Plan

1. Interpolation polynomiale
2. Intégration et dérivation numérique
3. Résolution des équations non linéaires
4. Résolution numérique des équations différentielles
5. Optimisation numérique

Intégration numérique

On cherche à estimer la valeur numérique de :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

avec

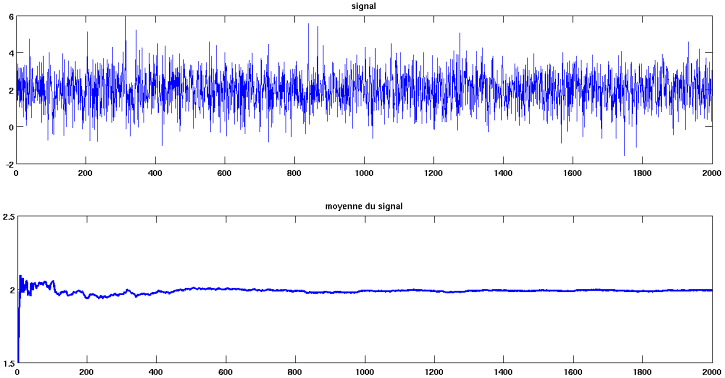
- a et b deux réels tels que $a < b$
- La fonction f ne disposant pas de singularité sur $[a; b]$, mais :
  - On ne connaît la valeur de f qu'en certains points $x_0, x_1, ..., x_n$ et il n'est pas possible d'avoir d'autres valeurs que celles-ci
  - Le calcul de l'intégrale méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction f. Voici quelques exemples :

$$\int_a^b e^{-x^2} dx, \qquad \int_a^b \cos(x^2)dx$$

- **Solution :** utiliser des méthodes numériques : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$

Intégration numérique : exemple concret

Dans le cas du traitement du signal, on peut vouloir connaitre la valeur moyenne $\tilde{f}(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ d'un signal f sur [0 ; t]



Soit $f : [a, b] \leftarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On se propose de calculer numériquement la quantité

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

On considère les formules d'intégration suivantes (dites simples) :

- Formule du rectangle à gauche :

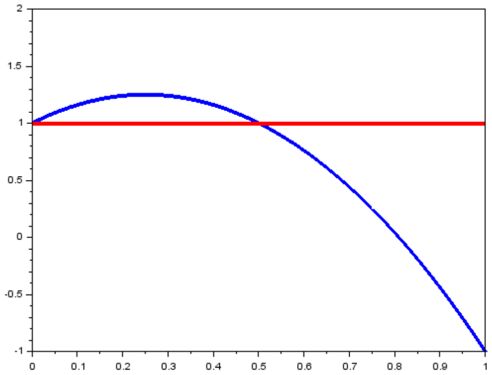
$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a)$$

- Formule du trapèze :

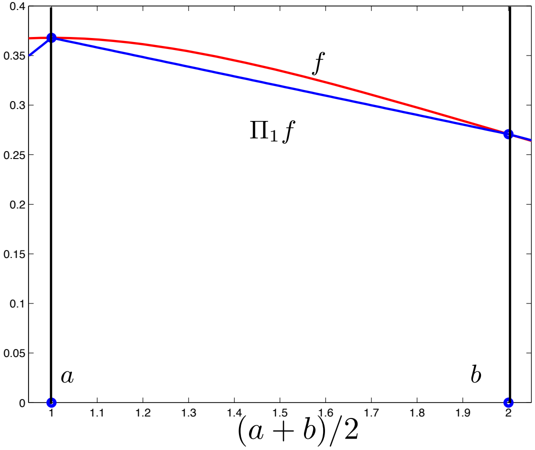
$$I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

- Formule de Simpson :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

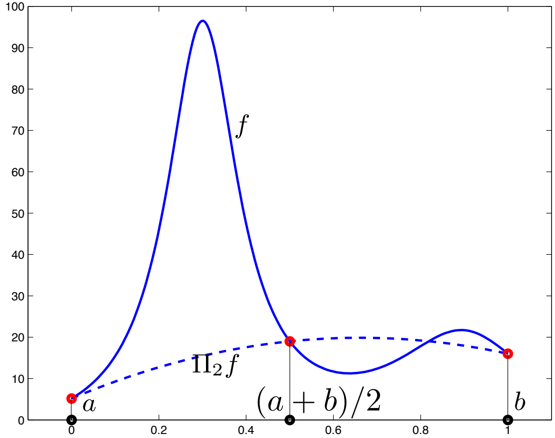

2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Intégration numérique : formule du trapèze



source : A. Quarteroni

Intégration numérique : formule de Simpson



source : A. Quarteroni

On va considérer les n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}], k = 0, ..., n-1$ où $x_k = a + kh$ et $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Comme on a :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ on peut calculer une approximation de l'intégrale exacte de f avec l'intégrale d'un polynôme Π_m^k de degré m approchant f sur $[x_k, x_{k+1}]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Pi_m^k(x)dx$$

