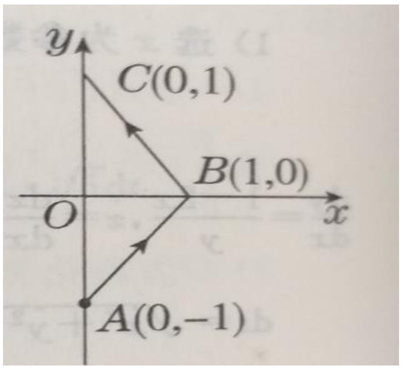
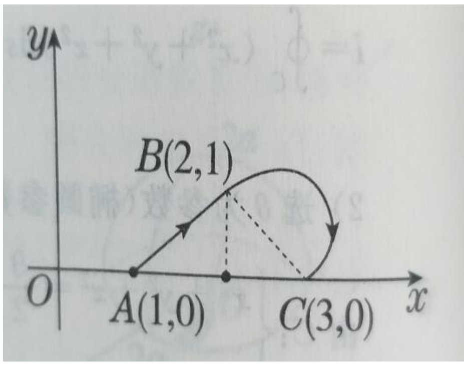
1. 求$I=\int_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中$L$是$A(0,-1)$到$B(1,0)$，再到$C(0,1)$的折线段.

解 $I=\int_L \dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_L \mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\int_{\overline{BC}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

$\overline{AB}:x-y=1\Rightarrow y=x-1,x:0\to 1$, $\overline{BC}:x+y=1\Rightarrow y=1-x,x:1\to 0$

$$I=\int_{\overline{AB}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\int_{\overline{BC}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\int_0^1(1+1)\mathrm{d}x+\int_1^0(1-1)\mathrm{d}x=2$$





2. 求$I=\int_L (y^3e^x-my)\mathrm{d}x+(3y^2e^x-m)\mathrm{d}y$,其中$L$是$A(1,0)\to B(2,1)$的直线$\to$沿半圆周到$C(3,0)$的曲线.

解 用格林公式

$$I=\oint_{L+\overline{CA}}(y^3e^x-my)\mathrm{d}x+(3y^2e^x-m)\mathrm{d}y-\int_{\overline{CA}}(y^3e^x-my)\mathrm{d}x+(3y^2e^x-m)\mathrm{d}y$$

$$\oint_{L+\overline{CA}}(y^3e^x-my)\mathrm{d}x+(3y^2e^x-m)\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-m\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_{\overline{CA}}(y^3e^x-my)\mathrm{d}x+(3y^2e^x-m)\mathrm{d}y=\int_3^1 0\mathrm{d}x=0$$

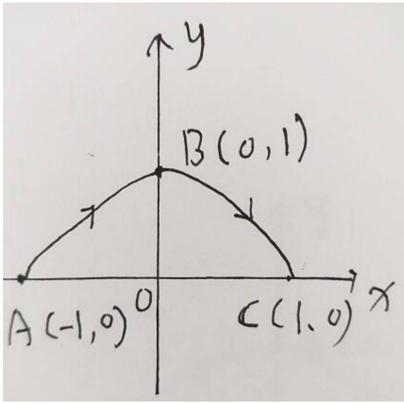
3. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$L: y=\cos\frac{\pi}{2}x$，由$A(-1,0)$至$B(0,1)$再到$C(1,0)$弧段

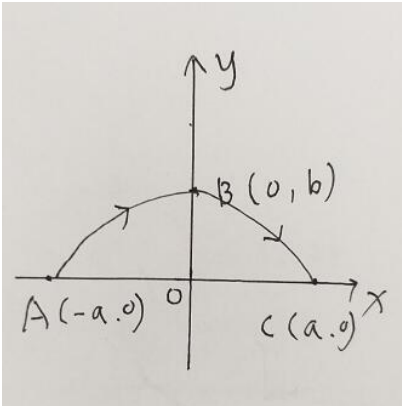
解$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

易验证$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径无关，作上半圆周$x^2+y^2=1(y\geq 0)$（记为$L_1$）

