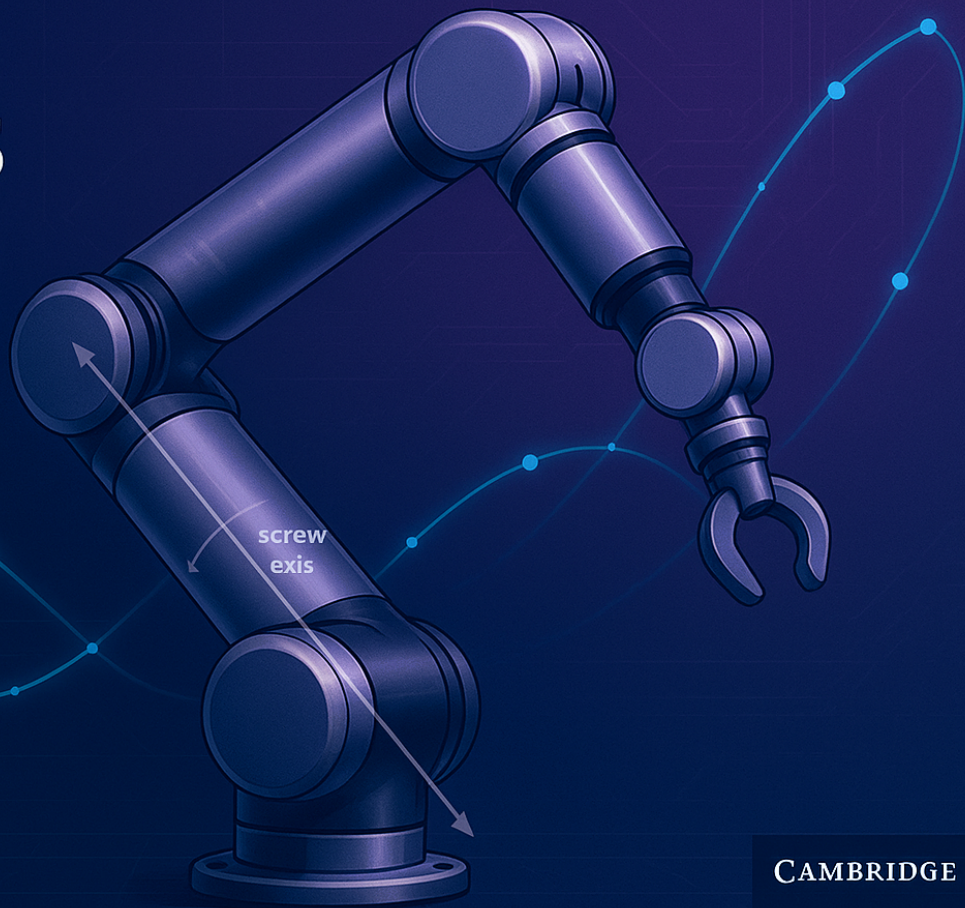


Modern Robotics

Mechanics, Planning,
and Control

KEVIN M. LYNCH AND
FRANK C. PARK



CAMBRIDGE

现代机器人学笔记

Modern Robotics Study Notes

作者: [H.S.J](#)

时间: June 2, 2025

版本: 1.0

机器人学中基本的问题最终都是与我们自身密切相关的基本问题

目录

第 1 章 数学基础	1
1.1 群论基础	1
1.1.1 群的定义与基本性质	1
1.1.2 重要的群例子	2
1.2 微分几何基础	2
1.2.1 流形理论	2
1.2.2 切空间与切向量	3
1.2.3 向量场与微分形式	3
1.3 李群与李代数	4
1.3.1 李群的定义与性质	4
1.3.2 李代数的定义与结构	4
1.3.3 重要李群的李代数	5
1.4 指数映射与对数映射	5
1.4.1 矩阵指数的理论	5
1.4.2 Rodrigues 公式与旋转矩阵	6
1.4.3 对数映射与轴角表示	7
1.5 特殊欧几里得群 SE(3)	8
1.5.1 SE(3) 的结构	8
1.5.2 se(3) 李代数	8
1.5.3 SE(3) 的指数映射	9
1.6 伴随表示理论	9
1.6.1 伴随表示的定义	9
1.6.2 SO(3) 和 SE(3) 的伴随表示	10
1.6.3 adjoint 表示	10
1.7 Baker-Campbell-Hausdorff 公式	11
第 2 章 位形空间	12
2.1 基本概念与定义	12
2.1.1 配置与位形空间	12
2.1.2 关节类型与自由度	12
2.2 自由度分析: Gröbler 公式	13
2.2.1 基本 Gröbler 公式	13
2.2.2 Gröbler 公式的应用实例	13
2.2.3 特殊情况与 Gröbler 公式的局限性	14
2.3 约束分析与分类	14
2.3.1 完整约束与非完整约束	14
2.3.2 位形空间的拓扑结构	15
2.4 工作空间与任务空间	15
2.4.1 基本定义	15
2.4.2 工作空间分析方法	16
2.5 位形空间障碍物	16

