1． 向量点积法

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\pm\iint_{D_{xy}} \boldsymbol{A}(x,y,z(x,y))\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设有向曲面S的方程为$z=z(x,y)$，S在Oxy平面上的投影区域为D_{xy}，这里S的法向量取为$\boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)$，其中的符号：当$S$取上侧时为"＋"号，当$S$取下侧时为"－"号.

2． 直接法

设有向曲面S的方程为$z=z(x,y)$，S在Oxy平面上的投影区域为D_{xy}，函数$R(x,y,z)$在S上连续，则有

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中的符号：当S取上侧时为"＋"号，当S取下侧时为"－"号.

二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V$ ， $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$

第一型曲线积分 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$ ， $\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s$

第一型曲面积分 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ ， $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$

第二型曲线积分 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$\int_c P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

第二型曲面积

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

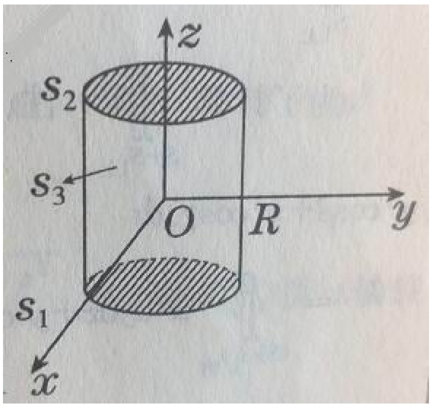
1. 计算$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是平面$2x+2y+z=2$在第一卦限部分的上侧

解：$z=2-2x-2y$，　$\boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(2,2,1)$，其在$oxy$平面的投影区域$D_{xy}$：$0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1$

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} (x,y,x+2-2x-2y)\cdot(2,2,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x+2)\mathrm{d}y = \frac{7}{6}.$$

2. 计算 $\iint\limits_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$ 和 $z=-R(R>0)$ 所围立体表面的外侧。



解：设 S_1，S_2，S_3 依次为 S 的下、上底圆面和圆柱面部分，则

$$\iint\limits_{S_1}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_2}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=-\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{(-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}=0$$

$$\iint\limits_{S_3}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0,$$ $\cos\gamma\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\iint\limits_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0,$$ $\cos\alpha\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\iint\limits_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_3前}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{S_3后}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

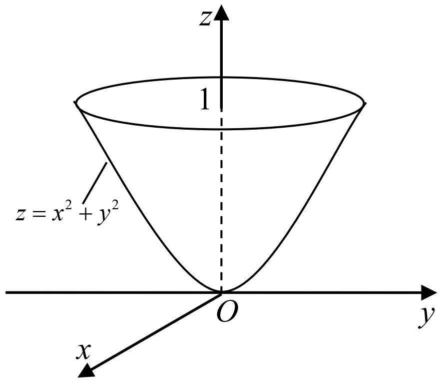
$$=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2}{2}R$$

S_3前 $: x=\sqrt{R^2-y^2}$ 在 oyz 平面的投影区域 D_{yz}：$-R\le y\le R,-R\le z\le R$

S_3后 $: x=-\sqrt{R^2-y^2}$ 在 oyz 平面的投影区域 D_{yz}：$-R\le y\le R,-R\le z\le R$

3. (2018 级) 求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x(y^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x^2+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$：曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，取下侧。



解：补有向曲面$\sum_1$ ： $z=1 \quad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+x+y+z)\mathrm{d}V$，

由对称性，得$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(r^2+z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x(y^2+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x^2+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

故 $I=\frac{\pi}{2}$.

4. (2014级)求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\bullet\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le z\le 2)$，取上侧。

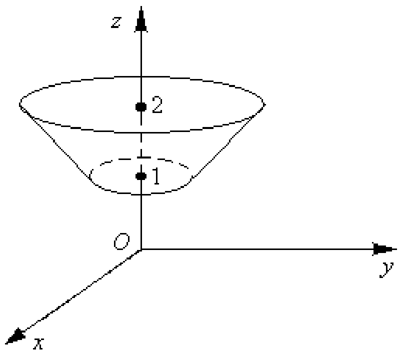
解：设 Σ_1：$\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2\le 4 \end{cases}$，取下侧，$\Sigma_2$：$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$，取上侧，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2y+\sin x)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}2\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_2}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_1^2 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z:x^2+y^2\le z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 4}2\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_1^2\pi z^4\mathrm{d}z+0-0=-\pi\left.\frac{z^5}{5}\right|_1^2=-\frac{31}{5}\pi$$



5. (2015 级) 求曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$ 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧。

解：将曲面方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 代入化简得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

补有向曲面 Σ_1 ： $z=z(x,y)=0 \qquad (x^2+y^2\le 1)$，取上侧.

