-8)$$

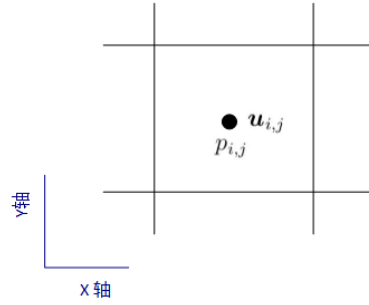


图 2-3 中心网格 2D 示意图
Fig 2-3 cells from 2D center grid

2.2 流体模拟的基本方法

根据绪论部分的介绍，可知目前主要的流体模拟方法主要有三大类，即欧拉网格法、拉格朗日粒子法和基于旋度的方法。本文主要研究基于欧拉网格方法的重构上采样框架在流体动画领域的应用，故本章的该部分将会简单介绍用欧拉网格方法求解 Navier-Stokes 方程组的基本框架。

2.2.1 网格介绍

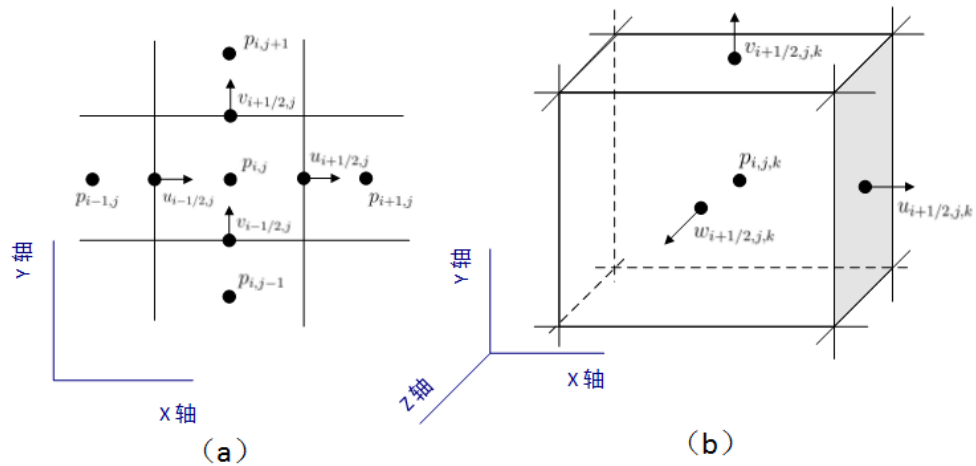


图 2-4 (a) 2D MAC 网格示意图；(b) 3D MAC 网格示意图
Fig 2-4 (a) one cell from the 2D MAC grid; (b) one cell from the 3D MAC grid

用欧拉方法求解流体动画时，需要对速度场离散化求解，即在网格上对其进行求解计算。最简单的网格模型是中心网格模型，该网格模型把所有的变

量都存储在网格的中心点上,如图 2-3 描述了中心网格在 2D 场景下变量的存储方式,其中, $\mathbf{u}_{i,j}$ 表示位置为 (i,j) 处的网格点的速度场矢量, $p_{i,j}$ 表示同一网格位置的压强场。但是被更为广泛使用的是 MAC 网格模型,由 Harlow 等人 [31] 提出。MAC 网格实际上是一个交错的网格,变量存储在网格的不同位置上,并且存储在不同位置的变量有不同的含义,如图 3-1 所示, (a) 和 (b) 分别描述了 2D 场景和 3D 场景下 MAC 网格各变量的存储方式,其中 p 是压力值, u, v, w 分别表示速度场的三个分量。相较于中心网格,MAC 网格的计算效率更高,并且更加稳定,故在欧拉网格方法中使用更为广泛。本文提出的流体模拟重构框架既适用于中心网格,也适用于 MAC 网格。

2.2.2 欧拉网格方法及其计算框架

Navier-Stokes 方程组方程组虽然看起来简单,但是因为方程式 2-8 存在非线性项,故直接求解非常困难。为了简化求解过程,通常会把 Navier-Stokes 方程组分解成三个部分求解,分别为对流、体积力和压力/不可压缩部分。分别列出如下:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (\text{advection}) \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{g} \quad (\text{body forces}) \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad \text{s.t.} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{pressure/incompressibility}) \quad (2-11)$$

上述三个方程式通常对应欧拉方法的三个步骤,即式 2-9 对应对流步,通常表示为 `advection`,该步骤把速度场 \mathbf{u} 对流一个时间间隔 Δt ; 式 2-10 对应外力步,表示成 `addForce`,表示外力合力作用对流体速度场的加速度;式 2-11 对应投影步,表示为 `projection`,该步骤保证前两步计算得出的速度场 \mathbf{u} 是无散的,同时还保证流体速度场满足固体边界条件。

在这三个部分中,我们需要保证对流是在无散速度场中进行的,故 `advection` 步骤的运行需要以 `projection` 步骤的输出为前提。综上所述,可以归纳出欧拉网格方法的基本运算步骤如算法 1 所示。

根据 Navier-Stokes 方程组的三个分解方程式,可以看出流体模拟的三个步骤中,最为耗时的是投影步骤。该步骤实际上求解的是一个泊松方程,Stam [32] 使用了经典的高斯赛德尔迭代方法求解, Foster 等人 [33] 采用了预处理共轭梯

Algorithm 1 流体模拟的基本框架伪代码.

```

1: initialize a divergence-free velocity field  $\mathbf{u}^{(0)}$ ;
2: for every time step  $n = 0, 1, 2, \dots$  do
3:   Do the advection:  $\mathbf{u}^A = \text{advection}(\mathbf{u}^n, \Delta t)$ .
4:   Do the addForce:  $\mathbf{u}^B = \mathbf{u}^A + \Delta t \mathbf{g}$ .
5:   Do the projection:  $\mathbf{u}^{n+1} = \text{projection}(\Delta t, \mathbf{u}^B)$ .
6: end for

```

度法 (ICPCG) 求解, ICPCG 因其优秀的性能, 成为了求解投影步骤的主流。但是投影步骤仍然是流体模拟方法的瓶颈步骤。

在 Stam [9] 提出了允许大时间步长的无条件稳定的半拉格朗日方法求解对流步骤之后, 很多人针对如何提高对流步骤数值解的精度提出了一些改进方案, 如 MacCormack [34], BFECC [35] [36], QUICK [37] 等对流方法。这些对流方法在一定程度上丰富了流体动画的细节, 并且相较于投影步骤, 其计算开销可以忽略不计。

2.3 基于稀疏编码的过完备稀疏字典技术

近几年来, 研究使用稀疏编码技术获取信号的稀疏表示形式成为了一个热门话题, 并应用到图像去噪 [26]、图像修复、图像超分辨 [28] 等许多图像处理领域。过完备的稀疏字典包含信号的特征基原子, 可以通过字典中的很少一些原子的线性组合表示原信号 [38]。通常来讲, 基于稀疏编码技术的稀疏字典方法主要集中于求解两个问题: (1) 训练合成过完备稀疏字典的方法; (2) 执行稀疏分解及性能分析的算法。

2.3.1 训练过完备稀疏字典

字典学习的方法可以描述成如下问题 [38]: 给定一个信号的集合 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$, 这些信号的集合可以根据一个未知的字典 \mathbf{D} 获取其稀疏表示形式, 我们要如何才能找到这个未知的字典 \mathbf{D} ? 通常, 字典 \mathbf{D} 必须是唯一的, 并且能够尽可能逼近地表示所有给定信号 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 。

设 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{k \times n}$ 是具有 k 个原型信号基原子的过完备字典, 信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 可以由字典中原子的稀疏线性组合表示, 表示成 $\mathbf{x} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$, 或者近似表示成 $\mathbf{x} \approx \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$, 其中, 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是信号的稀疏表示系数。当我们称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是信号的稀

疏表示时, 指向量 α 中只有很少的非零元素。通常使用 l^p 范数求解上述近似问题, $p = 1, 2$ 或者 ∞ 。在构造稀疏字典的方法中, 通常取 $p = 2$, 故训练过完备稀疏字典的方法可以表示成如下方程式:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|x - D\alpha\|_2 \leq \epsilon \quad (2-12)$$

提取信号的最稀疏表示是一个 NP-hard 问题。近几年的研究中, 出现了一些较为高效的近似分解算法, 如 K-SVD [39] 算法、标记特征搜索 (Feature-sign search) [40] 算法等。这些算法在求解的过程中, 都需要假定待求的稀疏字典是已知并且固定的, 然后再通过迭代的方式计算出最优解。

目前, 学习过完备稀疏字典的学习方法主要集中于在一个单一特征空间内为各种恢复、识别的任务训练过完备稀疏字典。然而, 在很多应用和实际场景中, 却有两个特征空间, 如超分辨技术中的高精度和低精度信号空间。学习这样的一对低-高精度稀疏字典, 无论是在信号处理还是在计算机视觉中, 都有很多应用, 比如压缩感知 [4] 等。Yang [7] 等人提出了学习低清晰度和高清晰度图像 patch 的联合字典学习方法, 这个方法将两个特征空间联接起来, 然后将其转化为标准的单特征空间稀疏编码问题, 故也可以通过上述提到的近似算法求解。本文中, 我们希望重构上采样低精度网格速度场数据到高精度速度场空间, 因此也需要学习一对稀疏字典。

2.3.2 信号的稀疏分解问题

设 $D \in \mathbf{R}^{n \times k}$ 是具有 k 个原型信号基原子的过完备字典, 并假设信号 $x \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 可以表示为一个这些元素的稀疏线性组合, 也就是说, 信号集合 x 可以写成 $x = D\alpha_0$ 的形式, 其中 $\alpha_0 \in \mathbf{R}^{k \times 1}$ 是稀疏表示系数。在图像超分辨环境下, 我们可能只知道一小组由 x 表示的测量值 $y \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 组成的集合:

$$y = Lx = LD\alpha_0 \quad (2-13)$$

其中, $L \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m < n$, L 代表降采样等操作, x 表示高精度信号原子, 而 y 是它的低精度版本。信号的稀疏分解问题求解的问题是, 给定低精度信号 y , 根据过完备稀疏字典 D 求解出低精度信号 y 的稀疏表示形式 α_0 。用公式的形式表示信号的稀疏分解问题, 可写成如下形式:

$$\min_{\alpha_0} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{LD}\alpha_0\|_2 \leq \epsilon \quad (2-14)$$

上述公式也是一个 NP-hard 问题，故无法精确分解出低精度信号 \mathbf{y} 的稀疏表示形式 α_0 。但是，针对上述公式，目前已经提出了很多的近似解法，如追踪匹配 (Matching pursuit) [24]、基追踪 [25]、FOCUSS [41] 以及由这些算法衍生出的其他近似算法等。追踪匹配算法的核心思想是使用贪婪算法顺序地选取最优的字典基原子，这类算法比较简单；基追踪算法通过将稀疏系数 α 的 l^0 范数约束条件转换成 l^1 范数的最凸解问题对原信号做分解计算；FOCUSS 算法与基追踪算法的思想十分类似，但不同的是，FOCUSS 算法使用 l^p 范数约束替换原公式的 l^0 范数约束，其中 $p \leq 1$ 。

本文应用基于稀疏编码技术的稀疏字典方法也主要集中于求解上述两个问题，第四章将会详细介绍本文的解决方案。

2.4 本章小结

本章介绍了流体动画技术的数学模型 Navier-Stokes 方程组，并且详细地给出了方程组的推导过程以及每个部分的具体含义。同时，本章还介绍了欧拉方法常用的网格模型，以及欧拉方法的基本框架。流体模拟的一般方法将流体的数值计算分成了三个步骤，对流、加外力和投影步骤，其中，对流和加外力步骤相较于投影步骤，其时间开销可以忽略不计。为了解决在提高求解网格的精度时，投影步骤的计算过于昂贵这一问题，引入了本文在第三章节将要提出的应用过完备稀疏字典技术的流体模拟重构上采样框架，将高耗时的投影步骤放到低精度网格上去计算，从而达到减少投影步骤时间耗费的目的。

本章还简单地介绍了基于稀疏编码的过完备字典技术，以及该技术主要集中在求解的两个问题，即稀疏字典的学习方法和信号的分解算法。学习一对过完备稀疏字典，是本文的一个重点内容。在本文的第四个章节将会详细地介绍 Yang 提出的联合双字典方法，以及本文对该重构方法的改进，达到提高重构结果准确性的目的。

第三章 应用重构上采样方法的流体动画基本框架

本文第二章详细介绍了流体模拟的基本数学模型以及欧拉网格方法求解流体动画的基本计算框架，是本文研究的应用重构上采样方法的流体动画计算框架的基础知识。本章对欧拉网格方法的基本计算框架进行改进，提出了一个应用重构上采样方法的流体动画基本计算框架。

3.1 流体动画疏密数据的特点

低精度网格和高精度网格的流体场，都是由其局部细微结构组成，并且不同网格精度的流体场，其整体形态相似，只有局部细微结构不同。低精度网格流体场的信息量小于高精度网格流体场的信息量，我们需要一个经验上的数据集来弥补低—高精度流体场信息量上的差，表示两者之间的联系。而这个经验数据集，可通过学习大量的流体场数据获得。待解决的问题是，如何利用这个经验数据集来建立流体低—高精度样本之间的映射关系并加以利用？建立流体低—高精度样本之间的映射关系，并利用所建立的流体低—高精度样本之间的映射关系，就可以分解低精度流体场数据的稀疏表示，再映射到高精度流体场空间。进一步待解决的问题是，如何从低精度流体场快速映射到高精度流体场？如何建立高效的流体动画的重构上采样框架？

拟针对流体动画低—高精度流体场数据，由于数据之间有一定的相关性，满足了可压缩性信号的特点；而且整个流场数据常常存在零样本点，满足稀疏信号的定义。因此，流体场数据能满足压缩感知理论的信号稀疏的前提条件，适合运用基于压缩感知理论的方法进行稀疏重构上采样。为了建立一对经验上的数据集来表示流体动画低—高精度数据之间的关系，并将其利用到重构上采样方法中，本文收集大量的流体高精度网格上的速度场数据，并训练生成表示高精度网格速度场数据特征的训练字典，然后将该训练字典应用到流体动画低精度速度场数据与高精度速度场数据的重构上采样步骤中。本文的第四章将会详细介绍该代表低—高精度流体数据的映射关系的训练字典的方法以及将低精度流体场数据向高精度流体场映射的方法。

为了将过完备的训练字典技术应用到流体动画的疏密数据重构上采样框架

中,并在尽可能少的时间耗费的情况下,尽可能多地模拟出高精度流体动画的细节,本文提出了一个基于欧拉网格模拟方法的流体动画重构上采样计算框架,本章的余下部分将会详细介绍该框架的内容。

3.2 流体动画的重构上采样框架

在流体动画领域,欧拉网格方法和拉格朗日粒子法都是比较常用的基本模拟方法。相较于欧拉网格方法,拉格朗日方法具有计算量小、模拟速度快等优点。但是在采样数据时,拉格朗日方法的数据来自于流体系统中大量运动的粒子,得到的每一帧流场数据为运动粒子在流体系统中对应位置上的点的数据,故不能保证每次都能在同一位置采样到流场数据。而欧拉方法的采样点对应于空间固定位置设置的大量网格点,故得到的每一帧流场数据为固定位置上的变量值。其采样特征不仅适用于实际采样点得到的数据,而且其数据结构形式适用于过完备稀疏字典重构上采样方法使用的数据结构。故本文使用欧拉网格方法作为流体动画模拟的基本框架。