2.5.1	障碍物映射	16
2.5.2	自由位形空间	16
2.6	位形空间的微分几何	16
2.6.1	配置流形上的度量	16
2.6.2	测地线与最优路径	17
2.7	特殊机构的位形空间分析	17
2.7.1	并联机构	17
2.7.2	闭链机构	17
2.8	位形空间的计算方法	17
2.8.1	数值方法	17
2.8.2	解析方法	18
2.9	实际应用考虑	18
2.9.1	关节限制	18
2.9.2	奇异性分析	18
第 3 章	刚体运动	19
3.1	旋转表示方法	19
3.1.1	旋转矩阵的基本理论	19
3.1.2	基本旋转矩阵	19
3.1.3	欧拉角与万向节锁	20
3.1.4	四元数表示	20
3.2	指数坐标表示	21
3.2.1	轴角表示的几何意义	21
3.2.2	Rodriguez 公式的详细推导	21
3.2.3	对数映射与轴角提取	23
3.3	齐次变换与 $SE(3)$	23
3.3.1	$SE(3)$ 群的结构	23
3.3.2	齐次坐标与变换	24
3.3.3	$se(3)$ 李代数	24
3.4	螺旋运动理论	24
3.4.1	Chasles 定理	24
3.4.2	螺旋坐标	25
3.5	$SE(3)$ 的指数映射	25
3.5.1	指数映射公式	25
3.5.2	$SE(3)$ 的对数映射	25
3.6	伴随表示	26
3.6.1	$SE(3)$ 的伴随表示	26
3.6.2	adjoint 表示	26
3.7	刚体运动的微分性质	26
3.7.1	角速度与旋转矩阵的关系	26
3.7.2	螺旋速度	26
3.8	实际应用与计算考虑	27
3.8.1	旋转插值	27
3.8.2	数值稳定性考虑	27
3.9	坐标系与参考框架	27

3.9.1	坐标系变换	27
第4章	前向运动学	29
4.1	指数积公式基础理论	29
4.1.1	基本概念	29
4.1.2	螺旋轴的几何意义	29
4.2	空间形式与体形式	30
4.2.1	空间形式	30
4.2.2	体形式	31
4.3	螺旋轴的确定方法	31
4.3.1	转动关节螺旋轴	31
4.3.2	移动关节螺旋轴	31
4.4	复杂机构的前向运动学	31
4.4.1	分支机构	31
4.4.2	闭链机构	32
4.5	数值计算方法	32
4.5.1	矩阵指数的计算	32
4.5.2	数值稳定性考虑	32
4.6	奇异性分析	33
4.6.1	运动学奇异性	33
4.6.2	奇异性的影响	33
4.7	实际应用案例	33
4.7.1	6R 串联机械臂	33
4.7.2	并联机构	34
4.8	D-H 参数法比较	34
4.8.1	D-H 参数法的局限性	34
4.8.2	指数积公式的优势	34
4.9	误差分析与标定	34
4.9.1	运动学误差源	34
4.9.2	运动学标定	34
第5章	速度运动学与静力学	36
5.1	螺旋速度基础	36
5.1.1	螺旋速度的定义	36
5.1.2	螺旋速度的时间导数	37
5.2	雅可比矩阵的推导	37
5.2.1	几何雅可比矩阵	37
5.2.2	空间雅可比矩阵	37
5.2.3	体雅可比矩阵	39
5.2.4	雅可比矩阵的计算实例	41
5.3	奇异性分析	41
5.3.1	雅可比奇异性	41
5.3.2	奇异性的数学分析	41
5.3.3	可操作性度量	42
5.4	冗余机器人的速度解析	42