$L_1: x=\cos t, y=\sin t, (t:\pi\to 0)$

则原式$=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$





4. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，$L$为上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$由$A(-a,0)$经$B(0,b)$到$C(a,0)$的弧段。

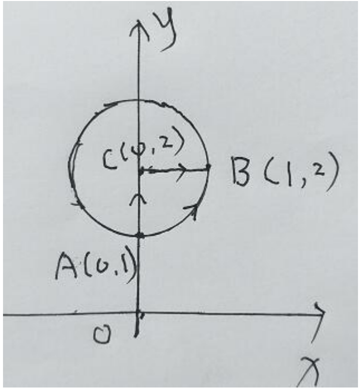
解：

因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，积分与路径无关，取$L_1: x^2+y^2=a^2$(上半圆)，

$L_1: x=a\cos t, y=a\sin t, (t:\pi\to 0)$

原式=$\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int_{\pi}^{0}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$

5. (2018 级) 计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $A(0,1)$ 沿圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的四分之一弧到点 $B(1,2)$ 的一段曲线。

解：

因 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=4xy$，故积分与路径无关

令点 $C(0,2)$，加有向线段 $\overline{AC}$ 和 $\overline{CB}$，

则：$I=\int_{\overline{AC}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y+\int_{\overline{CB}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y$，

$\overline{AC}: x=0, (y:1\to 2)$ ，

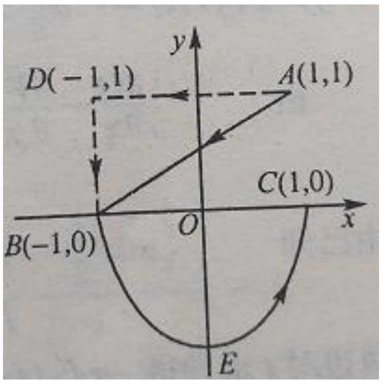
$\int_{\overline{AC}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y=\int_1^2(-y^3)\mathrm{d}y=-\dfrac{15}{4}$；

$\overline{CB}: y=2, (x:0\to 1)$ ，

$\int_{\overline{CB}}(x^2+2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^3)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+8x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{3}$

所以，$I=\dfrac{7}{12}$.

6. (2016 级) 计算曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为从点 $A(1,\ 1)$ 沿直线到点 $B(-1,\ 0)$，再沿曲线 $y=x^2-1$ 到点 $C(1,\ 0)$.



解： $P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ，

积分与路径无关，自选路径。令点 $D(-1,1)$，选从点 $A(1,\ 1)$ 沿水平线到点 $D(-1,1)$ 后，沿铅直线到点 $B(-1,\ 0)$，再沿下半单位圆到点 $C(1,\ 0)$.

$\overline{AD}:y=1,(x:1\to -1)$， $\int_{\overline{AD}} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^{-1}\frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\arctan x\Big|_1^{-1}=\frac{\pi}{2}$，

$\overline{DB}:x=-1,(y:1\to 0)$， $\int_{\overline{DB}} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^{0}\frac{-\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\arctan y\Big|_1^{0}=\frac{\pi}{4}$，

$BC:x=\cos t,y=\sin t\,(t:-\pi\to 0)$，

$\int_{BC} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{-\pi}^{0}(\sin^2 t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=\pi$ 。

所以，$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}$ 。

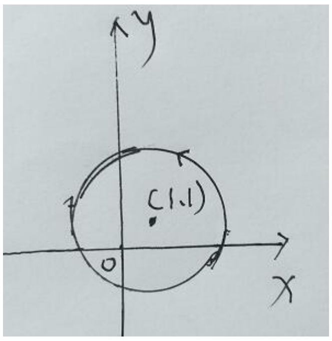
法 2：连接CA，再作半径为r的小圆$L_1: x^2+y^2=r^2$（r充分小），取顺时针方向，由格林公式有 $L_1^-: x=r\cos t, y=r\sin t\ (t:0\to 2\pi)$