欧拉网格法是流体动画领域最为常用的方法,该方法的模拟效果主要依赖于网格精度、对流方法的精度和投影操作收敛条件的大小,其中网格精度具有决定性的作用。当模拟精度提高一倍时,现有的精确模拟方法投影的计算耗时以 2 的 3 次方为倍数增长。针对欧拉方法提出的低—高精度重采样的优化方法的主要思想是将流体模拟过程中耗时最为显著的投影步骤放到低精度网格模拟,然后再使用上采样方法将低精度网格的流场数据映射到高精度网格。目前,该方法可以有效地加快流体动画模拟的速度,但是现有的方法都缺乏高效准确的重采样理论和方法的支持。为了能充分利用过完备训练字典重构上采样方法的特点,同时尽量减少投影步骤的耗时,本文借鉴低—高精度重采样方法,在投影步骤求解泊松方程之前,将高精度的流体速度场数据投影到对应的低精度网格中,这样可以在低精度网格空间求解泊松方程。计算泊松方程,保证了流体的无散条件后,再利用过完备训练字典方法将低精度网格的流体速度场数据重构上采样到高精度空间,在高精度网格空间完成对流和加外力步骤。这样可以大大提高求解泊松方程的效率,进而整体上加速流体动画模拟的计算效率。图 3.2 给出了本文的基于过完备训练字典方法重构上采样的流体模拟基本框架。

观察框架图 3.2 可以看出,本文方法的对流和加外力步骤都是在高精度网格完成的,只有高耗时的投影步骤是在低精度网格求解泊松方程的。因为计算对



图 3-1 流体动画重构上采样框架

Fig 3-1 (a) The simulation framework based on up-sampling and reconstruction

流步骤和加外力步骤的时间相较于投影步骤，可以忽略不计。但是在高精度网格空间计算对流步骤和投影步骤，能够获得更多的流体细节。而投影步骤在高精度网格上模拟，虽然也能产生大量的细节，但是时间开销过大。该框架旨在耗费尽量少的时间开销的情况下，尽可能多地模拟出流体的细节。

本章该部分的余下部分会详细介绍对流步骤和投影步骤的一般解决方案，流体速度场的降采样和重构上采样步骤将会在第四章进行详细介绍。

3.2.1 对流

流体基本步骤中的对流部分，求解的是在一个很短的时间间隔 Δt 内，流体沿其速度场对流一定距离后的各变量的变化。在计算机图形学领域，通常会根据对流部分的方程式的物理含义来求解该步骤。目前，针对对流操作已经提出了很多种高效的求解方法，并且对流过程的求解技术也已经趋于成熟。半拉格朗日方法是一种较为简单并且自提出后就被广泛使用的方法，为了提高半拉格朗日方法只有一阶精度的缺点，MacCormack 方法对其进行了一些改进。半拉格朗日方法是求解对流步骤的基本方法，而 MacCormack 方法是后来针对半拉格朗日方法提出的改进方法的一种代表，在本文的实验中，我们主要应用了半拉格朗日方法和 MacCormack 方法实现对流，下面的内容将会简单介绍这两种方法的思想及实现。

3.2.1.1 半拉格朗日方法

拉格朗日方法将流体当作一个粒子系统来处理，半拉格朗日方法借鉴了拉格朗日方法的思想，从粒子的视角看待流体，但是同时也借鉴了欧拉方法的网格思想，通过后向追踪流体流过固定位置时的物理量更新当前位置物理量的值，故称该方法为半拉格朗日方法。图 3-2 给出了半拉格朗日方法后向追踪的示意图。图中变量 $p(\mathbf{x}, t)$ 表示粒子随着时间的运行轨迹。

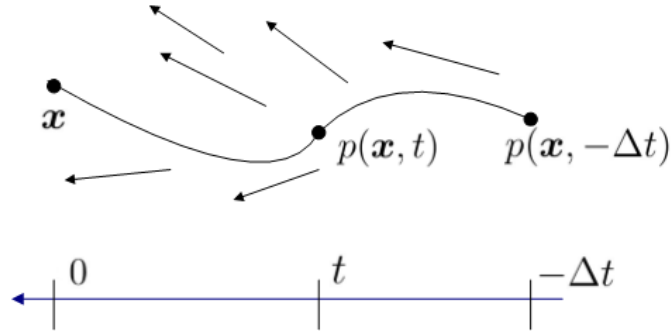


图 3-2 半拉格朗日对流方法示意图

Fig 3-2 Illustration of semi-Lagrangian advection method

根据图中所示，要求点 x 处的速度场 u ，后向追踪的思想是向后追踪一个时间间隔 Δt ，找到在 Δt 时间段前粒子的位置 $p(x, -\Delta t)$ 。根据欧拉网格方法的网格特性，已知粒子所处的位置，即获得其网格位置处存储的速度场等属性值。而又根据拉格朗日视角，对流步骤求解的方程式代表的含义是粒子携带的速度场是不会随着时间变化。故可以用粒子在 Δt 时间段前的速度场的旧值更新当前位置 x 处的粒子的新值。但是，通过后向追踪计算得出的 Δt 时间段前粒子的位置 $p(x, -\Delta t)$ 有时会落在网格的边界以外，在这种情况下，我们采取的解决方案是简单地对点 x 处的旧值做插值计算。下面的内容将会给出半拉格朗日方法的详细求解过程。

首先，我们设流体粒子当前的位置为 x_{cur} ，在一个时间段 Δt 之前，它的位置为 x_{pre} ，在半拉格朗日方法中，我们使用一步前向欧拉方法来估算时间段 Δt 之前粒子所处的位置 x_{pre} ：

$$x_{pre} = x_{cur} - \Delta t u_{cur} \quad (3-1)$$

其中， u_{cur} 是流体在当前网格位置处的速度，因为粒子的速度不会随着时间的变化而变化，故此处我们可以用当前位置处的速度 u_{cur} 前向追踪计算时间段 Δt 之前粒子所处的位置。

计算得到 Δt 之前粒子的位置 x_{pre} 后，因为在大多数情况下，点 x_{pre} 都不会落在网格区域内，故我们通常需要对临近网格的旧值 u^n 做插值计算求得一个较好的近似值。此处我们设做插值计算的函数表示为 *interpolate*，综上所述，

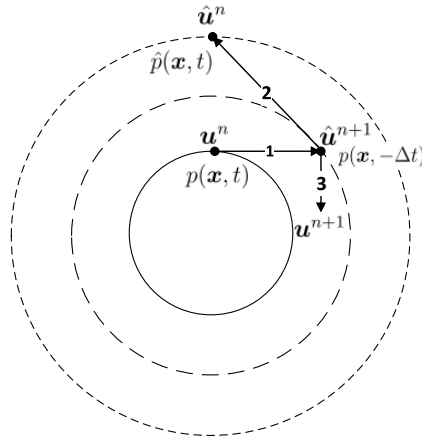


图 3-3 MacCormack 对流方法示意图

Fig 3-3 Illustration of MacCormack advection method

可归纳出半拉格朗日方法的计算公式：

$$\mathbf{u}_{cur}^{n+1} = \text{interpolate}(\mathbf{u}^n, \mathbf{x}_{cur} - \Delta t \mathbf{u}_{cur}^n) \quad (3-2)$$

半拉格朗日方法是一种无条件稳定的数值算法，其算法具有简单易懂、可快速实现、计算高效等特点。Stam 在 1999 年提出的半拉格朗日方法，树立了流体模拟基本方法的一个里程碑。但是该方法求解的结果只有一阶的数值精度，故存在较为严重的数值耗散问题。

3.2.1.2 MacCormack 方法

MacCormack [42] 方法由 MacCormack Robert 提出，是一种双曲型偏微分方程的数值解法的解决方案。使用 MacCormack 方法求解欧拉网格方法的对流步骤，可分为两个部分，即后向追踪的预测步骤和前向追踪的修正步骤。其中，后向追踪的预测步骤与半拉格朗日方法的求解方案类似，为了克服半拉格朗日方法求解的结果只有一阶数值精度的缺点，MacCormack 方法又提出了第二步前向追踪的修正步骤。对流体速度场进行修正之后的解决方案可以达到二阶数值精度，而在计算量上只增加了一个修正步骤，也就是计算开销也只有半拉格朗日方法的两倍。MacCormack 方法能够模拟出比半拉格朗日对流方法多很多的细节，并且计算开销也不大，在流体动画领域被广为使用。

图 3-3 所示方法为 Selle [34] 在 2007 年提出的一种基于 BFECC 对流方法的无条件稳定的 MacCormack 方法。图中的带箭头的线段 1 表示向追踪的预测步骤。设半拉格朗日对流方法表示为 $A(\mathbf{u})$ ，该步骤对位于当前位置点 $p(\mathbf{x}, t)$ 处的粒子的速度场 \mathbf{u}^n 做一次对流计算，可计算得出点 $p(\mathbf{x}, -\Delta t)$ 处的粒子在时间段 Δt 之前的速度 $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ 如下方程式所示：

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = A(\mathbf{u}^n) \quad (3-3)$$

修正步骤在图 3-3 中表示为线段 2 和线段 3。观察线段 2，可知该步骤表示的含义是以时间段 Δt 之前的粒子的速度场和位置 $p(\mathbf{x}, -\Delta t)$ 为起点，前向追踪 Δt 时间段之后粒子所在的位置 $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ 。与半拉格朗日方法类似，此处计算生成的粒子所处的位置 $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ 往往也不会落在网格区域内，故我们也需要对其进行插值计算，才能生成该位置出的速度 $\hat{\mathbf{u}}^n$ 。设第二步前向追踪与插值的结果表示为 $A^R(\mathbf{u})$ ，那么修正步骤的方程式可以表示为：

$$\hat{\mathbf{u}}^n = A^R(\mathbf{u}^{n+1}) \quad (3-4)$$

由步骤 2 计算出的粒子所处的位置 $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ 为估算的粒子当前位置，可认为其与粒子当前所处的实际位置之间的差值 $p(\mathbf{x}, t)$ 为第一步后向追踪步骤的计算误差，表示成 $e = (\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n)/2$ ，那么当前位置 $p(\mathbf{x}, t)$ 处的速度场可由下列式子计算得出：

$$\mathbf{u}^{n+1} = A(\mathbf{u}^n) - e = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - e \quad (3-5)$$

对上述式子做整理变换，最后可得更新速度场 \mathbf{u}^{n+1} 的计算公式如下所示：

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} + (\mathbf{u}^n - \hat{\mathbf{u}}^n)/2 \quad (3-6)$$

3.2.2 投影

观察第二章对流方程式 2-9 和加外力方程式 2-10，可以看出这两项的计算不能保证流体的不可压缩条件。故我们需要一个额外的步骤，将对流和加外力后的速度场投影到无散空间，而投影步骤实现的就是速度场数据的无散约束条件。但是，观察方程式 2-11，可以看出该方程式的求解不仅包含未知量速度场 \mathbf{u} ，还包含未知量压强场 p ，相较于对流和加外力步骤，投影步骤的求解过程要

复杂很多。

首先，我们需要在 2D 场景下的 MAC 网格中对速度场做离散化，根据方程式 2-11 的压力项公式，可以得到下面的速度场离散形式：

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n - \Delta \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \quad (3-7)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^n - \Delta \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta x} \quad (3-8)$$

其中， Δx 表示 MAC 网格单元的宽度。观察方程式 3-7 和方程式 3-8，我们知更新速度场，需要先计算出包含流体的网格单元中心位置处的压强场。

另外，我们还可以根据方程式 2-11 的不可压缩条件推导的公式离散流体的速度场。在 2D 场景下的 MAC 网格中根据不可压缩条件离散化流体的速度场，有如下表示形式：

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (3-9)$$

将上述方程 3-7 和 3-8 代入到方程式 3-9 中，并对其进行整理合并，我们有：

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{4p_{i,j} - p_{i+1,j} - p_{i,j+1} - p_{i-1,j} - p_{i,j-1}}{\Delta x^2} \right) \\ = - \left(\frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

观察方程式 3-10，可以看出其在表现形式上近似于泊松问题方程式 $-\Delta t / \rho \nabla \cdot \nabla p = -\nabla \cdot \mathbf{u}$ 。

但是，直接只用上述方程式，只能处理流体内部速度场数据的无散条件。而在流体模拟的实际应用场景中，往往会存在多种类型的边界条件，如在流体内部运动的物体与流体的边界、流体的自由表面（尤其是水与空气的接触面）以及流体的包围边界等。当考虑到边界条件时，即将上述方程式应用到流体的边界区域时，需要区分压强的不同边界条件。在此处为了方便讨论，我们可以简单地将网格单元分成流体单元、固体单元或者气体单元，更复杂的分类模型需要增加部分包含流体或部分包含气体等的单元分类，但是在本章节的讨论中，我们暂不考虑。

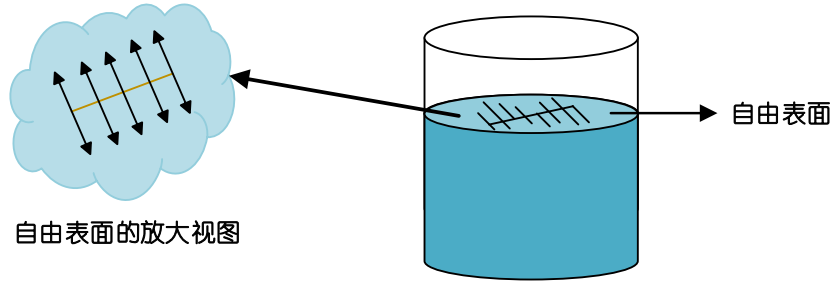


图 3-4 水的自由表面示意图

Fig 3-4 Illustration of free-surface of liquid

在水动画的模拟计算中，自由表面边界是一类相对简单的边界条件，如图 3-4 所示。通常，我们使用一种很简单的方法来标记这种边界条件，即将流体外部的网格单元的压强全部设置为 0，我们称这样的边界为 **Dirichlet** 边界。

更复杂一点的边界是固体边界。这种边界条件有多种情况，如在液体内部运动或者静止的物体表面与液体接触的部分等。在这些边界处，设存储的速度分量为 $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ，其中，变量 $\hat{\mathbf{n}}$ 表示单位法向量。这样的边界在求压强梯度时，需要保证边界条件 $\mathbf{u}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ 。通常，称这样的边界为 **Neumann** 边界条件。假设网格单元 (i, j) 表示流体单元，而网格单元 $(i + 1, j)$ 表示固体单元，那么速度 $u_{i+1/2, j}$ 可以用下面的方程式更新：

$$u_{i+1/2, j}^{n+1} = u_{i+1/2, j}^n - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1, j} - p_{i, j}}{\Delta x} \quad (3-11)$$

因为 $u_{i+1/2, j}^{n+1}$ 是固体单元，故可用固体运动的速度变量 $u_{neumann_solid}$ 表示。将 **Neumann** 边界条件代入到方程式 3-10 中，可得：

$$\frac{\Delta t}{\rho} \frac{3p_{i, j} - p_{i-1, j} - p_{i, j-1}}{\Delta x^2} = - \left(\frac{u_{neumann_solid} - u_{i-1/2, j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i, j+1/2}^n - v_{i, j-1/2}^n}{\Delta x} \right) \quad (3-12)$$

对上述方程式进行整理，有：

$$3p_{i, j} - p_{i-1, j} - p_{i, j-1} = - \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (u_{neumann_solid} - u_{i-1/2, j}^n + v_{i, j+1/2}^n - v_{i, j-1/2}^n) \quad (3-13)$$

在逐帧迭代求解上述方程式的过程中，当前帧的速度场 \mathbf{u}^n 和 Neumann 边界速度 $u_{neumann_solid}$ 均可当作已知值，观察上式可以看出，该方程式只有一个未知压强变量场 p ，故我们可以通过上述方程式求解 MAC 网格中心位置的压强场，计算得出压强场后，即可根据方程式 3-7 求出流体下一帧的速度场。

在流体模拟领域，通常会将方程式 3-13 转换成相应的矩阵的形式：

$$\mathbf{A}p = \mathbf{d} \quad (3-14)$$

其中， \mathbf{A} 是一个对称正定的稀疏矩阵，与网格中的边界的分布相关。 p 是压强场， \mathbf{d} 表示方程式 3-13 的右边部分。观察求解压强场的矩阵方程式可以看出，该方程式为一个线性方程式，并且形式十分简单，可以直接求解。但是，在流体模拟的计算中，由于网格精度比较高，导致矩阵 \mathbf{A} 往往很大，从而使得方程式 3-14 的计算开销也很大。事实上，投影步骤的高耗时也是因为求解式 3-14 造成的。目前，已经出现了一批成熟的求解上述方程式的算法，如传统的 PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) solver 以及由 PCG 扩展出的 Multigrid PCG [43]、ICPCG 等，这些方法可以较为高效地模拟求解投影步骤，但是针对大规模的流体动画，其时间耗费还是非常大。