5.4.1	冗余自由度的利用	42
5.4.2	冗余度的优化利用	42
5.5	静力学分析	43
5.5.1	虚功原理	43
5.5.2	力变换关系	43
5.5.3	力椭圆分析	43
5.6	静态力分析的应用	44
5.6.1	抓取力分析	44
5.6.2	重力补偿	44
5.7	速度与力的对偶性	44
5.7.1	速度-力对偶关系	44
5.8	数值计算考虑	45
5.8.1	伪逆的计算	45
5.8.2	数值稳定性	45
第 6 章	逆运动学	46
6.1	逆运动学问题的基本特性	46
6.1.1	问题陈述	46
6.1.2	解的存在性与唯一性	46
6.2	解析解方法	46
6.2.1	几何分析法	46
6.3	位置分析	47
6.3.1	代数方法	47
6.3.2	数值方法	47
6.4	速度和加速度分析	48
6.4.1	速度分析	48
6.4.2	加速度分析	48
6.5	奇异性与可动性分析	48
6.5.1	奇异配置	48
6.5.2	分支问题	49
6.6	并联机构运动学	49
6.6.1	并联机构的特点	49
6.6.2	Stewart 平台	49
6.6.3	平面并联机构	49
6.7	混合串并联机构	50
6.7.1	串并联机构的分析方法	50
6.8	实际应用案例	50
6.8.1	工业并联机器人	50
6.8.2	汽车悬架机构	50
第 7 章	闭链运动学	51
7.1	闭链基本概念	51
7.1.1	定义与特性	51
7.1.2	自由度 (DOF)	51
7.2	闭环约束方程	52

7.2.1	公式化	52
7.2.2	实例：平面 3-RPR 机构	52
7.3	逆运动学与正运动学	52
7.3.1	逆运动学 (IK)	52
7.3.2	正运动学 (FK)	53
7.4	微分运动学 (雅可比矩阵)	53
7.4.1	约束雅可比矩阵 J_c	53
7.4.2	正运动学雅可比矩阵 J_{fk}	53
7.4.3	逆运动学雅可比矩阵 J_{ik}	54
7.5	闭链奇异性分析	54
7.5.1	奇异性类型	54
7.6	闭链静力学	55
7.6.1	闭链虚功原理	55
7.6.2	力传递	55
7.7	闭链机构实例	55
7.7.1	Stewart-Gough 平台再探	55
7.7.2	Delta 机器人	55
第 8 章	开链动力学	57
8.1	拉格朗日动力学	57
8.1.1	拉格朗日方程的推导	57
8.1.2	机器人系统的动能	57
8.1.3	动力学方程的标准形式	58
8.2	牛顿-欧拉递推算法	58
8.2.1	前向递推 (运动学部分)	58
8.2.2	后向递推 (动力学部分)	59
8.3	动力学方程的重要性质	59
8.3.1	质量矩阵的性质	59
8.3.2	反对称性质	60
8.3.3	能量守恒性质	60
8.4	动力学建模实例	60
8.4.1	单摆动力学	60
8.4.2	二连杆机械臂详细推导	60
8.5	计算动力学方法	61
8.5.1	复合刚体算法	61
8.5.2	关节空间惯性算法	61
8.6	动力学参数辨识	62
8.6.1	线性化参数模型	62
8.6.2	最小参数集	62
8.7	柔性连杆动力学	62
8.7.1	有限元建模	62
8.7.2	模态降阶	62
第 9 章	轨迹生成	63
9.1	轨迹生成基础理论	63