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{CA}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

$$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_{CA}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \qquad \overline{CA}: x=1,(y:0\to 1)$$

$$=-\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}+\int_{L_1^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}r^2dt=\frac{7\pi}{4}$$

7. (2015 级)计算曲线积分$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{a^2x^2+b^2y^2}(a,b>0,a\neq b)$，其中$L$是点$(1,1)$为中心，$R(R>\sqrt{2})$为半径的圆周，取逆时针方向



解：$P=\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}, Q=\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{b^2y^2-a^2x^2}{(a^2x^2+b^2y^2)^2}$

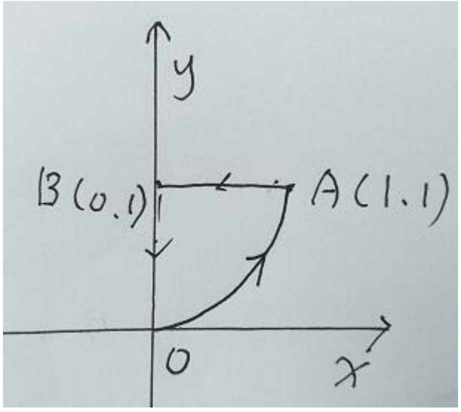
取充分小的正数ε，补有向曲线$L_1: a^2x^2+b^2y^2=\varepsilon^2$，取顺时针方向。由格林公式，$I+\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{a^2x^2+b^2y^2}=\iint_D 0dxdy=0$，

所以

$$I=\oint_{L_1^-}\frac{xdy-ydx}{a^2x^2+b^2y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1^-}xdy-ydx.$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{a^2x^2+b^2y^2\le\varepsilon^2}2dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\bullet\pi\bullet\frac{\varepsilon}{a}\bullet\frac{\varepsilon}{b}=\frac{2\pi}{ab}$$

8. (2014 级) 计算曲线积分 $I=\int_L (e^x \sin y-2y)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-x)\mathrm{d}y$. 已知 L 是从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$ 的有向曲线。



解：设 $B(0,1)$，加有向弧段 $\overline{AB}: y=1, (x:1\to 0)$ ，再加有向弧段 $\overline{BO}: x=0, (y:1\to 0)$ ，利用格林公式得：

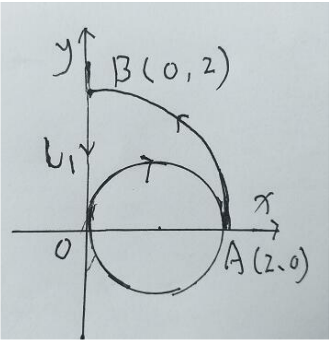
$$I=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{AB}}-\int_{\overline{BO}}=(1-\int_0^1 x^2\mathrm{d}x)-\int_1^0(e^x\sin 1-2)\mathrm{d}x-\int_1^0\cos y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}-(\sin 1\cdot e^x-2x)\Big|_1^0-\sin y\Big|_1^0=e\sin 1-\frac{4}{3}$$

9. (2013 级)已知 L 是第一象限中从点 $O(0,0)$ 沿圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点 $A(2,0)$，再沿圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$ 到点 $B(0,2)$ 的有向曲线。计算曲线积分

$$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y。$$



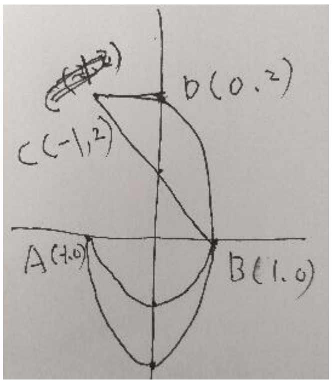
解：设所补直线 $L_1: x=0$,$(y:2\to 0)$，方向向下

利用格林公式得：

$$原式=\int_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x+2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D (3x^2+1-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0 2y\mathrm{d}y=(\pi-\frac{\pi}{2})+4=\frac{\pi}{2}+4$$

10. 计算$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中$L:ABC$，由$A(-1,\ 0)$沿下半圆$x^2+y^2=1$到$B(1,\ 0)$再沿斜直线到$C(-1,\ 2)$　答案（$\frac{7}{8}\pi$）