3.3 本章小结

本章结合流体动画低高精度流体场数据的特点，提出了本文的应用低—高精度流体场数据重采样步骤的流体动画计算框架，并详细介绍了该计算框架的对流步骤和投影步骤。本章还详细介绍了半拉格朗日对流方法和 MacCormack 对流方法，并指出半拉格朗日方法存在求解精度只能达到一阶的问题，MacCormack 方法是对半拉格朗日方法的改进，在只提高一倍计算开销的前提下，达到二阶的精度数值解。

在本文提出的流体动画基本框架中，对流步骤和加外力步骤在高精度网格中计算，只有投影步骤是在低精度网格中求解的，这样可以有效地减少投影步骤的计算开销，而又不丢失对流和加外力步骤求解结果的数值精度。

第四章 基于过完备字典技术的重构上采样方法

本章先介绍本文的应用过完备稀疏字典技术的重构上采样方法的计算框架，引出过完备稀疏字典方法重点研究的两个问题，并指出这两个问题之间的联系。再针对这两个问题，详细介绍本文提出的解决方案。

4.1 应用过完备字典技术的重构上采样方法的计算框架

根据第三章流体重构的上采样框架图 3.2，本章的重构上采样方法要实现的内容是将低精度网格的速度场数据还原到对应的高精度网格上。在图像处理领域，有很多针对图像做重构上采样的方法，其中相对简单并且被广为使用的方法有传统的双三次插值、双线性插值、邻居嵌入算法 [44] 等，这类方法具有简单、易实现的特点，但重构的效果不是很理想。后来，出现了一批基于机器学习的图像超分辨率算法，如基于 Example 的学习 [45] [46] 算法和基于稀疏编码的过完备字典学习算法等。

基于 Example 的学习算法可以较好地重构出高精度图像的细节，特别是 Yang 在 2013 年提出的基于 In-Place Example Regression [47] 的快速超分辨率算法，作者指出该算法不仅有较快的重构速度，而且几乎不会引入人工痕迹和模糊效果。该算法的核心思想是在重构上采样时，先用双三次插值的算法放大低精度图像 patch 的低频信号，根据低精度图像的低频信号原位找到对应的高精度图像 patch 所在的位置，再通过一阶回归算法，提取低精度图像的低频信号与高频信号之间的关系和高精度图像的低频信号来预测高精度图像高频信号部分。又因该算法在处理每个 patch 时，计算的是取重叠像素后的多个 patch 之间的平均值，故具有较好的平滑性。

基于过完备稀疏训练字典技术的图像超分辨率方法假设直接从数据中提取其表示形式可以更好地重构出自然现象的复杂数据结构。该算法以低精度图像为输入，以 patch 为单位处理图像，获取其稀疏表示形式，然后再与高精度过完备稀疏字典线性组合，达到重构高精度图像的目的。本文利用基于过完备稀疏字典技术可以更好地适应特定的数据这一特点，学习一对能够表示流体低—高精度速度场数据对应关系的过完备稀疏训练字典，并重构上采样低精度速度场

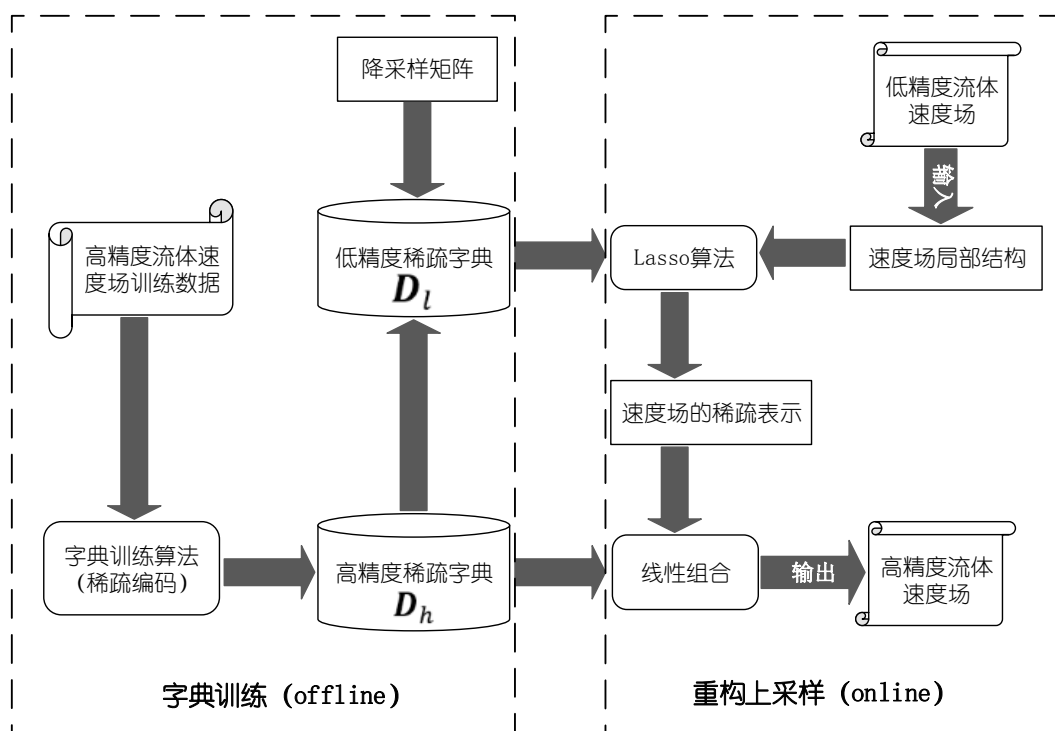


图 4-1 过完备字典技术的整体框架

Fig 4-1 The whole framework for over-complete dictionaries

到高精度网格中。图 4-1 为本文的重构算法框架图。

从框架图可以看出，该框架主要分为两大部分，即应用过完备稀疏字典技术的重构上采样部分和基于稀疏编码技术的过完备字典的训练部分，其中，过完备字典的训练是一个离线训练的过程，重构上采样方法以低精度网格的速度场数据和离线生成的低精度过完备稀疏字典为输入，使用基于稀疏编码技术的分解算法获得流体速度场的稀疏表示，再线性组合流体的稀疏表示和高精度稀疏字典，即可恢复高精度网格的流体速度场。本章的余下部分将会详细介绍过完备字典的训练过程和过完备字典的重构上采样方法。

4.2 过完备字典的训练

通常来说, 对于一个信号向量 $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, 如果我们可以通过线性组合集合 $\mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^{n \times k}, i = 1, \dots, n$ 中很少的一些原子, 达到尽可能近似地重构出原信号 $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 的目的, 我们称这样的一个集合 \mathbf{d}_i 为过完备稀疏字典。

学习一对过完备稀疏训练字典, 是本文研究的一个重点内容。一对过完备字典可以弥补低—高网格精度的流体速度场数据之间的信息差, 在流体速度场数据的重构上采样算法中起到关键性的作用。在图形图像领域, Mairal 和 Bach [48] [49] 等人提出了基于稀疏编码技术的快速在线字典学习方法, 并发布了求解各种稀疏近似问题的优化工具箱; Yang 等人在图像超分辨领域提出的联合训练字典方法, 将高精度图像降采样到低精度空间, 再将低—高精度信息放到一个向量中, 使用稀疏编码技术 [40] 训练生成一对过完备的稀疏字典。本文借鉴 Yang 的联合训练字典方法重构上采样流体速度场数据, 下面的问题描述部分将会详细给出联合双字典技术求解的问题。

4.2.1 联合训练字典的问题描述

假设有两对特征空间: 潜在空间 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{d_1}$ 和观察空间 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{d_2}$, 观察空间的信号是稀疏的, 即信号可通过某一字典求得其稀疏表示形式。潜在空间的信号是我们希望恢复或者重建的信号。存在映射函数 $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ (不需要是线性的, 并且可以是未知的), 根据关系 $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$, 把空间 \mathbf{X} 中的信号 \mathbf{x} 映射到与之一致的空间 \mathbf{Y} 中的信号 \mathbf{y} 。此处, 我们假设映射函数是近似内射的, 否则不能从 \mathbf{Y} 推断 \mathbf{X} 。

成对空间的信号恢复问题类似于压缩感知问题。在压缩感知的内容中, 观察空间和潜在空间由一个线性随机映射函数 F 连接起来。字典 \mathbf{D}_x 通常被选来做数学形式上定义的基 (比如小波), \mathbf{D}_y 则是直接利用线性映射 F 从 \mathbf{D}_x 中获得的。

我们的问题是分别为空间 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 找一对字典 \mathbf{D}_x 和 \mathbf{D}_y , 这样给定任何信号, 我们都可以用它计算出给定信号关于字典 \mathbf{D}_y 的信号稀疏表示, 再线性组合字典 \mathbf{D}_x 恢复与之一致的潜在信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ 。在形式上, 一对理想字典 \mathbf{D}_x 和 \mathbf{D}_y , 对于任何信号对 $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i\}$, 都应满足下列方程组:

$$\alpha_i = \min_{\alpha_i} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{D}_y \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha_i\|_1 \quad (4-1)$$

$$\alpha_i = \min_{\alpha_i} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{D}_x \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha_i\|_1 \quad (4-2)$$

其中 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 是 \mathbf{X} 中的训练采样, $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^N$ 是 \mathbf{Y} 中关于 $\mathbf{y}_i = F(\mathbf{x}_i)$ 的训练采样, $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ 是信号的稀疏表示。在一些稳健的情况下, 根据方程 4-3 推导的稀疏表示 α 可以被用来很好地恢复 \mathbf{x} 。然而, 在更一般的场景中, 即映射函数 F 未知并且可能是非线性时, 则不可以应用压缩感知定理。

4.2.2 联合训练字典方法

在图像超分辨领域, Yang 提出的联合稀疏字典技术取得了不错的成果, 本章的该部分将会简单介绍该字典训练方法在流体速度场的应用。

给定一组高精速度流体速度场训练数据对 $P = \{\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^l\}$, 其中, \mathbf{u}^h 表示高精度网格空间的速度场训练数据, \mathbf{u}^l 表示相应的使用映射函数 F 计算出的低精度网格空间的流体速度场训练数据。根据问题描述部分 4.2.1 给出的稀疏训练字典应该满足的关系, 我们可以写出流体速度场稀疏字典需要满足的方程组:

$$\alpha = \min_{\alpha} \|\mathbf{u}^l - \mathbf{D}_l \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (4-3)$$

$$\alpha = \min_{\alpha_i} \|\mathbf{u}^h - \mathbf{D}_h \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (4-4)$$

其中, \mathbf{D}_l 表示低精度稀疏字典, \mathbf{D}_h 表示高精度稀疏字典, α 表示流体速度场数据的稀疏表示。

如果单独求解两个特征空间的稀疏字典, 不能表示低-高精度流体速度场数据之间的对应关系。并且对同一信号的低-高精度训练数据, 其稀疏表示形式是相同的。故可以将上述两个方程式合并成如下形式:

$$\min_{\mathbf{D}_h, \mathbf{D}_l, \alpha} (\|\mathbf{u}^h - \mathbf{D}_h \alpha\|_2^2 + \|\mathbf{u}^l - \mathbf{D}_l \alpha\|_2^2) + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (4-5)$$

其中, λ 为拉格朗日算子, 主要用来平衡稀疏系数的稀疏性。设 N 和 M 分别为低-高精度流体局部结构数据的维度, 再将上述式子中的两个训练数据集

放到一个向量中，重新整理后可将双特征空间的稀疏编码问题表示成如下形式：

$$\min_{D_h, D_l, Z} \|X_c - D_c Z\|_2^2 + \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \|Z\|_1 \quad (4-6)$$

其中， $X_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} u^h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} u^l \end{bmatrix}$ ， $D_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} D_h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} D_l \end{bmatrix}$ ，分别是是低—高精度样本数据和稀疏字典的组合形式。

联合训练字典方法巧妙地将低—高精度的流体速度场样本数据放到了一个向量中，这样可以得到一个基本形式与一般的过完备训练字典方法形式相同的方程式 4-6，故可用现有的稀疏编码算法学习一对低—高精度空间的稀疏字典 D_l 和 D_h 。

稀疏编码算法是一种无监督学习算法，该算法在一组过完备的基向量中寻找样本数据的稀疏表示。给定一个无标签的输入数据，稀疏编码算法可以学习生成一些能捕获输入数据高级别特征的基函数。不同于一般的无监督学习算法，如 PCA 等，稀疏编码算法可以用来学习过完备基的集合，即学习生成的基的数量要远大于输入信号的维度。在基于稀疏编码的过完备训练字典方法中，这些训练生成的基原子的集合即为过完备稀疏字典。

4.2.3 降采样联合字典方法

根据章节 4.2.1 问题描述部分指出，信号的稀疏表示不仅在高精度空间是最优的，还要保证在低精度空间是最优的，才能准确低恢复出原信号。而 Yang 提出的联合学习字典方法将低—高精度空间数据放到一个向量中学习，那么根据稀疏编码技术学习生成的稀疏字典，只能保证求得的稀疏表示形式在低—高精度联合空间内是最优的。但是在重构高精度空间数据时，只有低精度空间的数据向量作为输入，故其求得的稀疏表示也只能保证在低精度空间是最优的。由上述分析可知，Yang 提出的联合训练字典学习方法存在训练字典的最优空间和重构上采样的最优空间不一致问题，即我们可以认为根据稀疏字典学习的稀疏表示代表的信号与重构上采样方法分解求得的稀疏表示代表的信号不一致，故从理论上讲，该训练字典方法学习生成的稀疏训练字典不能保证重构上采样结果的准确性。Yang 针对其提出的联合训练字典方法存在的重构结果不准确的问题，在 2013 年的论文 [50] 中提出了改进方案。该方案使用一个通用的双向

稀疏编码模型来学习具有一对信号空间的字典，达到提高重构结果准确性的目的，但是该改进模型仍然无法达到流体动画领域所需要的精度。

本文提出的过完备稀疏字典方法，为了保证在稀疏字典学习阶段分解信号的稀疏表示的最优空间与重构上采样阶段分解信号的稀疏表示的最优空间尽量保持一致，对联合训练字典方法的输入向量做了一些改进。在过完备字典的训练学习阶段，我们只收集高精度流体速度场的样本数据，并将其展开到一个向量中，使用稀疏编码技术学习生成对应的高精度过完备稀疏字典。然后再使用低精度速度场数据与高精度速度场数据之间的映射关系，生成一个适用于低精度速度场的过完备稀疏字典。

首先，给定高精度流体速度场训练数据集 $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^K$ ，其中 $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ，类似于方程式 4-6，本文提出的基于稀疏编码技术的高精度稀疏字典 \mathbf{D}_h 可以用如下式子表示：

$$\min_{\mathbf{D}_h, \{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^K} \sum \|\mathbf{u}_i - \mathbf{D}_h \boldsymbol{\alpha}_i\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}_i\|_1 \quad (4-7)$$

并且，高精度稀疏字典 \mathbf{D}_h 需要满足如下表示的约束条件：

$$s.t. \quad \|\mathbf{D}_h(:, k)\|_2 \leq 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (4-8)$$

其中， $\mathbf{D}_h(:, k)$ 表示高精度稀疏字典 \mathbf{D}_h 的第 k 列。通常，过完备稀疏字典 \mathbf{D}_h 的每一列表示一个原子项或者一个基原子。

