Analyse numérique

Manel Tayachi

Polytech, E2I4

2021-2022

Plan

Avant de commencer

- Chaque cours est à travailler de manière personnelle durant les 4 h
- Il ne faut pas hésiter à utiliser d'autres supports de cours (livres de la bibliothèque, cours sur internet etc.)
- Vous apprendrez peu si vous n'écrivez pas vos propres programmes !
- **Références :** Analyse Numérique pour ingénieurs, André Fortin Editions de l'école polytechnique de Montréal
  A. Quarteroni, F. Saleri et P. Gervasio, Calcul Scientifique , Springer-Verlag France, Paris, 2010
  Jean-Pierre Demailly Analyse numérique et équations différentielles
- **Dates à retenir : à l'état actuel de l'EDT TP1 le 11 février, TP2 le 29 mars et examen le 15 avril**
  En gros pour les TPs notés : deux séances de cours suivies d'un TP.
  Dernière séance : examen cumulatif.

Plan

Motivations

- Dans la résolution de certains problèmes numériques on est souvent face au problème suivant : on veut calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour un très grand nombre de valeurs de x, mais :
  - la fonction f n'est connue qu'en certains points expérimentaux x_0, x_1,...,x_n
  - la fonction est évaluable par un calcul coûteux.
- **Principe :** approcher la fonction par une fonction simple, facile à évaluer !
- **Problème :** il existe une infinité de solutions possibles !

Approximation de fonctions

- Il faut se restreindre à une à une famille de fonctions polynômes, exponentielles, trigonométriques, etc.
- **Quelques méthodes d'approximation de fonctions** :
  - Interpolation polynomiale : polynôme P de degré au plus n tel que $P(x_i) = f(x_i)$, pour $i = 0, ..., n$
    1. Polynôme de Lagrange
    2. Différences finies de Newton

       Les deux méthodes calculent le même polynôme !
  - Interpolation par splines : polynômes par morceaux
  - Interpolation d'Hermite : $P(x_i) = f(x_i)$ et $P'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 0, ..., n$
  - La méthode **des moindres carrés :** on chercher une fonction $\tilde{f}$ dans un ensemble $\tilde{F}$ à déterminer qui minimise l'écart entre les deux courbes aux points d'abscisse x_i pour $i = 0, ..., n$:

$$\sum_{i=0}^{n} \left| \tilde{f}(x_i) - f(x_i) \right|^2 = \inf_{g \in \tilde{F}} \sum_{i=0}^{n} |g(x_i) - f(x_i)|^2$$

Interpolation polynomiale : aspects algébriques

- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. Il est de dimension $n+1$
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré $\leq n$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- **Bases de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:**

1. La base canonique : $(1, x, x^2, \cdots, x^n)$
2. La base de Lagrange : soient $n+1$ points distincts x_i réels pour $i = 0, ..., n$, alors la famille $(L_0(x), L_1(x), \cdots, L_n(x))$ où

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

   est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
3. La base de Newton :
   $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1) \times ... \times (x - x_{n-1})\}$

Interpolation polynomiale : aspects algébrique

- **Rappel :** Une famille libre est une famille de vecteurs linéairement indépendants. La seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.
- Pour montrer qu'une famille de <u>p vecteurs</u> est une base d'un espace vectoriel de <u>dimension p</u> il suffit de montrer qu'elle est libre

Théorème

Étant donnés $n+1$ nombres réels $(x_0, x_1, ..., x_n)$ distincts et $n+1$ nombres réels $(y_0, y_1, ..., y_n)$, il existe un unique polynôme P de degré n tel que :

$$\forall i = 0, ..., n \qquad P(x_i) = y_i$$

Interpolation de Vandermonde

- Interpoler à l'aide d'un polynôme une fonction sur $n+1$ valeurs revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Ce système admet une unique solution : il suffit de voir que le noyau de la matrice est réduit au vecteur nul
- Numériquement c'est une **mauvaise idée** de résoudre ce système parce que la matrice est mal conditionnée :
  - Pour n assez grand , mauvais comportement
  - Pour des abscisses petites, mauvais comportement
  - Pour des abscisses très proches, mauvais comportement