9.1.1	基本概念	63
9.1.2	轨迹质量评价指标	63
9.2	多项式轨迹插值	63
9.2.1	三次多项式轨迹	63
9.2.2	五次多项式轨迹	64
9.2.3	分段多项式轨迹	64
9.3	样条轨迹生成	64
9.3.1	三次样条插值	64
9.3.2	B 样条轨迹	65
9.4	时间最优轨迹规划	65
9.4.1	问题表述	65
9.4.2	路径速度规划	66
9.4.3	动态规划方法	66
9.5	基于动力学的轨迹优化	66
9.5.1	变分法轨迹优化	66
9.5.2	直接配点法	67
9.6	样条优化轨迹	67
9.6.1	样条轨迹优化模型	67
9.6.2	梯度计算	67
9.7	实时轨迹生成	68
9.7.1	模型预测控制轨迹生成	68
9.7.2	在线轨迹修正	68
9.8	多机器人协调轨迹规划	68
9.8.1	优先级规划	68
9.8.2	分布式优化方法	68
9.9	轨迹生成实例分析	69
9.9.1	装配任务轨迹规划	69
9.9.2	移动机器人路径跟踪	69
第 10 章	运动规划	70
10.1	运动规划基础理论	70
10.1.1	问题形式化	70
10.1.2	计算复杂性	70
10.2	位形空间建模	70
10.2.1	障碍物扩展	70
10.2.2	碰撞检测	71
10.3	基于采样的运动规划	71
10.3.1	概率路图法 (PRM)	71
10.3.2	快速随机树 (RRT)	71
10.3.3	RRT* 算法	71
10.3.4	Informed RRT*	72
10.4	基于搜索的运动规划	72
10.4.1	A* 算法	72
10.4.2	启发式函数设计	72
10.5	人工势场法	73

10.5.1 势场函数设计	73
10.5.2 梯度下降运动	73
10.5.3 局部最小值问题	73
10.6 路径平滑与优化	74
10.6.1 路径后处理	74
10.6.2 弹性带方法	74
10.7 动态环境运动规划	74
10.7.1 实时重规划	74
10.7.2 速度障碍法	74
10.8 多机器人运动规划	75
10.8.1 集中式规划	75
10.8.2 优先级规划	75
10.9 运动规划实例与应用	75
10.9.1 移动机器人导航	75
10.9.2 机械臂路径规划	75
10.9.3 人机协作环境规划	76
第 11 章 机器人控制	77
11.1 经典控制方法	77
11.1.1 PID 控制	77
11.1.2 计算力矩控制	77
11.2 自适应控制	77
11.2.1 参数自适应	77
11.2.2 神经网络自适应控制	78
11.3 滑模控制	78
11.3.1 滑模面设计	78
11.3.2 高阶滑模控制	78
11.4 力控制与阻抗控制	78
11.4.1 阻抗控制	78
11.4.2 混合位置/力控制	78
第 12 章 抓取与操作	79
12.1 力控制基础	79
12.1.1 接触模型	79
12.1.2 抓取矩阵	79
12.2 抓取分析	79
12.2.1 力闭合抓取	79
12.2.2 形闭合抓取	79
12.2.3 抓取质量指标	80
12.3 多指手控制	80
12.3.1 运动学约束	80
12.3.2 力分配	80
第 13 章 移动机器人	81
13.1 运动学约束	81
13.1.1 轮式机器人约束	81

13.1.2 运动学模型	81
13.2 控制方法	81
13.2.1 路径跟踪控制	81

第 1 章 数学基础

本章详细介绍现代机器人学课程中所需的数学工具，主要包括群论 (Group Theory)、微分几何 (Differential Geometry)、李群 (Lie Group) 和李代数 (Lie Algebra)。虽然可以通过“在实践中学习”的方式完成整个课程，但深入理解这些数学工具能够事半功倍。

内容提要

- 群论基础与抽象代数
- 微分几何与流形理论
- 李群与李代数
- 矩阵群的性质
- 指数映射与对数映射
- 伴随表示理论
- 螺旋理论与 SE(3) 几何
- Baker-Campbell-Hausdorff 公式
- 微分方程与积分曲线
- 向量场与李导数

1.1 群论基础

1.1.1 群的定义与基本性质

定义 1.1 (群)

设 G 是一个非空集合， \cdot 是定义在 G 上的二元运算。如果满足以下四个条件，则称 (G, \cdot) 为一个群：

- 封闭性：对于任意 $a, b \in G$ ，有 $a \cdot b \in G$
- 结合律：对于任意 $a, b, c \in G$ ，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 单位元：存在 $e \in G$ ，使得对任意 $a \in G$ ，有 $e \cdot a = a \cdot e = a$
- 逆元：对于任意 $a \in G$ ，存在 $a^{-1} \in G$ ，使得 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

定理 1.1 (群的基本性质)