Intégration numérique : Formules composites des rectangles

- Méthode des rectangles à gauche :

$$I \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

- Méthode des rectangles à droite :

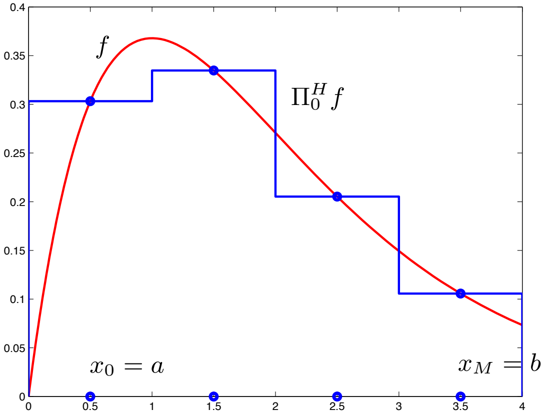
$$I \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$

- Méthode du point milieu :

$$I \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)$$

Ces formules sont obtenues en remplaçant, sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction f par un polynôme constant

Formules des rectangles : illustration graphique



source : A. Quarteroni

Formules des rectangles : erreur d'intégration

On note $I_n(f)$ la valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ obtenue en utilisant une des méthodes des rectangles alors on a :

- Méthode des rectangles à gauche et méthode des rectangles à droite :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_n(f) \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$

- Méthode du point milieu, si $f \in C^2([a;b])$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$$

où $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

Intégration numérique : formule composite des trapèzes

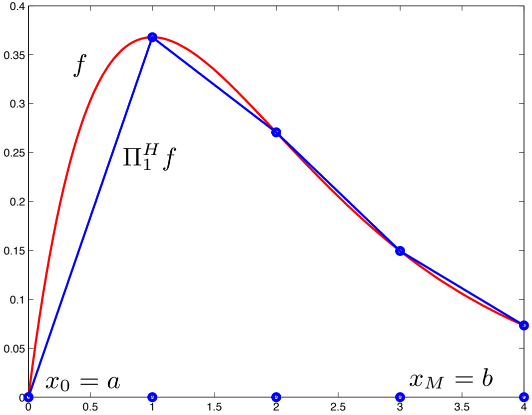
- On remplace sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction f par un polynôme de degré 1 aux noeuds x_k et x_{k+1}. On obtient la formule composite des trapèzes :

$$I \approx h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

- On note $I_n(f)$ la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ obtenue en utilisant la méthode des trapèzes. Si $f \in C^2([a; b])$ alors on a :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_n(f) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$



source : A. Quarteroni

Intégration numérique : formule composite de Simpson

- On remplace sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, la fonction f par un polynôme de degré 2 aux noeuds x_k, $\bar{x}_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}. On obtient la formule de Simpson composite :

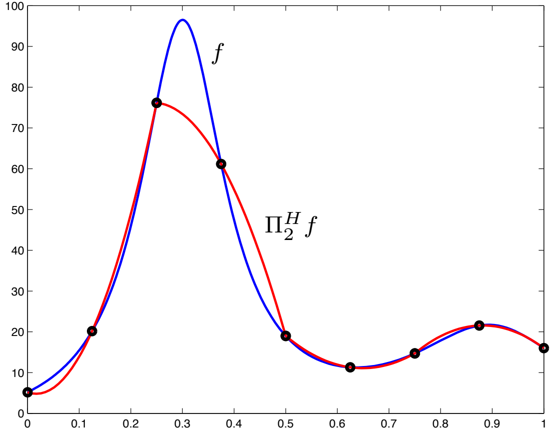
$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_{k+1}) \right) \\ &\approx \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \right) \end{aligned}$$

- On note $I_n(f)$ la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ obtenue en utilisant la méthode de Simpson. Si $f \in C^4([a;b])$ alors on a :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_n(f) \right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880 n^4}$$

où $M_4 = \max_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$

Formule composite de Simpson : illustration graphique



source : A. Quarteroni

Exercice

- Programmer les méthodes composées des rectangles à gauche, du point milieu, des trapèzes et de Simpson sur n intervalles de même longueur h.
- Vérifier graphiquement que les erreurs de ces méthodes sont proportionnelles respectivement à h, h^2, h^2 et h^4. On pourra utiliser comme test $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.
- Que se passe-t-il pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}dx$? Pourquoi ?