解　$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$

$L_1: 4x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}, -\pi \le t \le \frac{\pi}{2},$

$L_2: \begin{cases} y=2 \\ x=x \end{cases}\quad x:0 \to -1$

$$\int_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 t + 2\sin^2 t}{4}\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_{L_2} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{-1} \frac{-2\mathrm{d}x}{4x^2+4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \frac{7}{8}\pi$$

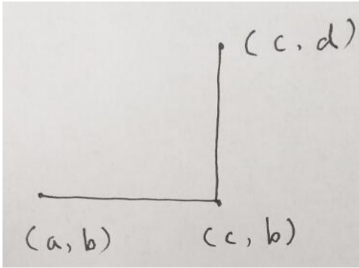
11．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一阶连续导数，L是上半平面（$y>0$)内的有向分段光滑曲线，其起点为(a,b)，终点为(c,d)，记

$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

(1). 证明曲线积分I与路径L无关

(2). $ab=cd$时，求I的值.

解 **(1)** $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)-\dfrac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在上半平面内处处成立.



在$y>0$内，曲线积分I与路径L无关.

(2)
$$I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\left[\frac{1}{b}+bf(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\left[cf(cy)-\frac{c}{y^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}+\int_a^c f(bx)\mathrm{d}(bx)+\int_b^d f(cy)\mathrm{d}(cy)$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(u)\mathrm{d}u+\int_{bc}^{cd} f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(u)\mathrm{d}u=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

12. 计算曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $(x-1)^2+y^2=4$（$y\geq 0$）上由点 $A(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的有向弧段.（2021 级期末试题）

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad \left(x^2+y^2\neq 0\right)$，

所以，在不包含原点的单连通域内，曲线积分与路径无关

令 $L_1: y=\sqrt{1-x^2}\left(x:-1\to 1\right)$，$L_2: y=0\left(x:1\to 3\right)$，则

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_\pi^0(\cos^2 t+\sin^2 t)\mathrm{d}t=-\pi$$

$$\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_1^3 0\mathrm{d}x=0$$

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\pi$$

13．(2020 级) 求曲线积分 $\int_L f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，L 是圆周线 $(x-1)^2+(y-\pi)^2=1+\pi^2$ 上从点 $A(2,2\pi)$ 沿逆时针方向到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

解 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=f'(x)\cos y+\pi$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=f'(x)\cos y$.

方法 1　取从 $O(0,0)$ 到 $A(2,2\pi)$ 的有向线段 $\overline{OA}: y=\pi x\,(0\le x\le 2)$，

由格林公式，$\displaystyle\oint_{L+\overline{OA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=\iint_D \pi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}\left(1+\pi^2\right)$.

又 $\displaystyle\int_{\overline{OA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^2\left(f'(x)\sin\pi x+\pi\cdot\left(f(x)\cos\pi x+\pi x\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(f(x)\sin\pi x+\frac{\pi^2}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2=2\pi^2$$

所以，原积分 $=\dfrac{\pi^2}{2}\left(1+\pi^2\right)-2\pi^2=\dfrac{1}{2}\pi^4-\dfrac{3}{2}\pi^2$.

方法 2　取点 $B(2,0)$，由格林公式，

$$\oint_{L+\overline{OB}+\overline{BA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=\iint_D \pi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{2}\left(1+\pi^2\right)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\right)=\frac{\pi^2}{2}\left(5+\pi^2\right),$$

又 $\displaystyle\int_{\overline{OB}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=0$，

$$\int_{\overline{BA}} f'(x)\sin y\,\mathrm{d}x+\left(f(x)\cos y+\pi x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left(f(2)\cos y+2\pi\right)\mathrm{d}y=4\pi^2,$$

所以，原积分 $=\dfrac{\pi^2}{2}\left(5+\pi^2\right)-4\pi^2=\dfrac{1}{2}\pi^4-\dfrac{3}{2}\pi^2$.