此处，我们使用的方程式与联合稀疏字典推导的方程式 4-6 具有相同的形式，故也可使用稀疏编码算法 [40] 求解。方程式 4-7 及其约束条件 4-8 需要求解两个未知量，即稀疏字典 \mathbf{D}_h 和稀疏表示系数 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^K$ ，我们无法在一个方程式中同时求解两个未知量。但是，我们可以分别固定变量 \mathbf{D}_h 和 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^K$ ，即假设其中一个变量已知，再来求解另一个未知量，然后通过迭代的方法直到最终的结果都收敛。当过完备字典 \mathbf{D}_h 为已知量时，可以用统计学领域广泛使用的 Lasso 算法求解稀疏表示系数 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^K$ ，当稀疏表示系数 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^K$ 为已知量时，可以把求解过完备字典 \mathbf{D}_h 的问题当作一个标准的 Quadratically Constrained Quadratic Programming (QCQP) 问题。

图 4-2 展示了根据上述方程式训练生成的稀疏字典的原子项的可视化示意图。其中，图 (a) 展示的是用水平方向速度场数据生成的稀疏字典，图 (b) 展示的是用垂直方向速度场数据生成的稀疏字典。在训练图中所示稀疏字典

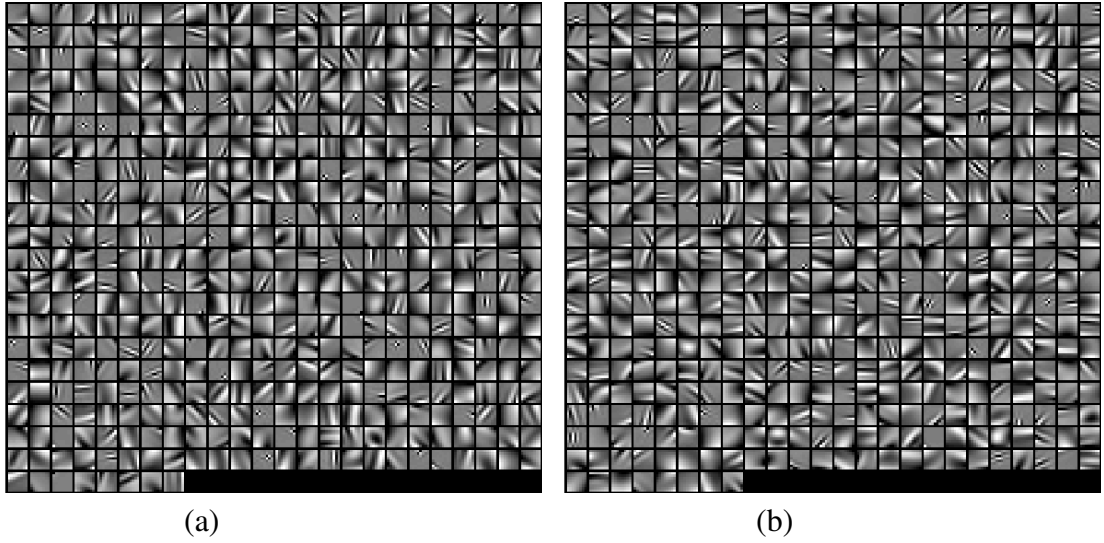


图 4-2 训练生成的过完备稀疏字典的原子项的可视化示意图。(a) 水平方向速度场的稀疏字典。(b) 垂直方向速度场的稀疏字典

Fig 4-2 Visualization of velocity field atoms captured from overcomplete dictionaries trained by equation 4-7. (a) the dictionary for the vertical velocity field. (b) the dictionary for the horizontal velocity field.

时，使用的代表流体局部细微结构的 *patch* 的大小为 8×8 。仔细观看示意图，可以发现其展示的稀疏字典的原子项有 22 行、24 列，故可视化效果图的底部有 $16(24 \times 22 - 512)$ 个原子项是全黑的，即那些原子项是不存在的。仔细观察可视效果图中的有效原子项，可以看出流体速度场的字典原子捕获到的高精度边缘展示了不同的流体速度场梯度。

根据第三章的给出的本文流体动画重构上采样基本框架图可以看出，该框架中的低精度速度场数据和高精度速度场数据之间的映射关系可以通过降采样步骤中使用的降采样矩阵表示。要计算出一个适用于低精度流体速度场的过完备稀疏字典，可以通过线性组合降采样矩阵和高精度稀疏字典获得，故低精度稀疏字典的求解过程可以表示成如下形式：

$$D_l = S D_h \quad (4-9)$$

其中， S 表示一个大小为 $m \times n, m < n$ 的降采样矩阵， m 和 n 分别表示低精度和高精度速度场数据的维度。

相较于把低精度空间和高精度空间的流体速度场数据放到一个向量中训练

的方法，本文提出的训练字典方法避开了信号的稀疏表示在学习稀疏字典时的最优空间和重构上采样时的最优空间不一致问题，并且本文第五章的实验部分证明，使用该方法生成的低精度稀疏字典更适用于流体的低精度速度场数据。

为了更好地表示流体速度场的局部细微结构，在下面章节的重构上采样算法部分，提取输入的低精度流体速度场数据的高频部分之后再执行重构上采样步骤。为了与重构上采样的输入数据保持一致，该章节的流体速度场训练样本数据也是在执行提取高频部分的预处理操作之后，在对提取出的高频部分进行训练学习。具体的高频提取方法与重构上采样部分的低精度流体速度场数据的预处理方法保持一致。

另外，如果降采样矩阵是均匀的，可以直接以高精度速度场的均值替代低精度速度场的均值。因为在这种情况下，低—高精度速度场的平均值是一样的。另外，在训练字典的时候不需要低精度速度场的信息可以给我们带来很多好处，比如当重构时的放大因子发生变化时，不需要重新训练对应的过完备字典，而 Yang 提出的联合训练字典方法需要对每一个不同的放大因子训练对应的过完备字典。

4.3 过完备字典重构上采样方法

针对复杂流场数据，一个能有效揭示其数据采样特征的关键问题是：当用不同网格精度计算流场数据时，求解出的低精度流场数据和高精度流场数据之间的映射关系如何？不论是低精度流场数据还是高精度流场数据，都是由其局部结构成，而两者的整体形态相似，只有局部席位结构不同。由于低精度流场数据的信息量小于高精度流场的信息量，需要一个经验上的数据集来弥补这个信息量上的差，而这个经验数据集，即为 4.2 部分学习生成的一对稀疏字典。

根据压缩感知理论，给定一个过完备稀疏字典 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ ，其中， $n < k$ 或 $n \leq k$ ，可以将速度场 $u \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示成字典原子项的稀疏线性组合：

$$u = D\alpha \quad (4-10)$$

其中， α 是速度场 u 的稀疏表示形式。已知速度场 u 的稀疏表示形式 α ，可以通过线性组合稀疏字典 D 和稀疏表示 α 重构出原速度场 u 。

虽然 Yang 等人提出的基于联合稀疏字典的重构上采样方法不能达到流体

动画领域所需要的精度，但是他们应用过完备字典的方法值得我们借鉴。本文方法借鉴 Yang 的工作，提出了一个结合过完备字典技术和采样技术的重构上采样模型。我们的重构上采样方法也需要使用一对低—高精度的过完备稀疏字典，该稀疏字典由本文提出的应用降采样矩阵的过完备训练字典方法生成。

4.3.1 预处理速度场数据

设 $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 表示高精度速度场数据的局部细微结构， $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 表示其对应的低精度速度场数据的局部细微结构，在流体动画的基本计算框架中，降采样步骤可以用如下公式表示：

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} \quad (4-11)$$

在本文的重构算法中，我们使用 **patches** 来表示流体速度场数据的局部细微结构。另外，为了提高重构结果的数据对流体运动的影响力，在进行速度场数据重构之前，对每一个 **patch** 做一个预处理操作，即减去该 **patch** 低频（平均值）部分。设原低精度速度场每个 **patch** 中第 (i, j) 个元素的值表示为 $\tilde{u}_{i,j}$ ，预处理后对应位置的速度场数据表示为 $\bar{u}_{i,j}$ ，则该预处理操作可以表示成如下形式：

$$\tilde{u}_{i,j} = \bar{u}_{i,j} - \frac{\sum \bar{u}_{i,j}}{ps \times ps} \quad (4-12)$$

其中， ps 是低精度局部细微结构 **patch** 的大小。

设 $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 表示预处理后的低精度速度场数据， \bar{u}_{mean} 表示每个局部细微结构的平均值，上述方程式也可以表示成：

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{u}_{mean} \quad (4-13)$$

设预处理后的低精度速度场为 $\tilde{\mathbf{u}}$ ，结合方程式 4-11，可有如下推导：

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{u}_{mean} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} - \bar{u}_{mean} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}} - \hat{u}_{mean}) = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (4-14)$$

其中， \mathbf{u} 表示高精度流体速度场的高频部分，并且有 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \hat{u}_{mean}$ 。本章的重构上采样方法，输入默认为预处理后的低精度速度场的高频部分，故在本章的后面部分中，除特别说明，描述的低—高精度速度场数据均指的是低—高精度速度场的高频数据。

4.3.2 重构上采样算法

结合方程式 4-10 和方程式 4-14, 可将低精度速度场 \tilde{u} 重新表述成如下形式:

$$\tilde{u} = S D_h \alpha = D_l \alpha \quad (4-15)$$

这里, 我们用 D_h 代替原方程式 4-10 中的 D , 表示高精度空间的稀疏字典, D_l 表示通过映射函数计算生成的对应低精度空间的稀疏字典。

因为 α 是速度场的稀疏表示, 根据稀疏编码技术, 类似于方程式 2-12, 上述方程式可以转化成如下形式:

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|\tilde{u} - D_l \alpha\|_2^2 \leq \epsilon \quad (4-16)$$

要重构出流体高精度网格速度场, 根据方程式 4-10 可知, 我们需要先求得流体速度场数据的稀疏表示形式。又根据联合训练字典问题方程式 4-1 和 4-2, 可知流体的低精度速度场和高精度速度场具有相同的稀疏表示, 故可以通过方程式 4-16 获得流体速度场数据的稀疏表示。

观察方程式 4-16, 可知要求解流体速度场的稀疏表示系数 α , 可将其公式转化成如下形式再计算:

$$\alpha = \min_{\alpha} \|\tilde{u} - D_l \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (4-17)$$

其中, 参数 λ 是拉格朗日算子, 可以平衡稀疏系数 α 与低精度速度场 \tilde{u} 之间的近似度。注意到不同于方程式 4-16, 上述方程式求解的是 l_1 范数问题, 而不是 l_0 范数, 因为求解 l_0 范数问题是一个 NP-hard 问题, 不可以直接求解, 故通常转化为 l_1 范数问题而得到近似解, 但前提是稀疏系数 α 要足够稀疏。将求解流体速度场的稀疏系数问题转化为 l_1 范数问题后, 方程式 4-17 变成了一个线性回归问题, 在统计学领域被称为 Lasso 问题 [51] [52], 故可以使用 Lasso 算法求解上述方程式。

求得流体速度场的稀疏表示后, 可以通过线性组合该稀疏表示和高精度的过完备稀疏字典, 重构恢复出其对应的高精度速度场, 即:

$$u = D_h \alpha \quad (4-18)$$

至此为止，我们求得了高精度流场的高频部分，要得到完整的高精度流场数据，我们还需要加上在数据预处理部分提取出的流体的局部细微结构对应的低频（均值）部分。

Algorithm 2 重构上采样算法.

Require:

coupled dictionaries D_l and D_h , low-resolution fluid velocity field \bar{u} .

Ensure:

high-resolution fluid velocity field U .

- 1: **for** every patch \bar{u}_p in \bar{u} **do**
 - 2: $u_{mean} = mean(\bar{u}_p)$, $\tilde{u} = \bar{u} - u_{mean}$
 - 3: Solve Lasso: $\alpha = \min_{\alpha} \|\tilde{u} - D_l \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1$.
 - 4: Recover high-resolution fluid velocity field feature: $u = D_h \alpha$.
 - 5: Recover high-resolution fluid velocity field patch: $\acute{u}_p = u + u_{mean}$.
 - 6: **end for**
 - 7: smooth adjacent patches: $U = \sum \acute{u}_p / O$
-

另外，上述给出的求解步骤，只能逐次单独处理流体局部细微结构，故不能保证相邻局部细微结构之间的一致性。为了保证相邻局部细微结构之间的一致性，本文在整个流体速度场中按照光栅扫描的顺序处理每一个局部细微结构，并在相邻的局部细微结构之间设置一些重叠元数据。这样，在更新当前数据的局部细微结构时，就可以提取计算出的当前局部细微结构和相邻局部细微结构的重叠区域，并对其做均值处理。将上述保证相邻局部细微结构之间一致性的步骤表现到计算步骤中，可将最终求得的流体速度场 U 重构解决方案表述为如下形式：

$$U = \sum (D_h \alpha + u_{mean}) / O \quad (4-19)$$

其中， O 表示重叠区域，该矩阵中元素的值与重构上采样流体局部细微结构步骤同时进行。可以用一个与 U 相同维度的矩阵表示。

概括上述求解过程，可以将流体动画的疏密数据重构上采样方法归纳为算法 2。该算法对流体的低精度速度场的每一个局部细微结构应用本文提出的基于稀疏字典技术的重构上采样算法，而该重构上采样方法可以归纳为四个步骤：低精度速度场数据的预处理、使用 Lasso 算法求解低精度速度场局部细微结构的稀疏表示、线性组合高精度稀疏字典和流体的稀疏表示得到高精度流体速度

场的高频部分数据、组合高精度流体速度场的高频部分数据和低频部分，获得流体高精度速度场数据的局部细微结构。在算法的最后一个步骤中，对重构的高精度流体速度场局部细微结构有重叠的部分取均值，解决重构算法存在的相邻局部细微结构之间不平滑的问题。

4.4 本章小结

本章详细地介绍了本文提出的基于过完备稀疏字典技术的重构上采样方法以及对应的过完备字典的训练方法。

首先我们描述了 Yang 提出的联合稀疏字典的解决方案，并分析了该解决方案的缺点，然后针对该解决方案存在的学习训练字典和重构上采样时求解的稀疏表示的最优空间不一致，导致理论上无法保证重构结果的准确性的问题，提出了我们的改进方案，即在训练字典时，只使用高精度样本空间训练高精度字典，然后再通过与降采样流体速度场步骤一致的降采样矩阵的线性组合生成对应的低精度稀疏字典。

在重构上采样方法中，我们首先给出了本文的预处理流体速度场数据的方法，其后又详细介绍了如何应用一对低-高精度过完备稀疏字典来重构上采样预处理后的流体速度场数据，并最后生成可以用于流体模拟基本框架下一帧计算的方法。

第五章 实验与结果分析

在这一章节中，我们将会给出应用本文提出的流体动画重构上采样框架的流体动画模拟效果图。为了探讨本文的流体动画重构上采样方法在流体动画领域的适用性与可行性，本文将会展示使用 Yang 的重构上采样算法与本文给出的重构上采样方法的对比实验。另外，为了说明本文重构上采样方法的重构结果的准确性，我们也会给出该重构上采样方法在图像超分辨领域的实验。

5.1 L1SR 和 scSR 重构上采样方法与框架

5.1.1 实验目的与环境

该部分实验的目的是观察并验证本文提出的基于过完备稀疏训练字典方法的流体动画计算框架的可行性，并探索可能存在的问题，为后续的研究工作做好调研工作。

该部分的实验在 Matlab 环境下开发，实验用的机器的内核是 Intel Core i7 3.40G，内存为 16G。实现 Bridson [30] 的流体模拟器作为本文流体模拟的基本框架，对流部分采用经典的半拉格朗日方法，投影步骤求解压强场的矩阵线性方程使用的的雅可比迭代器求解。使用 L1SR 方法重构上采样流体的局部细微结构时，代表流体局部细微结构的 patch 的大小设置为 3×3 ；在应用 scSR 重构上采样流体局部细微结构时，则使用 patch 的大小为 5×5 。在用 L1SR 或 scSR 方法重构上采样流体低精度速度场数据时，考虑到稀疏表示的训练字典最优空间与重构最优空间不一致，故在训练字典的过程中，设置拉格朗日算子 λ 的值为 0.15，而在重构时去对应的拉格朗日算子 λ 的值为 0.2。另外，在实验中，我们设置流体速度场的放大因子为 2，训练字典的大小为 512（即每一个字典有 512 个原子项），高精度的流体场的网格精度为 512×512 。