Interpolation de Vandermonde

- Exemple : calculer le polynôme passant par les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$

Interpolation de Lagrange

- Une combinaison linéaire de polynômes est un polynôme
- Si $P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + ... + y_nP_n(x)$ tel que :

$$P_i(x_i) = 1, \qquad \text{et} \qquad P_i(x_j) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i$$

alors

$$P(x_i) = y_i \; \forall i = 0, ..., n$$

- Choix de $P_i \Longrightarrow$ base de Lagrange $P_i = L_i$:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0...n,$$

- Le polynôme P qui interpole une fonction f aux points $x_i, i = 0...n$ s'écrit, dans la base de Lagrange,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_iL_i(x)$$

Interpolation de Lagrange : exemple 1

- On connaît 2 points (x_0, y_0) et (x_1, y_1)
- On cherche la droite $y = ax + b$ qui passe par les 2 points. On a alors :
  - $y_0 = ax_0 + b$ et $y_1 = ax_1 + b$
  - On en déduit $a = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$ et $b = \dfrac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$
- L'équation de la droite est donc :

$$y = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

- En réécrivant cette expression on obtient :

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Trouver le polynôme de Lagrange qui passe par les points $(2, 3)$ et $(5, -6)$

Interpolation de Lagrange : exemple 2

Calculer le polynôme de Lagrange passant par les points $(0,1),(2,5)$ et $(4,17)$

Interpolation de Lagrange : exemple 3

Calculer le polynôme de Lagrange passant par les points $(0, 1), (1, 2), (2, 9)$ et $(3, 28)$

Interpolation de Lagrange : algorithme

Ecrire une fonction Lagrange en pseudo-langage qui prend en entrée les coordonnées des points d'interpolation $x = [x_0, x_1, \cdots, x_n]$ et $y = [y_0, y_1, \cdots, y_n]$ ainsi qu'un vecteur X où sera évalué le polynôme d'interpolation et rend en sortie un vecteur $Y = P(X)$.

Fonction Y = lagrange(X,x,y)

$Y = 0$

Pour i allant de 1 jusqu'à $n+1$ **faire**

  $L = 1$

  Pour j allant de 1 jusqu'à $n+1$, $j \neq i$ **faire**

    $L \leftarrow L * \frac{X - x(j)}{x(i) - x(j)}$

  Fin Pour

  $Y \leftarrow Y + y(i) * L$

Fin Pour

Interpolation de Newton

- **Inconvénient** de la méthode d'interpolation de Lagrange : si on rajoute un noeud on change complètement les interpolants de base de Lagrange $\Longrightarrow$ recalculer entièrement le polynôme
- **Solution** $\Longrightarrow$ utiliser plutôt la base de Newton : $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})\}$
- On peut ré-écrire $P(x)$:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

- Calcul des coefficients a_i : méthode des différences divisées
- Dans la suite on note :

$$\begin{cases} \omega_0(x) = 1, \\ \omega_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \ k = 1...n. \end{cases}$$

Interpolation de Newton : différences divisées

- Supposons que les valeurs à interpoler y_i soient les images d'une certaine fonction f, c'est-à-dire $y_i = f(x_i)$, $i = 0...n$
- Le polynôme d'interpolation de f s'écrit, dans la base de Newton,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\omega_k(x),$$

où les $f[x_0, ..., x_k]$ sont les *différences divisées* de Newton, calculées par la formule de récurrence suivante :

$$f[x_i, ..., x_k] = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } k = i, \\ \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_k] - f[x_i, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_i} & \text{si } k > i. \end{cases}$$

Interpolation de Newton : différences divisées

On peut représenter cette formule par un tableau, dans lequel le terme (i, j) est calculé à partir des éléments $(i-1, j-1)$ et $(i, j-1)$:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & \boxed{f[x_1]} & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & \boxed{f[x_2]} & \boxed{f[x_1, x_2]} & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_n & f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \dots & f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]
\end{array}
$$

Interpolation de Newton : exemple

Calculer le polynôme de Lagrange passant par les points (0,1), (1,2), (2,9) et (3,28)

