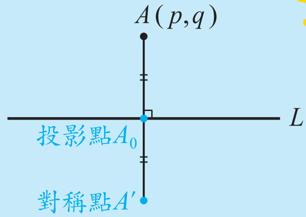
點對直線的投影點、對稱點與點線距

平面上點 $A(p,q)$ 與直線 $L: ax+by=c$，可推得：

(1)投影點為 $A_0\left(p-\dfrac{a(ap+bq-c)}{a^2+b^2},\ q-\dfrac{b(ap+bq-c)}{a^2+b^2}\right)$。

(2)對稱點為 $A'\left(p-\dfrac{2a(ap+bq-c)}{a^2+b^2},\ q-\dfrac{2b(ap+bq-c)}{a^2+b^2}\right)$。

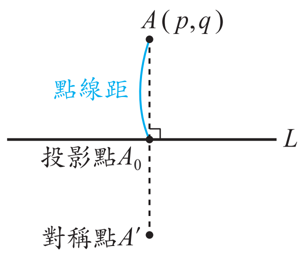


知 A 到投影點 A_0 的線段長度，即為 A 到 L 的最近距離，稱此最近距離為點線距，記為 $d(A,L)$。利用投影點公式可推得 $d(A,L)=\overline{AA_0}=\dfrac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

2. 平行線間距公式：平面上兩平行直線 $L_1: ax+by=c_1$ 與 $L_2: ax+by=c_2$，可推得兩線的間距為 $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。只要 L_1 上任取一點 P，算出 $d(P,L_2)$ 即可。

3. 角平分線方程式：相交兩直線 $L_1: a_1x+b_1y=c_1$、$L_2: a_2x+b_2y=c_2$ 的角平分線有兩條，為銳角平分線與鈍角平分線，方程式為 $\dfrac{a_1x+b_1y-c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y-c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$。

平面上點 $A(p,q)$ 與直線 $L: ax+by=c$，則 A 到 L 的最近距離為 $d(A,L)=\overline{AA_0}=$ ______________，稱為「點線距」。



證 過 A 與 L 垂直的直線設為 $bx-ay=k$，代 A 得 $k=bp-aq$，則：

$$A_0\text{為}\begin{cases}ax+by=c & \cdots①\\ bx-ay=bp-aq & \cdots②\end{cases},\ \begin{cases}①\times a+②\times b\text{ 得 }(a^2+b^2)x=ac+b^2p-abq\\ ①\times b-②\times a\text{ 得 }(a^2+b^2)y=bc-abp+a^2q\end{cases}$$

$$\therefore A_0(x,y)=\left(\frac{ac+b^2p-abq}{a^2+b^2},\frac{bc-abp+a^2q}{a^2+b^2}\right)=\left(p-\frac{a(ap+bq-c)}{a^2+b^2},q-\frac{b(ap+bq-c)}{a^2+b^2}\right)$$

$$\text{則 }\overline{AA_0}=\sqrt{\frac{a^2(ap+bq-c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2(ap+bq-c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(ap+bq-c)^2\cdot(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{|ap+bq-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

這題常考

範例 1 點對直線的投影與對稱

點對直線的投影與對稱，若不背公式就只好解聯立了。

1. 設點 $A(3,5)$ 對直線 L 的投影點為 $A_0(7,-1)$，求 A 對 L 的對稱點 A' 坐標為 ______________，L 的方程式為 ______________。

解