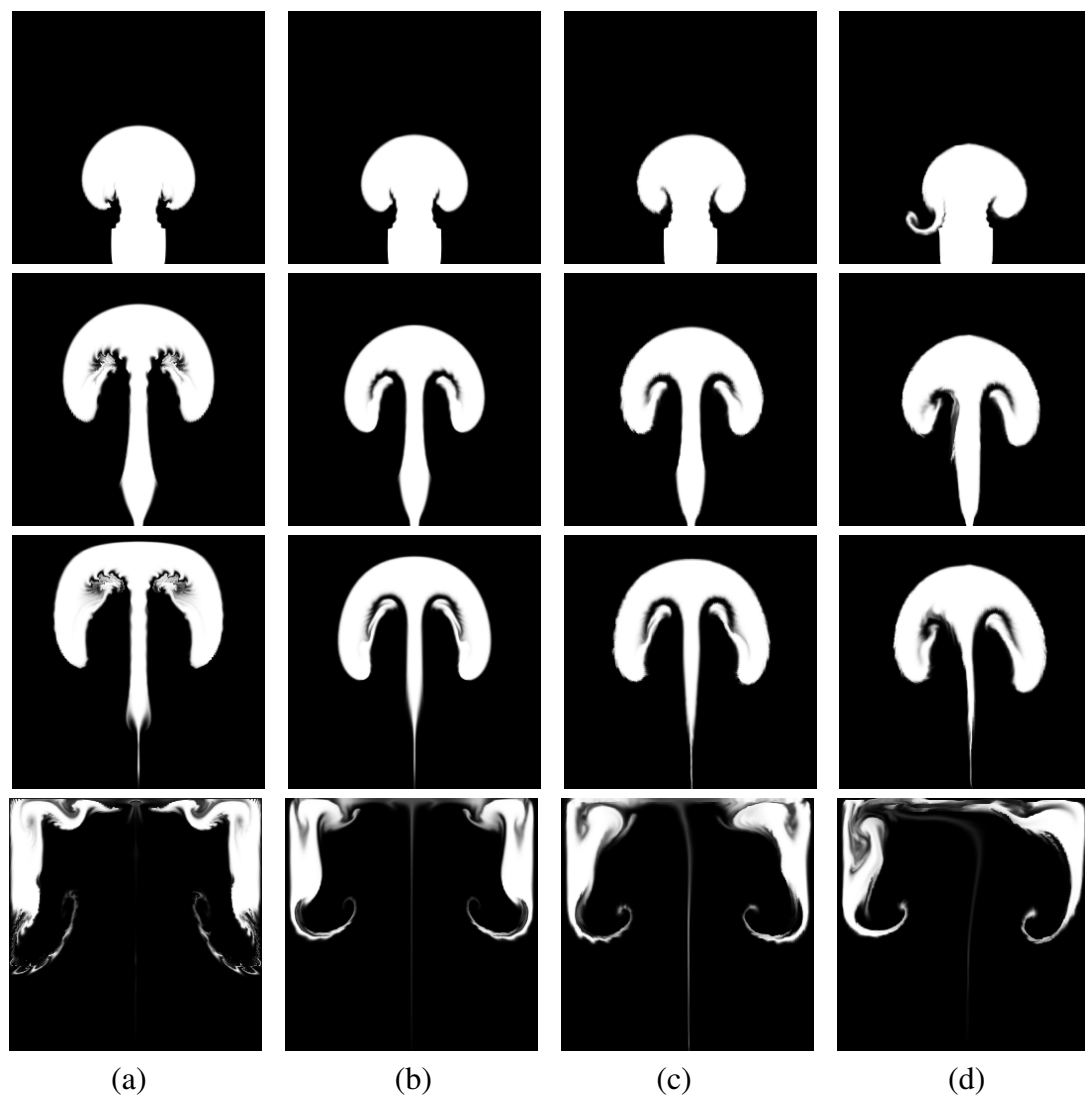


图 5-1 应用 L1SR 重构上采样的流体动画模拟框架效果对比图。从上到下的四行分别为第 40、55、62 和 88 帧。(a) 模拟器直接生成的高精度动画效果。(b) 双三次插值上采样重构动画效果。(c) 取高频权重为 0.5 的 L1SR 方法重构动画。(d) 取高频权重为 0.7 的 L1SR 方法重构动画。

Fig 5-1 Comparison of applying L1SR up-sampling and reconstruction method to fluid animation to other simulators. from up to down, the four rows are frames of 40,55,62 and 88. (a) simulation result on high-resolution MAC grid. (b) simulation result by applying bicubic interpolation to our framework. (c) simulation result by applying L1SR method with 0.5 high-frequency part. (d) simulation result by applying L1SR method with 0.7 high-frequency part.

5.1.2 实验结果与分析

5.1.2.1 应用 L1SR 重构上采样

图 5-1 展示了将 L1SR 重构上采样方法应用到流体动画模拟框架中的实验效果图，并与双三次插值重构方法和直接使用高精度的网格模拟出的动画效果做了比较。注意到图中在应用 L1SR 方法时，对高频部分添加了一个权重系数，是因为如果不处理高频项，直接使用 L1SR 方法重构上采样到本文提出的流体动画重构上采样框架中，只运行几帧动画帧，流体的形态就混乱了。再比较双三次插值，L1SR 以及高精度模拟的单帧效果和动画，可以看出从形态上来讲，高频权重系数设为 0.5 的时候，模拟出的流体动画的形态相比于权重系数为 0.7 的动画效果，对称性的问题好了很多，但是其细节效果和形态效果甚至赶不上双三次插值方法；当高频系数设为 0.7 时，模拟出的流体在边缘部分有一些较小的细节，但是很快就表现出了不对称的性质，并且当高频系数设置得越高时，表现的不对称以及混乱的效果就越明显。

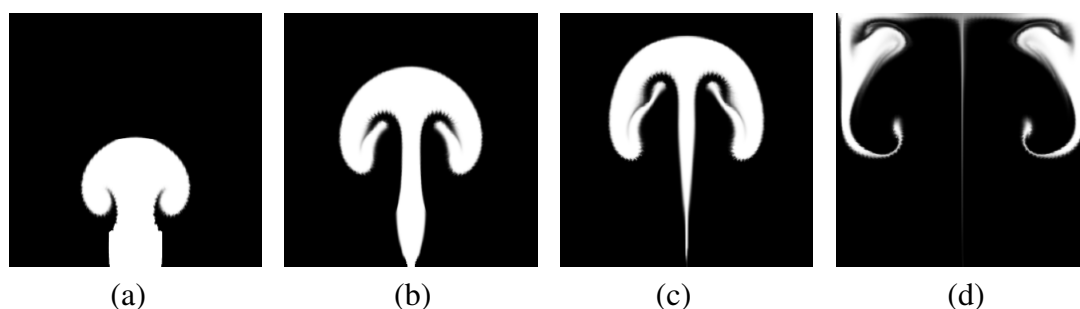


图 5-2 重构上采样低频速度场数据。(a)、(b)、(c) 和 (d) 分别表示第 40、55、62 和 88 帧

Fig 5-2 fluid simulation result by reconstruction and up-sampling framework, and only the mean part of the velocity field has been used. (a),(b),(c) and (d) represent for the frame of 40,55,62 and 88.

根据 L1SR 重构上采样方法的具体实现可知，该方法通过双三次插值方法重构上采样流体速度场的低频部分，只有速度场的高频部分通过训练字典方法重构上采样生成。针对实验对比图 5-1 表现出的高频部分权重取值越小，其流体形态的左右部分对称性越好的现象，我们推断出如下结论：L1SR 方法重构上采样生成的高精度流体速度场高频部分数据的值不够正确，故 L1SR 重构上采样方法不适宜应用到流体动画领域。

为了让上述推断结论更加具有说服力，我们又做了另外一组实验，即在我

们的重构上采样框架中,使用双三次插值方法重构上采样流体速度场的低频部分,去掉 L1SR 重构上采样的速度场高频部分。图 5-2 展示了该实验的效果图。根据图中展示的效果,可以看出流体速度场数据的低频部分即可形成具有左右对称特点的基本动画形态,但是流体细节丢失严重。结合比较实验 5-2 和 5-1,当调整高频部分的系数为 0.5 时,实验生成的流体动画形态存在的不对称问题较为轻微,但是相较于设置高频部分的系数为 0.7 时的动画效果,其产生的流体细节也相应地减少了很多。再一次证明应用 L1SR 重构上采样方法到流体动画计算框架中导致的流体动画形态混乱问题,是由其重构速度场与高精度流体速度场之间的误差太大造成的。

分析 L1SR 方法不能准确重构出原高精度流体速度场的原因,我们发现是由 L1SR 方法自身存在的理论上不能保证恢复结果的准确性造成的。特别是将该重构方法应用到流体动画计算框架中时,误差会逐帧积累,如果完全不抑制高频部分(实验中取高频部分的系数为 0),只需要很少一些帧数之后就会导致流体的形态产生严重的混乱。

5.1.2.2 应用 scSR 重构上采样

为了提高重构结果的准确性,我们比较了在同一参数条件下,scSR 方法和 L1SR 方法重构同一幅图像时的峰值信噪比 PSNR (Peak Signal to Noise Ratio),如表 5-1 所示。在此处的实验中,我们也比较了 overlap 取不同值时的重构结果,无论是从理论的角度,还是根据表中的实验数据,我们都可得这样的结论:重构时使用的 overlap 值越大,重构效果更好。但是当 overlap 的值取得越大时,其重构上采样步骤花费的时间也越长。故在我们得流体动画实验中,其 overlap 值都设置成 1。再对比相同参数条件下的 scSR 方法和 L1SR 方法的 PSNR 值,可以发现 scSR 方法的 PSNR 值远高于 L1SR 方法。并且双三次插值重构出的结果的 PSNR 值也比 L1SR 方法高。

另外,图 5-3 比较了当重叠像素值为 1 时,L1SR 和 scSR 方法重构 Lena 的对比效果图。需要注意的是,图中 (c) 在重构时取的 patch 大小为 3×3 ,而 (d) 则取 patch 的大小为 5×5 。这是因为 L1SR 方法重构图像时,相较于 patch 大小为 5×5 ,比取 patch 大小为 3×3 时的效果更好,其此时其 PSNR 值为 30.355056db。比较图中不同方法的重构效果图,也可以看出 scSR 方法重构出的结果比 L1SR 方法更加平滑,但是比双三次插值的结果有更多的细节;而

表 5-1 对比 L1SR 和 scSR 方法重构 Lena 结果图的 PSNR 值

Table 5-1 Comparison of PSNR values of reconstruction result between L1SR and scSR method.

reconstruction method	overlap	λ	PSNR values(db)
bicubic	none	none	32.794678
L1SR	1	0.15	29.689994
scSR	1	0.15	34.423253
L1SR	4	0.15	26.55217
scSR	4	0.15	34.999165
L1SR	1	0.2	29.470000
scSR	1	0.2	34.397705
L1SR	4	0.2	35.011397
scSR	4	0.2	35.011397

L1SR 方法虽然能够重构出一些细节，但是人工痕迹太明显，并且其 PSNR 值也不及双三次线性插值重构结果的 PSNR 值。

分析 scSR 方法与 L1SR 方法的不同，我们发现，首先，scSR 方法对求解稀疏系数的 Lasso 算法做了一些改进；其次，L1SR 方法在做卷积提取高频信息时，辅助使用了一个对低精度输入图像放大 2 倍后的矩阵，而 scSR 方法则是直接在放大与放大因子相同倍数的矩阵上做的卷积，这样提取的高频信息更加准确；最后还发现 L1SR 方法实现论文 [28] 提出的算法时，没有实现重构约束条件的投影步骤，而 scSR 方法有一个对应的 backprojection 实现重构约束条件。

在图像超分辨算法中，重构约束条件的目的是为了保证对重构恢复的结果图做下采样和模糊操作，能够得到输入的低精度结果。但是这样的约束条件却并不适用于流体速度场数据，因为流体的低—高精度数据之间没有模糊的关系。故在实验发现 scSR 方法去掉 backprojection 步骤后的重构图像的 PSNR 值仍然要比双三次插值和对应的 L1SR 方法的 PSNR 值高时，将修改后的适用于流体速度场数据的 scSR 方法应用到了我们的流体动画重构上采样框架中。

图 5-4 展示了在无障碍物的场景下，应用 scSR 重构上采样方法到我们的流体动画基本框架中的对比效果图。其中，第 (a) 列是低精度输入速度场数据，第 (b) 列是应用双三次插值方法到本文提出的流体动画基本框架中的效果图，第 (c) 列是应用 scSR 过完备字典技术重构上采样高精度速度场的效果图，第 (d) 列是模拟器直接在高精度速度场模拟出的效果图。比较 (a)、(b) 和第 (c) 列，可以看出这三列的流体形态基本一样，但是在流体的边缘处，应用 scSR 过完备字典技术重构上采样的流体动画具有一些类似于直接模拟的高精度速度场



图 5-3 scSR 与 L1SR 方法重构 Lena 的效果图比较。(a) 高精度原图像。(b) 双三次插值上采样重构效果。(c) L1SR 方法重构效果。(d) scSR 方法重构效果

Fig 5-3 comparison between scSR and L1SR method to reconstruct lena. (a) high-resolution picture. (b) reconstructed by bicubic method. (c) reconstructed by L1SR. (d) reconstructed by scSR.