Dérivation numérique

- **Problème :** On souhaite calculer la dérivée f' d'une fonction f, mais :
  - Le calcul est onéreux (expression trop complexe)
  - La fonction f n'est pas connue explicitement : elle est connue uniquement sur un ensemble discret (en supposant les points assez proches pour que la notion de dérivée ait un sens)
  - La fonction f est inconnue : solution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles
- La dérivation numérique permet de trouver une approximation de la dérivée en utilisant seulement un ensemble discret de points
- Ingrédients :
  - On approche f par une fonction facile à dériver $\Rightarrow$ interpolation polynomiale
  - Développement limité pour l'estimation de l'erreur
  - Définition de la dérivée en un point x :

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dérivation numérique : Formules à deux points

- En utilisant le polynôme d'interpolation sur les deux points x_k et x_{k+1} :

$$P(x) = f(x_k) + f[x_k; x_{k+1}](x - x_k)$$

  On a alors $P'(x) = f[x_k; x_{k+1}]$

- Ce qui donne la **formule décentrée à droite** :

$$f'(x_k) \approx P'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

- En d'autres termes, on remplace la tangente par la corde à droite !

Dérivation numérique : Formules à deux points

- En utilisant le polynôme d'interpolation sur les deux points x_{k-1} et x_k :

$$P(x) = f(x_{k-1}) + f[x_{k-1}; x_k](x - x_{k-1})$$

  On a alors $P'(x) = f[x_{k-1}; x_k]$

- Ce qui donne la **formule décentrée à droite** :

$$f'(x_k) \approx P'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- En d'autres termes, on remplace la tangente par la corde à gauche !

Dérivation numérique : Formules à trois points

- Le polynôme d'interpolation sur les trois points x_{k-1}, x_k et x_{k+1} :

$$P(x) = f(x_{k-1}) + f[x_{k-1}; x_k](x - x_{k-1}) + f[x_{k-1}; x_k, x_{k+1}](x - x_{k-1})(x - x_k)$$

  et donc $P'(x_k) = f[x_{k-1}; x_k] + f[x_{k-1}; x_k, x_{k+1}](x_k - x_{k-1})$
- Ce qui donne la **formule centrée** :

$$\begin{aligned} f'(x_k) &\approx P'(x_k) \\ &= f(x_{k+1})\frac{h_{k-1}}{h_k(h_{k-1}+h_k)} + f(x_k)\left(\frac{1}{h_{k-1}} - \frac{1}{h_k}\right) - f(x_{k-1})\frac{h_k}{h_{k-1}(h_{k-1}+h_k)} \end{aligned}$$

- Pour des points équidistants, $h_{k-1} = h_k = h_{k+1}$ et on obtient donc

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1)} - f(x_{k-1)}}{2h}$$

- En d'autres termes, on remplace la tangente par la corde aux points x_{k-1} et x_{k+1}

Dérivation numérique : estimation d'erreur

Pour plus de simplicité on suppose que les points sont équidistants. On a alors :

- Estimation d'erreur - Formule décentrée à droite si $f \in C^2[a;b]$:

$$\left| f'(x_k) - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} \right| \leq M_2 \frac{h}{2}$$

où $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

- Estimation d'erreur - Formule décentrée à gauche si $f \in C^2[a;b]$:

$$\left| f'(x_k) - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h} \right| \leq M_2 \frac{h}{2}$$

- Estimation d'erreur - Formule centrée si $f \in C^3[a;b]$:

$$\left| f'(x_k) - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} \right| \leq M_3 \frac{h^2}{3}$$

où $M_3 = \max_{t \in [a,b]} |f^{(3)}(t)|$

Dérivation numérique : dérivées d'ordre supérieur

- On utilise le même principe : on approche f par un polynôme d'interpolation P au voisinage de x_k , de degré suffisant pour que $P^{(n)} \neq 0$

- Exemple : pour la dérivée seconde, il nous faut trois points d'interpolation x_{k-1}, x_k et x_{k+1} (en général équidistants)

$$f''(x_k) \approx \frac{f(x_{k-1}) - 2f(x_k) + f(x_{k+1})}{h^2}$$