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1} \quad =\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+x+2y)\mathrm{d}V$，

由对称性，得 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\mathrm{d}V=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{5},$$

而

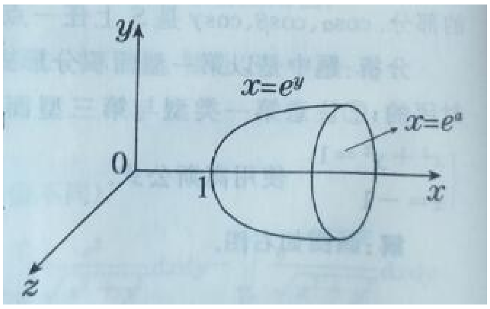
$$\iint\limits_{\Sigma_1}(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，　故 $I=\frac{2\pi}{5}$.

6．求$I=\iint\limits_{S}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是由曲线$x=e^y$

（$0\le y\le a$）

绕x轴旋转成的旋转曲面的外侧.



解 补有向曲面$S_1: x=e^a$, $y^2+z^2\le a^2$取右侧.

$$I=\iint\limits_{S}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{S+S_1}-\iint\limits_{S_1}$$

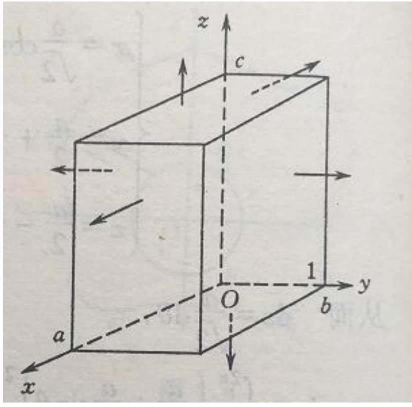
$$=\iiint\limits_{V}(-4x+8x-4x)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{S_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{yz}}2(1-e^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2(1-e^{2a})\pi a^2$$

D_{yz}: $y^2+z^2\le a^2$

所以 $I=2(e^{2a}-1)\pi a^2$

7. 计算$I=\iint\limits_{S}\left|x-\frac{a}{3}\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left|y-\frac{2b}{3}\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left|z-\frac{c}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为六面体$0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$的全表面的外侧.



解

$$\iint\limits_{S}\left|z-\frac{c}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\left|c-\frac{c}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}\left|0-\frac{c}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}c\cdot ab-\frac{1}{4}c\cdot ab=\frac{1}{2}abc$$

$$D_{xy}:0\le x\le a, 0\le y\le b$$

同理 $\iint\limits_{S}\left|x-\frac{a}{3}\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}abc$ ， $\iint\limits_{S}\left|y-\frac{2b}{3}\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}abc$

$$I=\iint\limits_{S}\left|x-\frac{a}{3}\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left|y-\frac{2b}{3}\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left|z-\frac{c}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}abc$$

8. 求$\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$,若从oz轴正向方向看去, L取逆时针方向.

解　由斯托克斯公式,

$$\text{原式}=\iint_S(-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

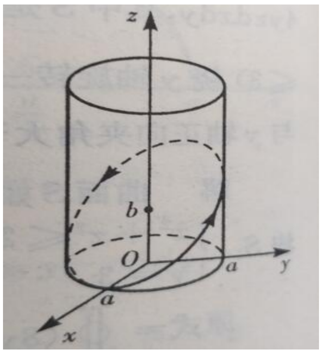
$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S \quad , \quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_S \mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2$$

$$S: z=-x-y, \quad \boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(1,1,1)$$

$$\boldsymbol{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

9. 求$\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，$L$是椭圆$x^2+y^2=a^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$，（$a>0$，$b>0$），从$z$轴正向往负向看去，$L$为逆时针方向.