的细节，其中第 92 帧最为明显。另外，虽然在流体动画的第 20 帧，流体形态的出现了明显的不对称，但是当模拟进行到后期，其不对称性问题反而趋于平和。

类似于图 5-4，图 5-5 展示的是在多障碍物的场景下，基于过完备训练字典的 scSR 重构方法的对比效果图。比较图中的第 (a)、(b) 和第 (c) 列，我

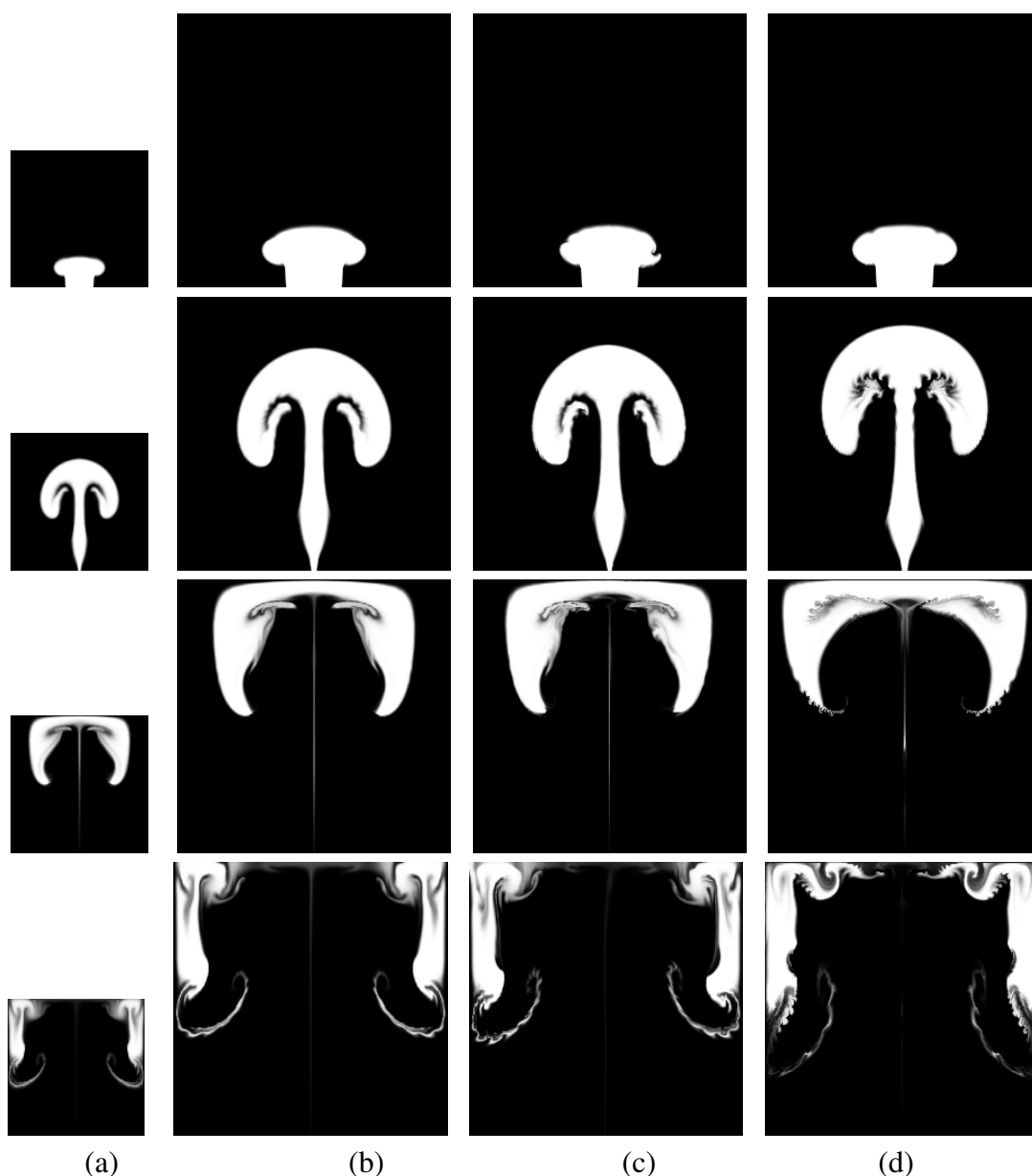


图 5-4 应用 scSR 重构上采样无障碍物场景下的流体动画模拟框架效果对比图。从上到下的四行分别为第 20、56、73 和 92 帧。(a) 模拟器直接生成的低精度动画效果。(b) 双三次插值上采样重构动画效果。(c) scSR 方法重构动画效果。(d) 模拟器直接生成的高精度动画效果。

Fig 5-4 Comparison of applying scSR up-sampling and reconstruction method to fluid animation without obstacles to other simulators. from up to down, the four rows are frames of 20,56,73 and 92. (a) simulation result on low-resolution MAC grid. (b) simulation result by applying bicubic interpolation to our framework. (c) simulation result by applying scSR method to our framework. (d) simulation result on high-resolution MAC grid.

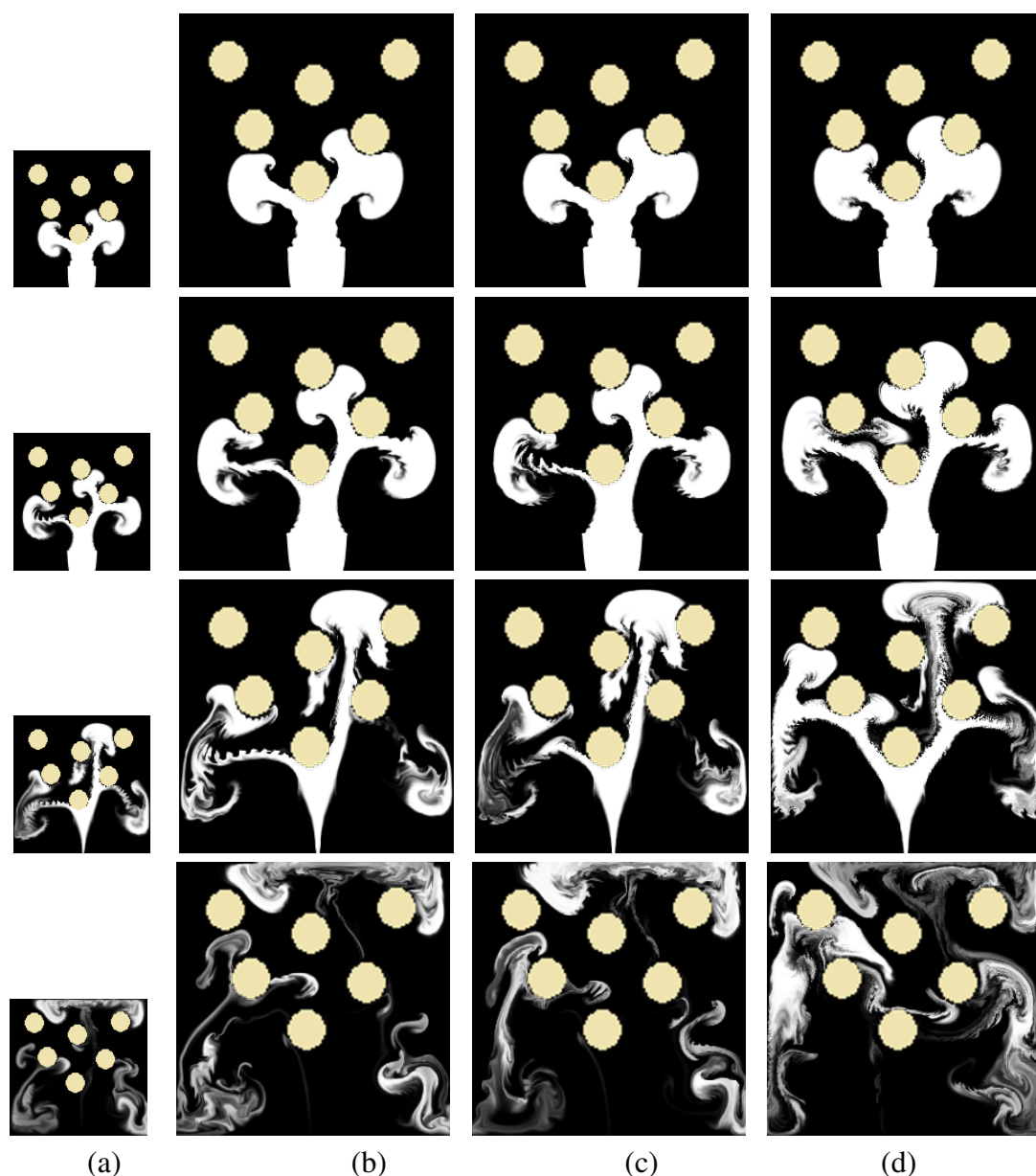


图 5-5 应用 scSR 重构上采样多障碍物场景下的流体动画模拟框架效果对比图。从上到下的四行分别为第 35、44、55 和 70 帧。(a) 模拟器直接生成的低精度动画效果。(b) 双三次插值上采样重构动画效果。(c) scSR 方法重构动画效果。(d) 模拟器直接生成的高精度动画效果。

Fig 5-5 Comparison of applying scSR up-sampling and reconstruction method to fluid animation with multi-obstacles to other simulators. from up to down, the four rows are frames of 35,44,55 and 70. (a) simulation result on low-resolution MAC grid. (b) simulation result by applying bicubic interpolation to our framework. (c) simulation result by applying scSR method to our framework. (d) simulation result on high-resolution MAC grid.

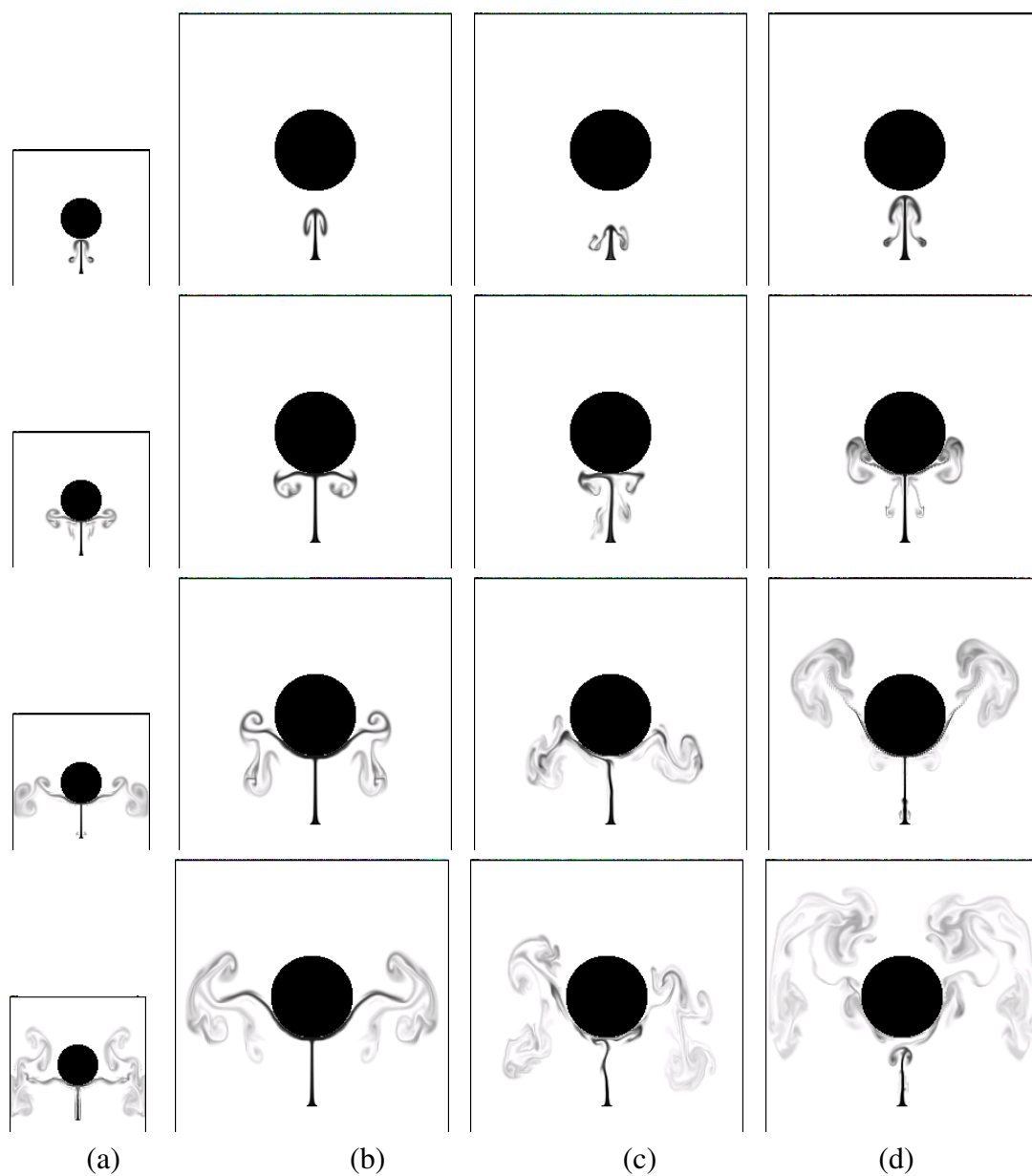


图 5-6 C++ 模拟器中应用 scSR 重构上采样实验结果对比图。从上到下的四行分别为第 68、106、179 和 249 帧。(a) 模拟器直接生成的低精度动画效果。(b) 双三次插值上采样重构动画效果。(c) scSR 方法重构动画效果。(d) 模拟器直接生成的高精度动画效果。

Fig 5-6 Comparison of applying scSR up-sampling and reconstruction method to fluid animation developed with c++. from up to down, the four rows are frames of 68,106,179 and 249. (a) simulation result on low-resolution MAC grid. (b) simulation result by applying bicubic interpolation to our framework. (c) simulation result by applying scSR method to our framework. (d) simulation result on high-resolution MAC grid.

们可以得出与图 5-4 一样的结论。在通过上述实验验证后，我们可以总结出结论：应用过完备稀疏字典技术的重构上采样方法，能够在一定程度上重构出类似与高精度网格模拟器生成的流体细节效果，但是模拟出的流体动画的形态更接近于低精度的模拟结果，并且重构生成的流体动画还存在一些形态性问题。

5.2 应用降采样矩阵的重构上采样方法

5.2.1 实验背景

本文提出流体动画重构上采样框架，目的是为了达到快速高效地模拟流体动画的目的。但是，应用 scSR 方法在 Matlab 环境下重构上采样流体速度场，即使 overlap 值设置为 1，其重构上采样步骤的时间开销也需要约 1.5~1.7s 每帧，如果增加局部细微结构之间的 overlap 值，其重构上采样步骤耗费的时间会更长。但是在同样的条件下，双三次插值方法却只需要花费大约 0.003s 每帧。

为了提高上述实验中 scSR 重构方法的在流体速度场重构上采样步骤中的时间开销，并且验证该方法的通用性，我们更换了一个 C++ 模拟器，并将 scSR 方法应用到了 C++ 开发环境中。在实验的过程中，模拟器中上升的烟雾柱较小，计算产生的误差效果将会更加突出。应用 scSR 方法到 C++ 模拟器中后，我们发现不对称性问题及形态问题十分突出，如图 5-6 所示。

5.2.2 实验目的与环境

分析应用过完备训练字典的 scSR 方法在流体动画上存在的问题，我们发现从本质上来讲，无论是 scSR 方法还是 L1SR 方法，都存在求解稀疏系数时，训练字典的最优空间和重构上采样的最优空间不一致问题，从理论上讲，不能保证重构结果的准确性。虽然这些算法能够在图像超分辨领域取得令人满意的结果，但是不能保证其在流体动画中也能取得好的效果。图像超分辨领域，只要单张的重构结果在视觉上能让人满意即可，但是在流体模拟领域，如果重构结果存在误差，该误差会逐帧积累，最终导致流体的形态产生严重的问题。应用降采样矩阵的重构上采样方法是为了从本质上克服基于稀疏编码的过完备字典方法的空间不一致问题而提出的。

在应用降采样矩阵的重构上采样方法的实验中，我们使用的电脑内核为 Intel Core i7 3.40GHz，内存为 16G。在应用本文提出的降采样矩阵的重构方法

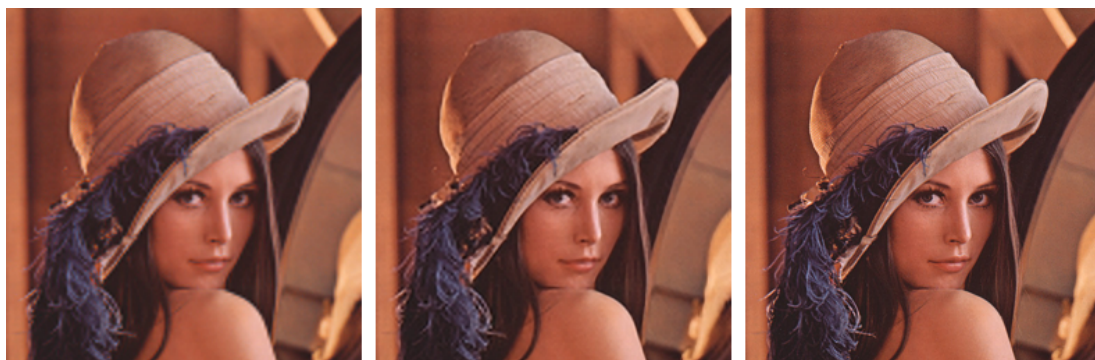


图 5-7 应用降采样矩阵的重构上采样方法重构 Lena

Fig 5-7 Super-resolution result for lena by using down-sampling matrix. Left:bicubic. center:our method. right:orginal picture.