设 (G, \cdot) 是一个群，则：

- 单位元是唯一的
- 每个元素的逆元是唯一的
- $(a^{-1})^{-1} = a$ 对所有 $a \in G$
- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ 对所有 $a, b \in G$
- 左消去律和右消去律成立：若 $ab = ac$ ，则 $b = c$ ；若 $ba = ca$ ，则 $b = c$

证明. 我们证明单位元的唯一性。假设存在两个单位元 e_1 和 e_2 。由单位元的定义：

$$e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2 \quad (1.1)$$

因此单位元是唯一的。逆元唯一性的证明类似。

定义 1.2 (子群)

设 (G, \cdot) 是一个群， $H \subseteq G$ 是 G 的非空子集。如果 H 在 G 的运算下构成群，则称 H 是 G 的子群，记作 $H \leq G$ 。

定理 1.2 (子群判定定理)

设 H 是群 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群当且仅当：

- 对任意 $a, b \in H$ ，有 $ab \in H$ (封闭性)

2. 对任意 $a \in H$, 有 $a^{-1} \in H$ (逆元存在性)



1.1.2 重要的群例子

例题 1.1 线性群

- $GL(n, \mathbb{R})$: $n \times n$ 可逆实矩阵群, 运算为矩阵乘法
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$: 特殊线性群
- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$: 正交群
- $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$: 特殊正交群
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$: 酉群
- $SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$: 特殊酉群

定义 1.3 (特殊正交群 $SO(3)$)

三维特殊正交群定义为:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^T R = I, \det(R) = 1\} \quad (1.2)$$

它表示三维空间中所有保持原点不动的旋转变换。



定理 1.3 ($SO(3)$ 的性质)

$SO(3)$ 具有以下重要性质:

1. $SO(3)$ 是 $GL(3, \mathbb{R})$ 的子群
2. $SO(3)$ 是紧致的 Lie 群
3. $SO(3)$ 的维数是 3
4. $SO(3)$ 同构于 \mathbb{RP}^3 (三维实射影空间)
5. 每个 $R \in SO(3)$ 都可以表示为绕某个轴的旋转



定义 1.4 (群作用)

设 G 是群, X 是集合。群 G 在 X 上的左作用是映射 $\phi : G \times X \rightarrow X$, 记作 $(g, x) \mapsto g \cdot x$, 满足:

1. $e \cdot x = x$ 对所有 $x \in X$
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ 对所有 $g, h \in G, x \in X$



1.2 微分几何基础

1.2.1 流形理论

定义 1.5 (拓扑流形)

设 M 是 Hausdorff 拓扑空间, 如果 M 的每一点都有邻域同胚于 \mathbb{R}^n 的开集, 则称 M 是 n 维拓扑流形。



定义 1.6 (n 维微分流形)

设 M 是 n 维拓扑流形。如果存在图册 $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, 其中:

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 M 的开覆盖
2. $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ 是同胚映射
3. 当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时, 转移函数 $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ 是 C^∞ 的

则称 M 是 n 维微分流形, \mathcal{A} 称为微分结构。



例题 1.2 重要的流形

- \mathbb{R}^n : 欧几里得空间
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$: n 维球面
- \mathbb{RP}^n : n 维实射影空间
- $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$: n 维环面
- $SO(3)$: 三维旋转群
- $SE(3)$: 三维欧几里得群

1.2.2 切空间与切向量

定义 1.7 (切向量的代数定义)

设 M 是微分流形, $p \in M$ 。点 p 处的切向量是函数空间 $C^\infty(M)$ 上的线性泛函 $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 Leibniz 法则:

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad (1.3)$$

对所有 $f, g \in C^\infty(M)$ 。

定义 1.8 (切空间)

点 $p \in M$ 处的切空间 $T_p M$ 是所有 p 处切向量构成的向量空间。

定理 1.4 (切空间的维数)

n 维流形 M 上任意点 p 的切空间 $T_p M$ 是 n 维向量空间。

证明. 设 (U, ϕ) 是包含 p 的图, $\phi(p) = 0$ 。则坐标基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1}^n$ 构成 $T_p M$ 的基, 其中

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(0) \quad (1.4)$$

□

1.2.3 向量场与微分形式

定义 1.9 (向量场)

流形 M 上的向量场是光滑映射 $X : M \rightarrow TM$, 使得对每个 $p \in M$, 有 $X(p) \in T_p M$ 。

定义 1.10 (李括号)

