序列求和题解

本题明显是一个将非线性递推关系中的多项式系数展开后构造线性递推关系状态转移矩阵 A，通过求解 $x_n = A^n x_0$ 来获得最终答案。但是注意到矩阵的阶数$k = p(q+1)+1$，最大可以达到 600，而直接使用矩阵快速幂的复杂度为$O(k^3 logn)$，无法在给定时间内完成，因此需要有更高效的求解$A^n x_0$的算法。

假设矩阵 A 的特征多项式为$p(x)$，由 Hamilton–Cayley 定理可得，$p(A) = 0$，这样可以得到$A^n = p(A) * q(A) + r(A) = r(A) = A^n \% p(A)$，因此，只需求出$x_n = A^n x_0 = r(A) x_0$ 即可。又因为 $p(x)$ 为 k 阶多项式，因此$r(x)$为 k-1 阶多项式，假设$r(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \cdots + \theta_{k-1} x^{k-1}$，带入 A 可得：

$$x_n = r(A)x_0 = \theta_0 I x_0 + \theta_1 A x_0 + \cdots + \theta_{k-1} A^{k-1} x_0$$

$$x_n = r(A)x_0 = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_{k-1} x_{k-1}$$

$x_0 \ldots x_{k-1}$可以由初值和递推关系直接求出，因此要求得x_n只需要求得$r(x) = x^n \% p(x)$ 的各项系数即可，与原矩阵 A 无关，在这里已经将问题由矩阵的幂变成了多项式的幂的问题，而多项式乘法和多项式取模的复杂度均不超过$O(k^2)$，因此通过快速幂可以在 $O(k^2 logn)$ 时间内求得 $r(x)$ 各项系数，从而解决原问题。

现在的问题就是如何求的 A 的特征多项式$p(x)$，以样例 1 为例列出线性递推关系如下：

$$\begin{bmatrix} S_n \\ (n+1)F_{n+1} \\ (n+1)F_n \\ F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_{n-1} \\ nF_n \\ nF_{n-1} \\ F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$$

注意到该矩阵除第一行第一列剩下子矩阵如果以$p * p$进行分块的话，可以得到一个上三角阵，而主对角线上的元素均为序列 F 递推关系的状态转移矩阵，假设为 B。而已知 B 的特征多项式即为序列 F 递推关系的特征多项式

$$h(x) = x^p - a_1 x^{p-1} - a_2 x^{p-2} \ldots - a_{p-1} x - a_p$$

而整个分块阵为上三角阵，因此整个矩阵 A 的特征多项式为

$$p(x) = (x-1) * h^{q+1}(x)$$

求得$p(x)$可以在$O(k^2)$时间内解决，而总时间复杂度为$O(k^2 logn)$。