Statistiques

Nathalie GUYADER
nathalie.guyader@gipsa-lab.fr

Année 2021-2022

GRENOBLE INP UGA POLYTECH GRENOBLE

Chapitres précédents

- Séance 1:
  - Introduction générale
  - Chapitre 1: Probabilités
  - Chapitre 2: Variables aléatoires
  - Chapitre 3: Statistiques descriptives
- Séance 2:
  - Introduction à Python
  - Prise en main d’un Jupyter Notebook
  - TP1: Python et Statistiques descriptives
- Séance 3:
  - TP2: Statistiques descriptives (données sur les véhicules) et compte-rendu sous Jupyter Notebook
- Séance 4
  - Chapitre 4: Estimation par intervalle de confiance Partie 1 : théorie de l’échantillonnage
  - TP3
- Séance 5
  - Chapitre 4: Estimation par intervalle de confiance Partie 2 : estimation
  - Fin du TP3

Chapitre 5 - Tests d'hypothèse

Introduction aux tests

Le principe général d’un test d’hypothèse peut s’énoncer comme suit :

Soit une population dont les éléments possèdent un caractère (mesurable ou dénombrable) et dont une valeur est inconnue. Une hypothèse est formulée sur la valeur du paramètre ; cette formulation résulte de considérations théoriques ou pratiques. On veut porter un jugement sur cette hypothèse, sur la base des résultats obtenus sur un échantillon prélevé au hasard de cette population.
Il est bien évident que la statistique (ou variable d’échantillonnage) servant d’estimation au paramètre de la population ne prendra pas une valeur rigoureusement égale à la valeur théorique proposée dans l’hypothèse ; elle comporte des fluctuations d’échantillonnage qui sont régies par des distributions connues.

Pour décider si l’hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permettra de conclure si l’écart observé entre la statistique obtenue de l’échantillon et celle du paramètre spécifié dans l’hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l’échantillonnage.
La construction d’un test d’hypothèse consiste effectivement à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique (ou l’écart réduit), en supposant l’hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l’échantillonnage.

Définitions

Hypothèse statistique :

Une hypothèse statistique est énoncée (une affirmation) concernant les caractéristiques (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations) d'une population.

Test d'hypothèse :

Un test d'hypothèse (ou test statistique) est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base des résultats d'échantillon, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques. Les hypothèses statistiques qui sont envisagées a priori s'appellent : l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.

Hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 :

L'hypothèse selon laquelle on **fixe a priori un paramètre de la population** à une valeur particulière s'appelle l'hypothèse nulle H_0. N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse nulle s'appelle l'hypothèse alternative H_1.

C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie.

Remarque :

L'hypothèse nulle peut aussi affirmer que la différence entre les valeurs de deux paramètres est nulle, ou affirmer que la distribution théorique des observations d'une population a une forme particulière.

La décision de favoriser une hypothèse est basée sur une information partielle : les résultats d'un échantillon. Il est statistiquement impossible de prendre toujours la bonne décision.

Seuil de signification d'un test d'hypothèse

Le risque, consenti à l'avance et que nous notons α, de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (et de favoriser l'hypothèse alternative) s'appelle le seuil de signification du test et s'énonce en probabilité comme suit :

α = P(rejeter H_0 / H_0 vraie) = P(choisir H_1 / H_0 vraie)

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique (ou sur celle de l'écart réduit) une **région de rejet** de l'hypothèse nulle (également appelée région critique). L'aire de cette région correspond à la probabilité α.

La valeur observée de la statistique (ou de l'écart réduit) déduite des résultats de l'échantillonnage appartient, soit à la région de rejet H_0, soit à la région de non-rejet de H_0.

<u>Remarques :</u>

Les seuils de signification les plus utilisés sont $\alpha=0.05$ et $\alpha=0.01$.

La statistique qui convient pour le test est donc une V.A. dont la valeur observée sera utilisée pour décider du « rejet » ou du « non-rejet » de l'hypothèse nulle.
La distribution d'échantillonnage de cette statistique est déterminée en supposant que l'hypothèse H_0 est vraie.

Il n'y a que **<u>2 conclusions possibles</u>** pour un test d'hypothèse:

- le rejet de l'hypothèse nulle: notre échantillon permet de conclure avec un risque d'erreur α l'hypothèse alternative H1

- le non rejet de l'hypothèse nulle : notre échantillon ne permet pas de conclure, le test est non significatif…

Comparaison d’une moyenne (ou proportion) à une norme

<u>Exercice 1:</u>

Le responsable du procédé de fabrication de tiges d’acier suggère au chef de département de métallurgie d’introduire un nouvel alliage dans le procédé de fabrication des tiges. Cette modification pourrait permettre d’obtenir une résistance moyenne à la rupture plus élevée et ainsi assurer une meilleure sécurité aux utilisateurs de ces tiges. Les tiges présentaient avant l’introduction du nouvel alliage, une résistance moyenne à la rupture de 50 kg/cm^2.

Une nouvelle fabrication a été effectuée et un échantillon aléatoire de 40 tiges a été prélevé de cette fabrication. On a obtenu pour cet échantillon une résistance moyenne à la rupture de 51.5 kg/ cm^2 et un écart-type de 2.4 kg/ cm^2.

Est-ce que l’écart observé dans la résistance moyenne à la rupture avant et après introduction du nouvel alliage est suffisamment élevé pour conclure, au seuil de signification α=0.05 qu’il y a une augmentation significative de la résistance moyenne à la rupture ?

On pourra refaire le test : est-ce que l’introduction du nouvel alliage modifie la résistance moyenne à la rupture?

Exercice 2:

Un médecin de Santé Publique veut savoir si dans sa région le pourcentage d'habitants atteints d'hypertension artérielle est égal à la valeur de 17% publiée pour des populations semblables.

Pour vérifier cette hypothèse, il constitue un échantillon représentatif des habitants de la région de taille $n = 1500$ et il calcule le pourcentage d'hypertendus sur cet échantillon: il trouve 19%.

Les habitants de sa région sont-ils plus hypertendus que ceux de populations semblables « de référence » ?

Comparaison de deux moyennes (ou proportions)

<u>Exercice 3:</u>

Une entreprise fabrique des câbles d'aciers. Elle effectue des contrôles portant sur la charge de rupture maximale que ces câbles peuvent supporter. A une première date, le contrôle de 100 câbles a donné une moyenne de 58 tonnes et un écart type de 3 tonnes. A une seconde date, le contrôle de 150 câbles a donné une moyenne de 56 tonnes et un écart type de 5 tonnes.

Peut-on considérer au risque de 5% que la qualité des câbles a diminué entre les deux dates?