到流体动画领域之前，我们在图像处理领域验证其重构结果的准确度。在学习高精度的训练字典时，我们设流体速度场数据的训练样本的局部细微结构 patch 大小为 8×8 ，放大因子仍然为 2，则重构时使用的低精度速度场的 patch 大小的为 4×4 。根据上述实验参数的设定，我们可推断出高精度空间字典的原子项向量有 64 个值，对应低精度空间字典的原子项向量为 16 个值，那么降采样矩阵 S 的维度为 16×64 ，实验中我们使用的是双线性插值采样矩阵。拉格朗日算子 λ 的值设为 1。根据基于稀疏编码的过完备字典技术，我们知道字典越大，其重构效果越好。但是其重构步骤的开销也会线性增长。为了平衡重构效果与重构的时间开销，在我们的实验中，我们仍然使用的字典大小为 256。

在实验中，我们使用的是在 C++ 环境下开发的模拟器，不同于在 Matlab 环境中实验用的模拟器，在应用降采样矩阵的重构上采样方法的实验中，我们在流体模拟的基本步骤—对流步骤中使用的 Maccormack [34] 方法，投影步骤的矩阵线性方程使用的 pcg 求解器。

5.2.3 实验结果与分析

图 5-7 展示了本文提出的重构方法重构 lena 图片的效果图。观察图中的效果可知，本文方法可以重构出比双三次插值更多的细节效果，并且在本文方法重构出的结果图中，几乎没有人工痕迹。为了让我们的实验更具有说服力，我们同样记录了重构结果的 PSNR 值。其中，双三次插值重构结果的 PSNR 值为 33.018db，而我们方法重构结果的 PSNR 值能达到 34.285db。

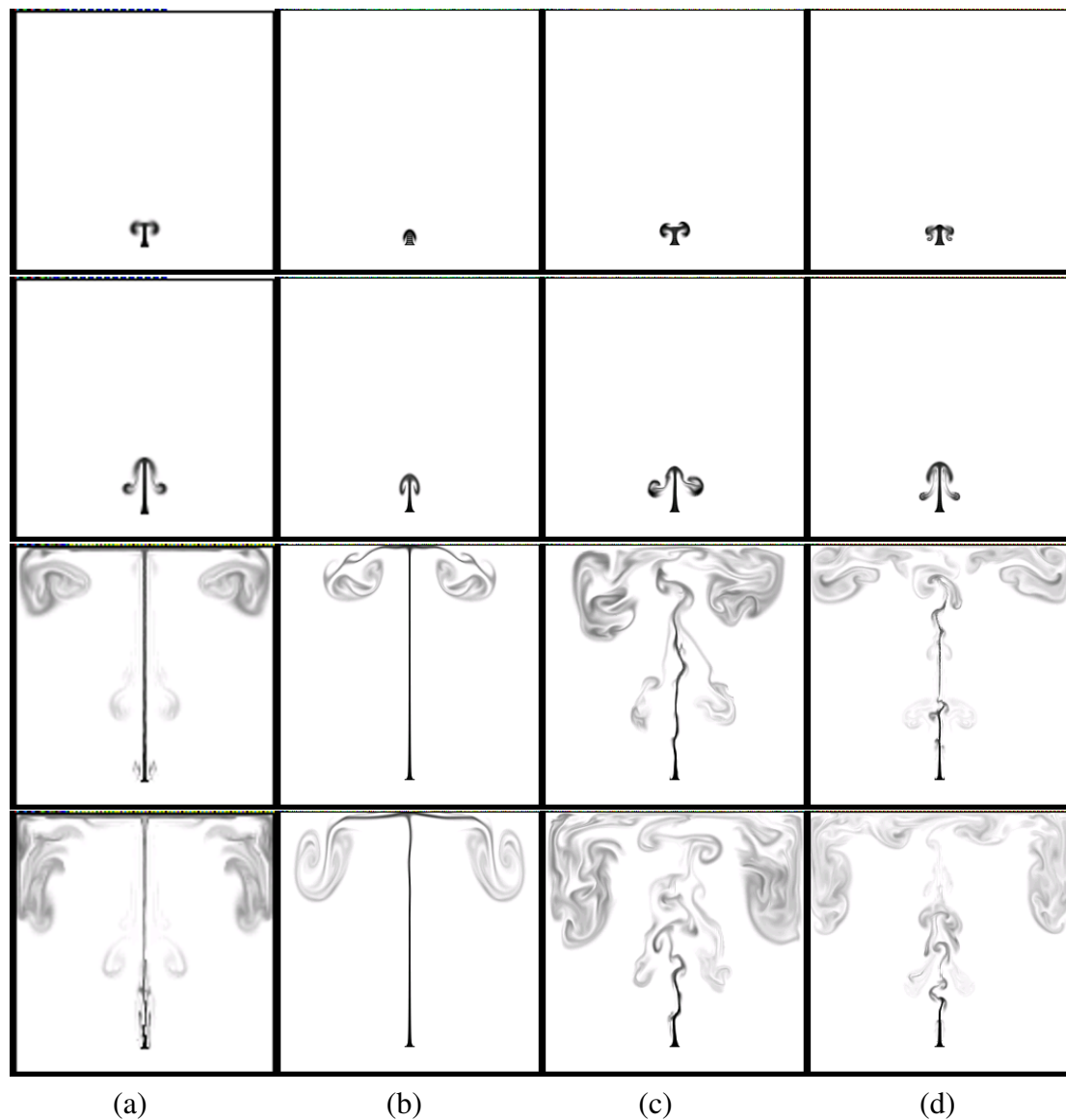


图 5-8 (a) 模拟器模拟的低精度结果 128×128 。(b) 通过上三次插值方法重构上采样到 256×256 。(c) 通过降采样矩阵的字典方法重构上采样到 256×256 。(d) 模拟器模拟的高精度结果 256×256

Fig 5-8 (a) 128×128 simulation result of low-resolution. (b) up-sampling to 256×256 by bicubic. (c) up-sample to 256×256 by down-sampling and dictionaries method. (d) 256×256 simulation result of high-resolution.

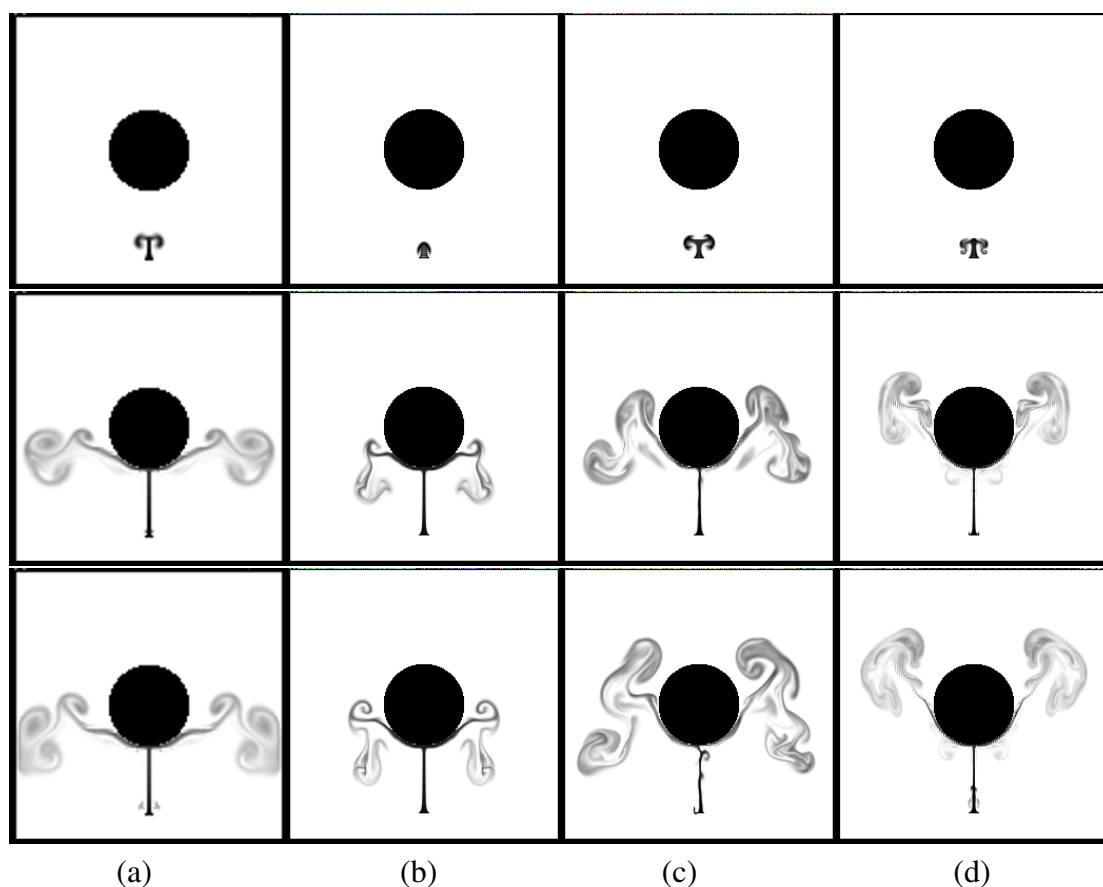


图 5-9 (a) 模拟器模拟的低精度结果 128×128 。(b) 通过上三次插值方法重构上采样到 256×256 。(c) 通过降采样矩阵且 patch 大小为 (8×8) 的字典方法重构上采样到 256×256 。(d) 模拟器模拟的高精度结果 256×256

Fig 5-9 (a): 128×128 simulation result. (b): up-sampling to 256×256 by bicubic. (c): up-sampling to 256×256 by dictionaries method (8×8) . (d): 256×256 simulation result.

如图 5-8 所示，从 (a) 到 (d) 依次为低精度网格模拟的动画效果、上三次插值上采样、降采样矩阵的字典方法重构上采样和高精度网格模拟的动画效果。观察图中动画效果，可以看出双三次插值重构上采样生成的动画丢失了很多细节，而降采样矩阵的训练字典方法则能恢复一些与高精度网格模拟出的动画类似的涡旋细节，但是其流体的形态却介于低—高精度的模拟结果之间。

图 5-9 给我们展示的是在有障碍物的情况下应用降采样矩阵的字典方法重构生成的流体动画。对比各动画效果图，我们可以得出与无障碍物的场景一样的结论，即应用降采样的过完备训练字典方法能够在一定程度上重构出高精度流体的细节。仔细观察我们可以发现相较于高精度网格的流体动画，通过双三

表 5-2 降采样训练字典方法的重构时间

Table 5-2 computation times of down-sampling dictionaries .

method	grid	computation time(s/frame)
low-resolution	128×128	0.046
bicubic	256×256	0.127
dictionaries(8×8)	256×256	1.68
dictionaries(16×16)	256×256	0.24
high-resolution	256×256	0.276

次插值上采样生成的流体动画效果的能量损耗很严重，因为其在相同帧的情况下，高精度网格生成的动画的烟雾上升的高度远高于上三次上采样重构出的动画的烟雾的高度，并且烟雾的耗散也较为严重。但是本文提出的重构方法则好很多。相反，本文方法重构出的动画的烟雾甚至比高精度模拟出来的更多一些。

表格 5-2 列出了在图 5-9 中所示的各种流体模拟方法，以及降采样过完备稀疏字典方法在使用不同的 patch 大小时，每帧的计算开销。比较表格中低精度网格和高精度网格的时间开销，我们可知，即使网格的放大因子只为 2，但是时间开销却增加了 6 倍。另外，我们实现的 C++ 版本模拟器本身就是一个运行效率比较高的模拟器，可从表中数据看出，当我们使用大小为(8×8) 的流体局部细微结构时，应用本文提出的重构上采样计算框架没有加速的空间。但是如果将我们的重构上采样流体动画计算框架应用到其他较慢的模拟器中，可以达到加速的目的，因为无论使用什么样的模拟器，我们的重构方法的时间开销是固定的。如果我们把表示流体局部细微结构的 patch 的大小改成(16×16)，即使是与该计算效率较高的模拟器相比，我们的重构上采样方法的计算速度也能比高精度网格的模拟器稍快一些。

另外，我们可以选择性地将过完备训练字典技术应用到速度场中，即只应用基于稀疏编码技术的过完备字典技术到有大量烟雾填充的局部细微结构中，而使用更加快速的上采样方法重构上采样其他局部细微结构，比如双三次插值上采样方法，这样可以在很大程度上提高流体模拟的速度，但是又不损失流体模拟的质量。如图 5-10 所示，比较了在完全应用以及选择性应用局部细微结构 patch 大小为(16×16) 到本文提出的重构上采样计算框架上的效果。比较第 (a) 列和第 (b) 列，可以看出应用基于稀疏编码的过完备字典技术的效果远好于使用双三次上采样重构上采样的效果，再比较第 (b) 列和第 (c) 列，可以看出选择性地应用过完备训练字典技术与完全使用过完备训练字典技术到流体模

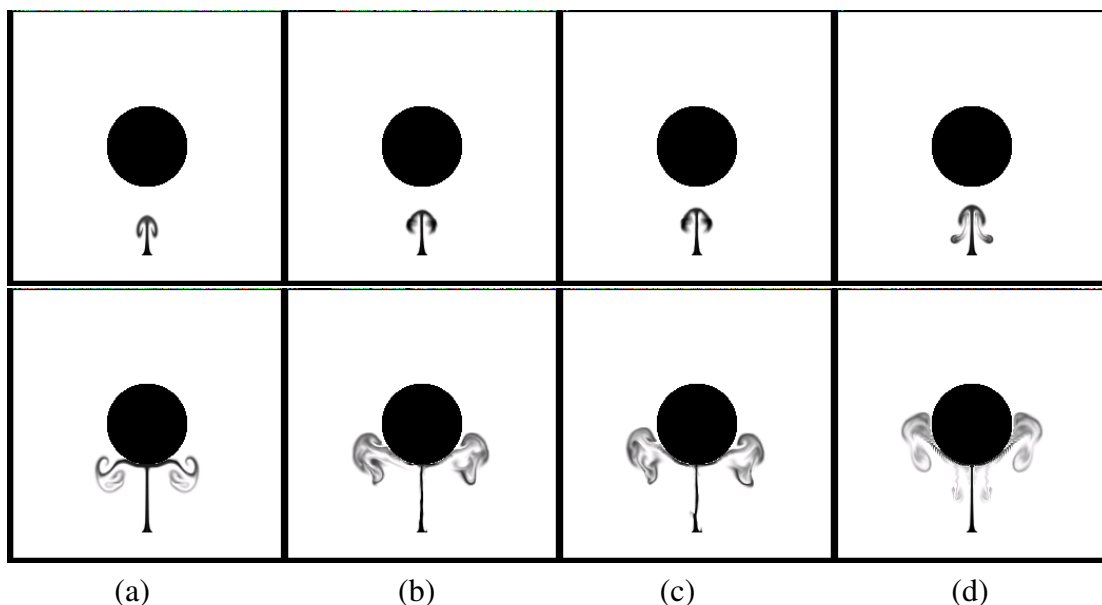


图 5-10 (a) 使用双三次上采样方法重构的流体动画。(b) 使用 patch 大小为 16×16 的过完备训练字典技术重构的流体动画。(c) 选择性地使用 patch 大小为 16×16 的过完备训练字典技术重构的流体动画。(d) 直接模拟的 256×256 高精度动画效果。

Fig 5-10 (a): up-sampling to 256×256 by bicubic result. (b): up-sample to 256×256 by dictionaries method (16×16). (c): up-sample to 256×256 by dictionaries method (16×16) with a bicubic interpolation to accelerate. (d): 256×256 simulation result.

