TP : séries de Fourier

Le TP fera l'objet d'un compte rendu à déposer sur Chamilo (onglet Travaux) à la fin de la séance. Le compte rendu doit impérativement être bien rédigé. Vous devez reprendre chaque exercice en expliquant les données, le but de l'exercice, votre solution et vos résultats. Toutes les figures doivent avoir un titre ; elles doivent être introduites dans le texte et être décrites. Prenez également le temps de relire !

1 Rappels

On rappelle que si un signal s est $T-$périodique, de période $T > 0$ (de fréquence $\nu = \frac{1}{T}$ ou de pulsation $\omega = 2\pi\nu$) alors ses coefficients de Fourier réels sont :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(2\pi n\nu t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(2\pi n\nu t)dt$$

et

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(2\pi n\nu t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(2\pi n\nu t)dt$$

Sous les hypothèses vues en cours, on obtient la convergence de la série de Fourier et on a :

$$\frac{1}{2}\left(s(t^+) + s(t^-)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(2\pi n\nu t) + b_n\sin(2\pi n\nu t)\right)$$

Lorsque $n = 1$, on dit qu'il s'agit de **la composante fondamentale** (ou de l'harmonique fondamental) de fréquence ν et de pulsation ω.

Dans la suite de ce TP, on s'intéressera à l'application des séries de Fourier pour la reconstruction des signaux.

2 Un premier exemple introductif

On va considérer dans ce paragraphe la somme de deux fonctions sinus de fréquences différentes :

```
--> delta = (2*%pi)/200;
--> t = 0:delta:2*%pi;
--> s2 = sin(t) - (1/2)*sin(2*t);
--> plot(t, s2)
```

Ensuite de trois sinus :

```
--> s3 = sin(t) - (1/2)*sin(2*t) + (1/3)*sin(3*t);
--> plot(t, s3)
```

Exercice 1

1. Plus généralement écrire une fonction Scilab **somme(n,t)** qui pour un entier n et un vecteur t renvoie la somme $\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \cdots + \frac{1}{n}\sin(nt)$ et tracer le graphe correspondant pour $n = 10, 20, 50, 200$.
2. Vers quel signal cette somme de sinus semble-t-elle converger ? Déterminer l'expression analytique de cette fonction (par morceaux) qu'on appellera **fonc1** (ou le nom de votre choix).
3. tracer sur le même graphe la fonction **fonc1(t)** et **somme(n, t)** pour $n = 10, 20, 50, 200$ et en utilisant le vecteur t défini par :

```
--> delta = (2*%pi)/200;
--> t = 0:delta:2*%pi;
```

3 Calcul numérique des coefficients de Fourier et reconstruction du signal

3.1 Pour commencer

On va commencer d'abord par un cas simple. La fonction Scilab **inttrap** permet de calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction sur un segment en utilisant la méthode de trapèze (c'est une méthode qu'on étudiera au prochain semestre dans le cours d'analyse numérique). Par exemple :

```
--> deltax = 2*%pi/100;

--> x=0:deltax:2%pi;

--> inttrap(x,sin(x))
```

permet de calculer l'intégrale entre 0 et 2π de la fonction sinus.
Dans la suite du TP x désignera le vecteur utilisé pour calculer des intégrales et t le vecteur utilisé pour définir ou tracer une fonction.

3.2 Cas général

Exercice 2

1. Écrivez des fonctions **an_num** et **bn_num** pour calculer numériquement les coefficients a_n et b_n. Ces fonctions doivent prendre en entrée, la période T, la fonction T-périodique f , l'intervalle de temps x de longueur T et le nombre n d'harmoniques souhaitées et qui rendent en sortie un vecteur de taille n contenant les n premiers coefficients de Fourier. Il faudrait attention à la cohérence entre l'expression de f et le vecteur x. En d'autres termes, l'expression de f doit être donnée sur l'intervalle de période T représenté par le vecteur x.
   Attention aussi, les vecteurs en Scilab commencent à l'indice 1.

```
function An = an_num(T,f, x, n)
//Corps de la fonction
endfunction
```

   et

```
function Bn = bn_num(T,f, x, n)
//Corps de la fonction
endfunction
```

Pour ces calculs on utilisera la fonction **inttrap(x, f)** qui calcule l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle de temps x, par la méthode des trapèzes.

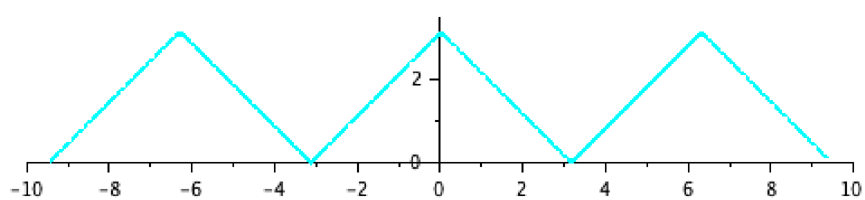
2. Calculez numériquement les coefficients de Fourier de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$. Que remarque-t-on ? En effet c'est quoi la décomposition en série de Fourier de $t \mapsto \cos(2t)$?
3. Calculez maintenant numériquement les coefficients de Fourier de la fonction 2-π périodique **fonc1** étudiée dans l'exercice 1. Comparez avec les valeurs théoriques.
4. Tracez ensuite les histogrammes des modules des coefficients a_n et b_n pour $n = 1, 2, 3, ..., 10$. Utilisez pour cela la fonction Scilab **bar**. Commenter les résultats.
5. Avec Scilab, programmez une fonction **fourier(T, f, x, t, N)** qui prend en entrée, la période T, une fonction f T-périodique, l'intervalle de temps x de longueur T qu'on utilisera pour les calculs d'intégrales, et un vecteur temps t. Cette fonction rend la valeur en t de la somme partielle jusqu'à l'ordre N de la série de Fourier de la fonction f. Cette fonction fera appel aux fonctions **an_num** et **bn_num**. Attention au fait que les indices commencent à 1 sur Scilab.

```
function [signalrecon] = fourier(T, f, x, t, N)
//Corps de la fonction
endfunction
```

6. Appliquer à la fonction **fonc1(t)** et tracer sur le même graphique la fonction **fonc1(t)** le signal reconstitué avec 5 harmoniques, avec 10 harmoniques, avec 20 harmoniques et avec 100 harmoniques. Commenter les résultats obtenus.
7. On va tester maintenant sur un autre signal. On considère le signal 2π-périodique dit triangulaire défini par :

$$u(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{si } -\pi \leq t \leq 0 \\ -t + \pi & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

et dont le graphe est représenté sur la figure suivante.



8. Créez une fonction Scilab **triangle.sci** correspondant à la fonction u définie définie ci-dessus.
9. Créez un script qui permet de tracer le signal en utilisant la fonction **triangle.sci** et en exploitant la commande Scilab **repmat**.
10. Reprendre toutes les questions 2, 4 et 6 en les appliquant ce coup-ci au signal triangulaire.
11. Quelles différences remarque-t-on par rapport à la fonction **fonc1(t)** ? Expliquer.