设 X, Y 是流形 M 上的向量场, 它们的李括号 $[X, Y]$ 定义为:

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (1.5)$$

对所有 $f \in C^\infty(M)$ 。

定理 1.5 (李括号的性质)

李括号满足:

1. 双线性: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
2. 反对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$
3. Jacobi 恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
4. Leibniz 法则: $[fX, Y] = f[X, Y] + (Yf)X$

定义 1.11 (1-形式)

流形 M 上的 1-形式是光滑映射 $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个 $p \in M$, $\omega|_{T_p M} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射。



1.3 李群与李代数

1.3.1 李群的定义与性质

定义 1.12 (李群)

李群是同时具有群结构和微分流形结构的数学对象 G , 且群运算映射:

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh \quad (1.6)$$

$$\iota : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1} \quad (1.7)$$

都是光滑映射。

**例题 1.3 经典李群**

- $GL(n, \mathbb{R})$: 一般线性群, n^2 维
- $SL(n, \mathbb{R})$: 特殊线性群, $(n^2 - 1)$ 维
- $O(n)$: 正交群, $\frac{n(n-1)}{2}$ 维
- $SO(n)$: 特殊正交群, $\frac{n(n-1)}{2}$ 维
- $U(n)$: 酉群, n^2 维
- $SU(n)$: 特殊酉群, $(n^2 - 1)$ 维
- $Sp(n)$: 辛群, $\frac{n(2n+1)}{2}$ 维

定理 1.6 (李群的基本性质)

设 G 是李群, 则:

1. G 的每个连通分量都是开集
2. G 的单位连通分量 G_0 是正规子群
3. 如果 G 是紧致的, 则 G 有有限多个连通分量
4. 李群的任何闭子群都是李群



1.3.2 李代数的定义与结构

定义 1.13 (李代数)

李群 G 在单位元 e 处的切空间 $T_e G$ 配备李括号运算, 称为李群 G 的李代数, 记作 \mathfrak{g} 。

**定义 1.14 (矩阵李群的李代数)**

对于矩阵李群 $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, 其李代数可以表示为:

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : e^{tX} \in G \text{ 对所有 } t \in \mathbb{R}\} \quad (1.8)$$

**定理 1.7 (李代数的性质)**

李代数 \mathfrak{g} 是向量空间, 配备李括号 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 满足:

1. 双线性
2. 反对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$

3. Jacobi 恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$



1.3.3 重要李群的李代数

例题 1.4 $so(3)$ 李代数 $so(3)$ 的李代数是:

$$so(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : X^T = -X\} \quad (1.9)$$

即所有 3×3 反对称矩阵的集合。

定理 1.8 (反对称矩阵的参数化)

任何反对称矩阵 $[\omega] \in so(3)$ 都可以唯一地写成:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathbb{R}^3$ 。这建立了 $so(3)$ 与 \mathbb{R}^3 之间的线性同构。



例题 1.5 其他重要李代数

- $gl(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$: 所有 $n \times n$ 实矩阵
- $sl(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(X) = 0\}$
- $so(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^T = -X\}$
- $su(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : X^* = -X, \text{tr}(X) = 0\}$

1.4 指数映射与对数映射

1.4.1 矩阵指数的理论

定义 1.15 (矩阵指数)

对于方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 矩阵指数定义为:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \quad (1.11)$$

这个级数对所有矩阵都收敛。



定理 1.9 (矩阵指数的基本性质)

1. $e^0 = I$ (单位矩阵)
2. $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
4. $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$
5. 如果 $AB = BA$, 则 $e^{A+B} = e^A e^B$
6. 如果 A 是反对称的, 则 e^A 是正交的
7. 如果 A 是对称的, 则 e^A 是对称正定的



证明. 我们证明性质 (2)。设 $f(t) = e^{tA}$, 则:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \quad (1.12)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} \quad (1.13)$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} \quad (1.14)$$

$$= A e^{tA} \quad (1.15)$$


类似地可证明 $\frac{df}{dt} = e^{tA} A$ 。 \square

1.4.2 Rodrigues 公式与旋转矩阵

定理 1.10 (Rodrigues 公式)