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \boxed{1} & & & \\
1 & 2 & \boxed{1} & & \\
2 & 9 & 7 & \boxed{3} & \\
3 & 28 & 19 & 6 & \boxed{1}
\end{array}
$$

On a donc :

$$P_3(x) = 1 + 1(x-0) + 3(x-0)(x-1) + 1(x-0)(x-1)(x-2) = x^3 + 1$$

Fonction P = interpolationNewton(X,x,y)

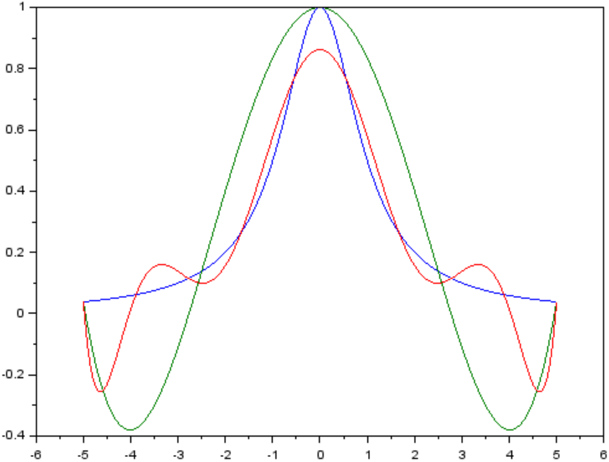
n = (nombre d'éléments de x) - 1
Pour k allant de 1 jusqu'à $n+1$ **faire**
  $a(k) = y(k)$
Fin Pour
Pour s allant de 1 jusqu'à n **faire**
  Pour k allant de $n+1$ jusqu'à $s+1$ par pas de -1 **faire**

$$a(k) = \frac{a(k) - a(k-1)}{x(k) - x(k-s)}$$

  Fin Pour
Fin Pour
P = a(n+1)
Pour i allant de $n+1$ à 2 par pas de -1 **faire**
  P=P*(X-x(i-1))+a(i-1) ; // algorithme d'évaluation de Horner
Fin Pour

Phénomène de Runge : à bas les polynômes !

Exemple : on considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$



Phénomène de Runge : explication

Théorème

On suppose que f est $n+1$ dérivable sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a; b]$, si on note I le plus petit intervalle fermé contenant x et les x_i alors il existe $\xi \in I$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Le phénomène de Runge s'explique par :

- l'amplitude des dérivées de la fonction de Runge qui augmente très rapidement lorsque n augmente
- Le choix des x_i qui peut rendre $(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ très grand

Interpolation par splines cubiques

- Principe :
  - on approche la courbe par morceaux (localement)
  - on prend des polynômes de degré faible, ici 3, pour éviter les oscillations
- On appelle spline cubique d'interpolation une fonction g qui vérifie les propriétés suivantes :
  - g est deux fois continûment dérivable sur $[a; b]$ où $a = x_0$ et $b = x_n$)
  - g coïncide sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ avec un polynôme de degré) inférieur ou égal à 3
  - $g(x_i) = y_i$ pour $i = 0...n$)
  - Pour que g soit parfaitement déterminer on rajoute deux conditions, par exemple $g"(a) = g"(b) = 0 \Rightarrow$ spline naturelle
- Voir la commande **splin** de Scilab

Maintenant à vous de jouer !

1. Programmer la méthode de Lagrange et la méthode des différences divisées pour $n = 10$ et $n = 20$ (soit $n + 1$ points d'interpolation) et tester sur la fonction $f(x) = \sin(x)$ avec x appartenant à l'intervalle $[-5, 5]$
2. Comparer les résultats obtenus pour les 2 types d'échantillonnage. Dans tous les cas tracer le graphique de la fonction f et de son approximation par interpolation (utiliser par exemple $N = 200$ points dits d'évaluation). Attention ! Ne pas confondre les points d'interpolation qui permettent de calculer les coefficients du polynôme d'interpolation et qui sont au nombre de n+1, avec les points d'évaluation ou l'on veut évaluer le polynôme d'interpolation et qui sont au nombre de $N + 1$.
3. Etudier également les erreurs d'interpolation
4. Comparer avec la méthode du spline cubique
5. Tester maintenant les méthode des différences divisées et de spline cubique sur la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$