解　由斯托克斯公式，

$$\text{原式}=-2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

S在oxy面投影域D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$，$\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2$，

S在oyz面投影域D_{yz}：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{(z-b)^2}{b^2}\le 1$，$\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi ab$

$\iint_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以　原式$=-2\pi a(a+b)$

法 2：原式$=-2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-2\iint_{D_{xy}}(1,1,1)\bullet(-z_x,-z_y,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}(1,1,1)\bullet(\frac{b}{a},0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{D_{xy}}(\frac{b}{a}+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y==-2\pi a(a+b).$$

$S: z=b-\dfrac{b}{a}x$，　$\boldsymbol{n}=(-z_x,-z_y,1)=(\dfrac{b}{a},0,1)$

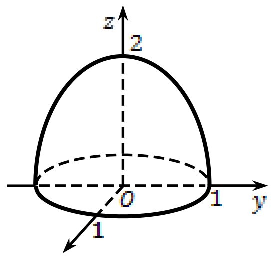
D_{xy}：$x^2+y^2\le a^2$

10. (2021 级期末试题)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中，有向曲面 $\Sigma: x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1(z\geq 0)$，取上侧.

解：令 $S: Z=0,\ D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$，取下侧. 有 **Gauss** 公式，



$$\iint\limits_{\Sigma+S}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{V}(z+x+\sin x+y)\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_{V}z\mathrm{d}V=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 z\cdot\pi\left(1-\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}z=\pi$$

$$D_z: x^2+y^2\leq 1-\frac{z^2}{4}$$

$$\iint\limits_{S}(xz+\sin y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xy+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S}(\sin x+y)(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(\sin x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

综上，$I=\pi$

11. 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x(8y+\sin z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-2y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xz-4yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$，$(1\le y\le 3)$绕$y$轴旋转一周所成的曲面，其法向量与$y$轴正向的夹角大于$\frac{\pi}{2}$.

解：$\Sigma: y=1+z^2+x^2$，$(z,x)\in D_{zx}=\left\{(z,x)\middle| z^2+x^2\le 2\right\}$ ，

令$S: y=3, (z,x)\in D_{zx}$，S取右侧.

$$\oiint_{\Sigma+S} x(8y+\sin z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-2y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xz-4yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V(\sin z+1+x)\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{1+r^2}^{3} r\mathrm{d}y=2\pi$$

（或者“先二后一法” $\iiint_V \mathrm{d}V=\int_1^3\mathrm{d}y\iint_{D_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_1^3\pi(y-1)\mathrm{d}y=2\pi$ ）

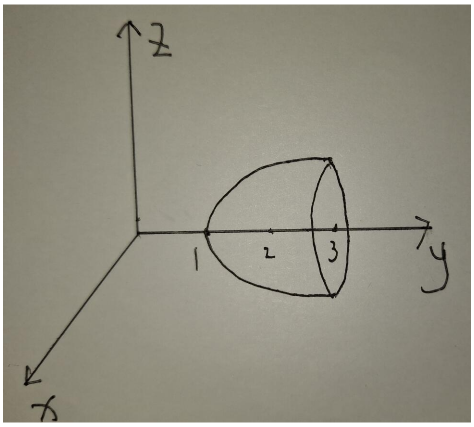
$$\iint_S x(8y+\sin z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-2y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(xz-4yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S(x^2-2y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}(x^2-18)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{zx}}(x^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-36\pi \qquad D_{zx}=\left\{(z,x)\middle| z^2+x^2\le 2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^3\mathrm{d}r-36\pi=-35\pi$$

综上，原积分$=2\pi-(-35\pi)=37\pi$


z
1
2
3
y
x

1. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧。

解：$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，$\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$取内侧。

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}-\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon}=\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon^-}=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}3\mathrm{d}v=4\pi$$

2. 计算$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为任一不经过原点的闭曲面的外测.

解　因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\ (x^2+y^2+z^2\neq 0)$，所以

（1）当Σ不包围原点时，由高斯公式即得$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$。

（2）当Σ包围原点时，$\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$取内侧。

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}-\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon}=\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon^-}=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon^-}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}3\mathrm{d}v=4\pi$$