Plan

Résolution des équations non linéaires

- Tout n'est pas linéaire ! Pensez aux diodes par exemple...
- On peut être amené à résoudre une équation (ou un système) de type $f(x) = 0$ où f n'est pas une fonction affine
- Hormis des cas particuliers, on ne sait pas résoudre "à la main" ce genre d'équation
- On résout donc ces équations dites non linéaires à l'aide de méthodes numériques en se basant sur des théorèmes mathématiques

- **Principe :** on résout l'équation par une méthode itérative, partant de $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, on construit une suite $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$$

  où $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$.

- **En pratique :** on ne peut pas faire un nombre infini d'itérations. On se donne alors une précision (ou tolérance) ε et on utilise un critère d'arrêt :
  1. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ (contrôle de l'incrément)
  2. $|f(x_k)| < \varepsilon$ (contrôle du résidu)

Résolution des équations non linéaires

- On dit qu'une méthode itérative converge s'il existe un réel x^* tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$$

- On dit qu'une méthode itérative est d'ordre p où p est un entier non nul s'il existe une constante C, indépendante de k, telle que

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^p$$

- Si $p = 1$, on parle de convergence linéaire :

$$|x_k - x^*| \leq C|x_{k-1} - x^*| \leq \cdots \leq C^k|x_0 - x^*|$$

  Convergence si $C < 1$

- Si $p = 2$, on parle de convergence quadratique :

$$|x_k - x^*| \leq C|x_{k-1} - x^*|^2 \leq \cdots \leq C^k|x_0 - x^*|^{2k}$$

  Convergence si $C|x_0 - x^*|^2 < 1$

Méthode de la dichotomie

- On veut résoudre une équation de type $f(x) = 0$
- On suppose que f est continue et qu'il existe a et b tel que $f(a)f(b) < 0$
- D'après le TVI il existe alors $x^* \in]a; b[$ tel que $f(x^*) = 0$ ce point est unique si f est strictement monotone
- **Principe :**
  - on divise l'intervalle $[a; b]$ en deux en calculant $m = \dfrac{a+b}{2}$
  - deux possibilités : ou $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés ou $f(m)$ et $f(b)$ sont de signes opposés
  - On met à jour l'intervalle et on itère
  - Après n étapes L'erreur absolue de la méthode de dichotomie est au plus de $\dfrac{b-a}{2^{n+1}} \Rightarrow$ convergence lente et linéaire
  - Pas adaptée pour les fonctions qui s'annulent sans changer de signe...

Méthode de la dichotomie : algorithme

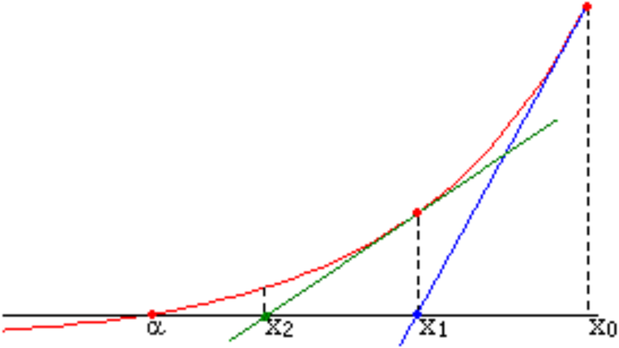
Méthode de la dichotomie : à faire

Exercice 1

Programmer la méthode de la dichotomie et tester avec les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1; 2]$
2. $f_2 : x \mapsto x - e\sin(x)$ sur l'intervalle $[1; 10]$

Méthode d'ordre 2 : méthode de Newton



Source : wikipidea

Méthode d'ordre 2 : méthode de Newton

- On veut résoudre une équation de type $f(x) = 0$
- **Principe :**
  - On part de x_0 et on fait l'approximation de f par sa tangente en ce point :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  - On cherche l'intersection de la droite avec l'axe des abscisses $\Rightarrow$ un nouveau point $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  - On considère donc la suite (x_k) définie par récurrence pour la donnée de x_0 par :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

  - La suite (x_k) ainsi définie converge alors vers x^* tel que $f(x^*) = 0$

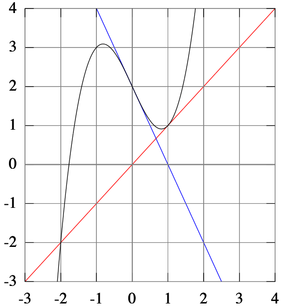
Méthode de Newton

- **Avantages :**
  convergence quadratique et plus rapide que celle de la dichotomie : le nombre de chiffres corrects est approximativement doublé à chaque itération

$$\exists C > 0; \forall k, \|x_{k+1} - x^*\| \leq C\|x_k - x^*\|^2$$

- **Inconvénients :**
  - Il faut travailler sur un intervalle où la dérivée f' de f ne s'annule pas
  - Souvent on ne connait pas l'expression analytique de f' $\Rightarrow$ approximation par différences divisées
  - La condition initiale x_0 doit être proche de x^*
  - La tangente à la courbe peut couper l'axe des abscisses hors du domaine de définition de la fonction

Méthode de Newton : échec



Source : wikipidea

Méthode de Newton : à faire

Exercice 2

1. Écrire un algorithme de la méthode de Newton en pseudo-code ensuite programmer la méthode en Scilab.
2. Tester avec les fonctions suivantes :
   1. $f_1 : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1; 2]$
   2. $f_2 : x \mapsto x - e\sin(x)$ sur l'intervalle $[1; 10]$
3. Comparer la méthode de Newton et la méthode de dichotomie en affichant les erreurs $|x_{k+1} - x_k|$ en fonction de k en échelle logarithmique

Méthode de Newton : algorithme