拟框架中的动画效果几乎一样，而在最初几帧，选择性地应用过完备训练字典技术的时间开销只有 0.13s 每帧左右。

5.3 本章小结

首先，我们应用 L1SR 重构方法到本文提出的重构上采样基本框架中，验证本课题的可行性。但是从实验的结果看出，本文提出的重构上采样方法与框架能在一定程度上重构出类似于高精度网格速度场的涡旋细节，但是其模拟出的流体动画形态问题较大；其后我们又应用 scSR 重构上采样方法到本文提出的模拟框架中，该重构方法的动画效果虽然有所改善，但是因为 scSR 重构上采样方法并没有从根本上解决 L1SR 方法存在的问题，故在使用 C++ 模拟器之后，流体的形态问题又暴露了出来；最后，针对 L1SR 方法和 scSR 方法存在的共同问题，本文提出了应用降采样矩阵的过完备训练字典技术，并对比了该重构算法与双三次插值重构上采样方法的重构效果，可以看出本文提出的应用降采样矩阵的稀疏训练字典方法的计算框架能够重构出更多的流体细节，并且也

不存在应用双三次重构上采样方法时存在的能量耗散问题。

其次，如果以计算速度较慢的模拟器作为本文提出的重构上采样方法的基本模拟方法，本文方法能够在一定程度上提高模拟的速度；即使是以本文中使用的计算效率较高的 C++ 模拟器作为基本模拟方法，也可以通过增加流体局部细微结构的大小，或者选择性地应用基于稀疏编码的过完备训练字典方法，达到提高流体计算速度的目的。

第六章 全文总结

6.1 工作总结

在流体动画的基本模拟方法中, 欧拉网格方法是最为常用的模拟算法, 但是该算法的投影步骤是基本步骤中的瓶颈部分。目前, 虽然出现了一大批较为成熟的求解投影步骤的方法, 但是仍然不能解决精度提高时流体模拟的计算时间开销快速增长的问题, 导致很难快速高效地模拟大规模流体动画。

基于稀疏编码技术, 本文提出了一个低-高精度重采样的流体模拟的基本框架, 该重构上采样框架首次将基于稀疏编码技术的重构上采样技术应用到流体动画领域中。为了探索出一对适合流体低-高精度速度场数据的训练字典方法和重构上采样方法, 我们先后尝试了 Yang 提出的联合过完备训练字典方法、L1SR 重构上采样方法和 scSR 重构上采样方法, 但是这些现有的训练字典方法和重构上采样方法存在求解稀疏表示时, 学习训练字典和重构上采样时的最优空间不一致, 从理论上无法重构出准确的结果的问题, 导致重构生成的流体动画也存在严重的形态问题。但是, 通过 L1SR 和 scSR 重构上采样生成流体动画的实验, 验证了本文提出的重构上采样框架的可行性。

针对 L1SR 和 scSR 重构上采样方法在实验中表现出的问题, 我们从理论和实际的实验结果两个方面分析其原因, 提出了本文的应用降采样矩阵的过完备训练字典方法。根据本文的实验结果可知, 本文提出的重构上采样方法与流体动画重构上采样计算框架可以在一定程度上重构出类似于高精度网格模拟出的流体动画的细节。同时, 该方法具有很强的通用性, 并且易于移植。另外, 如果以计算速度较慢的模拟器作为本文框架的基本模拟方法, 本文方法能够在一定程度上提高模拟的速度; 即使使用计算效率较高模拟器作为基本模拟方法, 也可以通过增加流体局部细微结构的大小, 或者选择性地应用基于稀疏编码的过完备训练字典方法, 达到提高流体计算速度的目的。

6.2 存在的问题和未来工作展望

在实验的过程中, 我们发现本文提出的方法存在以下一些问题:

- 从实验结果可以看出,应用本文提出的基于稀疏编码的过完备训练字典的重构方法重构上采样速度场,能够重构出比双三次插值方法多很多的高精度流场细节。但是,本文提出的方法与框架模拟出的流体动画的形态与高精度流体动画的形态差别很大。因为重构算法不可能生成 100% 的准确的重构结果,故目前这个问题无法解决。
- 在我们的实验中,我们对速度场的水平分量和垂直分量单独做的重构上采样,并且训练字典也是单独训练生成的,故在我们的训练字典中,不能表示速度场的水平分量和垂直分量之间的关系,故我们不能保证重构结果的水平速度分量和垂直速度分量之间的关系是否正确。为了解决这个问题,在今后的研究中,可以考虑将速度场的水平分量和垂直分量放到一个向量中训练。另外,这样处理之后,可以将原来需要重构两次的计算开销放到一次计算中,故能减少一半的计算时间耗费。
- 根据我们的实验结果,可以看出本文方法重构上采样生成的流体动画仍然存在形态部队称的问题,故在今后的工作中,我们还需要分析产生不对称问题的原因,并寻找相应的解决方案。

另外,在实验部分只验证了 2D 场景下的可行性与适用性。本文提出通过增加第三维流体速度场数据的采样与训练,建立对应的过完备稀疏字典,然后在流体速度场的重构上采样步骤中重构流体速度场的三个分量,实现本文提出的过完备稀疏字典技术向 3D 流体模拟场景的扩展。但是,在具体的实现中,存在以下一些问题和待完成的工作:

- 提高流体局部细微结构的大小时,稀疏训练字典的列向量维度增长太快。基于稀疏编码的过完备稀疏训练字典技术假设输入的高精度信号是一个列向量,为了使流体单个方向上的速度场数据适用于过完备稀疏字典方法,本文采用的解决方案是将 2D 或者 3D 的速度场数据扁平化处理,然后存储到一个列向量中。故假设使用的流体局部细微结构的大小为 n ,那么在 2D 场景下,稀疏训练字典的每一列的维度为 n^2 ,而在 3D 场景下,稀疏训练字典的每一列的维度则能达到 n^3 。故在 3D 场景中,不能使用过大的流体局部细微结构。另外,列向量信号维度的快速增长,也给训练稀疏字典时高精度流体速度场训练样本数据的采集带来了困难。

- 在本文提出的降采样联合训练字典方法中，需要一个降采样矩阵辅助计算适用于流体低精度速度场数据的过完备稀疏字典。但是要设计这样的降采样矩阵，需要将扁平化的高精度训练字典还原到 3D 空间，设计一个降采样假想的 3D 高精度稀疏字典的 3D 降采样矩阵，再将其映射成 2D 矩阵的形式。
- 重构上采样 3D 低精度流体速度场数据时，需要逐一处理 3D 的流体局部细微结构。为了使该局部细微结构可以应用过完备稀疏字典方法重构上采样到高精度速度场空间，需要在应用过完备稀疏字典重构方法前，对其做扁平化处理到一个列向量中；在应用重构上采样方法结束后，再将其还原到 3D 空间中。

根据上述描述，我们可以总结将本文的流体计算框架扩展到 3D 场景主要需要注意的问题为两点，即大矩阵数据的处理和不同维度数据之间的转换。在后续的工作中，我们会设计更详细的方案解决上述提出的问题。

参考文献

- [1] KIM T, THÜREY N, JAMES D, et al. Wavelet turbulence for fluid simulation[C]//ACM Transactions on Graphics (TOG). [S.l.]: [s.n.], 2008, 27:50.
- [2] LOSASSO F, GIBOU F, FEDKIW R. Simulating water and smoke with an octree data structure[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2004, 23(3):457–462.
- [3] GOLAS A, NARAIN R, SEWALL J, et al. Large-scale fluid simulation using velocity-vorticity domain decomposition[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6):148.
- [4] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2006, 52(4):1289–1306.
- [5] CANDÈS E J, TAO T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2006, 52(12):5406–5425.
- [6] CANDÈS E J, WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. Signal Processing Magazine, IEEE, 2008, 25(2):21–30.
- [7] YANG J, WANG Z, LIN Z, et al. Coupled dictionary training for image super-resolution[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2012, 21(8):3467–3478.
- [8] FOSTER N, METAXAS D. Modeling the motion of a hot, turbulent gas[C]//Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques.[S.l.]: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1997:181–188.
- [9] STAM J. Stable fluids[C]//Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques.[S.l.]: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1999:121–128.
- [10] FEDKIW R, STAM J, JENSEN H W. Visual simulation of smoke[C]//Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques.[S.l.]: ACM, 2001:15–22.
- [11] ENRIGHT D, MARSCHNER S, FEDKIW R. Animation and rendering of complex water surfaces[C]//ACM Transactions on Graphics (TOG).[S.l.]: ACM, 2002, 21:736–744.
- [12] MÜLLER M, CHARYPAR D, GROSS M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C]//Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation.[S.l.]: Eurographics Association, 2003:154–159.
- [13] ADAMS B, PAULY M, KEISER R, et al. Adaptively sampled particle fluids[C]//ACM Transactions on Graphics (TOG).[S.l.]: ACM, 2007, 26:48.

- [14] ANGELIDIS A, NEYRET F. Simulation of smoke based on vortex filament primitives[C]//Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation.[S.l.]: ACM, 2005:87–96.
- [15] ANGELIDIS A, NEYRET F, SINGH K, et al. A controllable, fast and stable basis for vortex based smoke simulation[C]//Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation.[S.l.]: Eurographics Association, 2006:25–32.
- [16] DOBASHI Y, MATSUDA Y, YAMAMOTO T, et al. A fast simulation method using overlapping grids for interactions between smoke and rigid objects[C]//Computer Graphics Forum. .[S.l.]: [s.n.] , 2008, 27:477–486.
- [17] ZHU B, YANG X, FAN Y. Creating and preserving vortical details in sph fluid[C]//Computer Graphics Forum. .[S.l.]: [s.n.] , 2010, 29:2207–2214.
- [18] YOON J C, KAM H R, HONG J M, et al. Procedural synthesis using vortex particle method for fluid simulation[C]//Computer Graphics Forum. .[S.l.]: [s.n.] , 2009, 28:1853–1859.
- [19] LENTINE M, ZHENG W, FEDKIW R. A novel algorithm for incompressible flow using only a coarse grid projection[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2010, 29(4):114.
- [20] TREUILLE A, LEWIS A, POPOVIĆ Z. Model reduction for real-time fluids[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2006, 25(3):826–834.
- [21] WICKE M, STANTON M, TREUILLE A. Modular bases for fluid dynamics[C]//ACM Transactions on Graphics (TOG). .[S.l.]: [s.n.] , 2009, 28:39.
- [22] KROEGER K L. Face recognition breakthrough[J]. Communications of the ACM, 2009, 52(8):18–19.
- [23] RUBINSTEIN R, BRUCKSTEIN A M, ELAD M. Dictionaries for sparse representation modeling[J]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6):1045–1057.
- [24] MALLAT S G, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 1993, 41(12):3397–3415.
- [25] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM journal on scientific computing, 1998, 20(1):33–61.
- [26] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 1995, 41(3):613–627.
- [27] YANG J, WRIGHT J, HUANG T S, et al. Image super-resolution via sparse representation[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2010, 19(11):2861–2873.
- [28] YANG J, WRIGHT J, HUANG T, et al. Image super-resolution as sparse representation of raw image patches[C]//Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on. .[S.l.]: [s.n.] , 2008:1–8.

- [29] MARWAH K, WETZSTEIN G, BANDO Y, et al. Compressive light field photography using overcomplete dictionaries and optimized projections[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2013, 32(4):46.
- [30] BRIDSON R, MÜLLER-FISCHER M. Fluid simulation: SIGGRAPH 2007 course notes Video files associated with this course are available from the citation page[M].[S.l.]: ACM, 2007.
- [31] HARLOW F H, WELCH J E, et al. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. *Physics of fluids*, 1965, 8(12):2182.
- [32] STAM J. Real-time fluid dynamics for games[C]//*Proceedings of the game developer conference*. [S.l.]: [s.n.], 2003, 18:25.
- [33] FOSTER N, FEDKIW R. Practical animation of liquids[C]//*Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. [S.l.]: [s.n.], 2001:23–30.
- [34] SELLE A, FEDKIW R, KIM B, et al. An unconditionally stable MacCormack method[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2008, 35(2-3):350–371.
- [35] KIM B, LIU Y, LLAMAS I, et al. Flowfixer: Using bfecc for fluid simulation[C]//*proceedings of the First Eurographics conference on Natural Phenomena*. [S.l.]: [s.n.], 2005:51–56.
- [36] DUPONT T F, LIU Y. Back and forth error compensation and correction methods for removing errors induced by uneven gradients of the level set function[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 190(1):311–324.
- [37] MOLEMAKER J, COHEN J M, PATEL S, et al. Low viscosity flow simulations for animation[C]//*Proceedings of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. [S.l.]: [s.n.], 2008:9–18.
- [38] AHARON M. Overcomplete dictionaries for sparse representation of signals[D].[S.l.]: Technion-Israel Institute of Technology, Faculty of Computer Science, 2006.
- [39] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A. K-svd: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2006, 54(11):4311–4322.
- [40] LEE H, BATTLE A, RAINA R, et al. Efficient sparse coding algorithms[C]//*Advances in neural information processing systems*. [S.l.]: [s.n.], 2006:801–808.
- [41] RAO B D, KREUTZ-DELGADO K. Deriving algorithms for computing sparse solutions to linear inverse problems[C]//*Signals, Systems & Computers*, 1997. *Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on*. [S.l.]: [s.n.], 1997, 1:955–959.
- [42] MACCORMACK R. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering[J]. *Journal of spacecraft and rockets*, 2003, 40(5):757–763.

- [43] MCADAMS A, SIFAKIS E, TERAN J. A parallel multigrid Poisson solver for fluids simulation on large grids[C]//Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation. .[S.l.]: [s.n.] , 2010:65–74.
- [44] CHANG H, YEUNG D Y, XIONG Y. Super-resolution through neighbor embedding[C]//Computer Vision and Pattern Recognition, 2004. CVPR 2004. Proceedings of the 2004 IEEE Computer Society Conference on. .[S.l.]: [s.n.] , 2004, 1:I–I.
- [45] FREEMAN W T, JONES T R, PASZTOR E C. Example-based super-resolution[J]. Computer Graphics and Applications, IEEE, 2002, 22(2):56–65.
- [46] KIM K I, KWON Y. Example-based learning for single-image super-resolution[M]//Pattern Recognition.[S.l.]: Springer, 2008:456–465.
- [47] YANG J, LIN Z, COHEN S. Fast image super-resolution based on in-place example regression[C]//Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2013 IEEE Conference on. .[S.l.]: [s.n.] , 2013:1059–1066.
- [48] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Online dictionary learning for sparse coding[C]//Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning. .[S.l.]: [s.n.] , 2009:689–696.
- [49] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Online learning for matrix factorization and sparse coding[J]. The Journal of Machine Learning Research, 2010, 11:19–60.
- [50] YANG J, WANG Z, LIN Z, et al. Bilevel sparse coding for coupled feature spaces[C]//Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2012 IEEE Conference on. .[S.l.]: [s.n.] , 2012:2360–2367.
- [51] EFRON B, HASTIE T, JOHNSTONE I, et al. Least angle regression[J]. The Annals of statistics, 2004, 32(2):407–499.
- [52] TIBSHIRANI R. Regression shrinkage and selection via the lasso[J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1996:267–288.

致 谢

本文课题是我在攻读硕士学位期间所研究的工作，经过两年多的努力，我不仅对图形学有了一个更深刻的理解，还对流体动画技术和基于稀疏编码的过完备稀疏字典技术有了更深刻的感悟。在此，我要感谢所有关心和帮助过我的亲人、老师、同学和朋友。

首先，我要感谢杨老师在这两年多的时间里，对我的科研工作的支持与帮助。在科研的路上，我有过彷徨和疑惑，感谢杨老师对我的谆谆教诲。

其次，我要感谢钱宜婧、杨双才同学给我的帮助。我跟钱宜婧同学的课题十分相关，感谢她对我研究工作的帮助与陪伴；感谢杨双才同学慷慨地提供 C++ 基础流体模拟器，让我可以更专注地研究自己的课题。

然后，感谢实验室的各位学长，感谢你们的答疑解惑，感谢你们对师妹的关心与照顾。

最后，感谢 DALAB 的所有师兄姐妹们，在实验室共度的欢乐时光里，你们的热情洋溢、活泼开朗，让我体会到成为 DALAB 大家庭中的一员是一件多么荣幸，多么值得珍惜的事情。

本论文研究工作得到国家自然科学基金项目 (No. 61173105, No. 61373085) 的资助。

攻读学位期间发表的学术论文目录

- [1] Huan Li, Xubo Yang. Fluid Simulation Using Overcomplete Dictionaries based on Sparse Coding[C]. Proceedings of the 13th ACM SIGGRAPH International Conference on Virtual-Reality Continuum and its Applications in Industry. ACM, 2014.