对于任意 $[\hat{\omega}]\theta \in so(3)$, 其中 $\|\hat{\omega}\| = 1$, 有:

$$e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2 \quad (1.16)$$

这给出了从李代数元素到李群元素的显式公式。 

证明. 设 $A = [\hat{\omega}]$, 其中 $\|\hat{\omega}\| = 1$ 。我们需要详细推导反对称矩阵的重要性质。

步骤 1: 建立反对称矩阵的幂次性质

对于反对称矩阵 $A = [\hat{\omega}]$, 其中 $\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ 是单位向量, 有:

$$A = [\hat{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

计算 A^2 :

$$A^2 = [\hat{\omega}]^2 = [\hat{\omega}][\hat{\omega}] \quad (1.18)$$

$$= \hat{\omega}\hat{\omega}^T - \|\hat{\omega}\|^2 I \quad (1.19)$$

$$= \hat{\omega}\hat{\omega}^T - I \quad (\text{因为 } \|\hat{\omega}\| = 1) \quad (1.20)$$

计算 A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = [\hat{\omega}](\hat{\omega}\hat{\omega}^T - I) \quad (1.21)$$

$$= [\hat{\omega}]\hat{\omega}\hat{\omega}^T - [\hat{\omega}] \quad (1.22)$$

$$= 0 - [\hat{\omega}] \quad (\text{因为 } [\hat{\omega}]\hat{\omega} = 0) \quad (1.23)$$

$$= -A \quad (1.24)$$

继续计算更高阶的幂:

$$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (-A) = -A^2 \quad (1.25)$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot (-A^2) = -A^3 = -(-A) = A \quad (1.26)$$

$$A^6 = A \cdot A^5 = A \cdot A = A^2 \quad (1.27)$$

因此得到周期性模式:

$$A^{2k} = (-1)^{k-1} A^2 \quad \text{对 } k \geq 1 \quad (1.28)$$

$$A^{2k+1} = (-1)^k A \quad \text{对 } k \geq 0 \quad (1.29)$$

步骤 2: 矩阵指数的幂级数展开

利用矩阵指数的定义：

$$e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2!} + \frac{(A\theta)^3}{3!} + \frac{(A\theta)^4}{4!} + \frac{(A\theta)^5}{5!} + \dots \quad (1.30)$$

步骤 3：利用周期性性质重新组织级数

将级数按 A 的奇偶幂分组：

$$e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!}A^2 + \frac{\theta^3}{3!}A^3 + \frac{\theta^4}{4!}A^4 + \frac{\theta^5}{5!}A^5 + \frac{\theta^6}{6!}A^6 + \dots \quad (1.31)$$

$$= I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!}A^2 + \frac{\theta^3}{3!}(-A) + \frac{\theta^4}{4!}(-A^2) + \frac{\theta^5}{5!}A + \frac{\theta^6}{6!}A^2 + \dots \quad (1.32)$$

$$= I + A \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) + A^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \dots \right) \quad (1.33)$$

步骤 4：识别三角函数级数

观察到：

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (1.34)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots \quad (1.35)$$

因此：

$$1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \dots \quad (1.36)$$

步骤 5：得出最终结果

将三角函数级数代入，得到：

$$e^{A\theta} = I + A \sin \theta + A^2(1 - \cos \theta) \quad (1.37)$$

$$= I + [\hat{\omega}] \sin \theta + [\hat{\omega}]^2(1 - \cos \theta) \quad (1.38)$$

这就是著名的 **Rodrigues 公式**。

几何意义：此公式表示绕轴 $\hat{\omega}$ 旋转角度 θ 的旋转矩阵，体现了指数映射将李代数 $so(3)$ 中的反对称矩阵映射到李群 $SO(3)$ 中的旋转矩阵。

物理解释：

- I ：保持垂直于旋转轴的分量不变
- $[\hat{\omega}] \sin \theta$ ：产生旋转效应
- $[\hat{\omega}]^2(1 - \cos \theta)$ ：沿旋转轴方向的投影调整

□

推论 1.1 (旋转矩阵的指数形式)

每个旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 都可以写成 $R = e^{[\hat{\omega}]\theta}$ 的形式，其中 $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 是单位向量， $\theta \in [0, \pi]$ 是旋转角度。♡

1.4.3 对数映射与轴角表示

定理 1.11 (旋转矩阵的对数映射)

给定旋转矩阵 $R \in SO(3)$ ，其对数映射 $\log(R) = [\hat{\omega}]\theta$ 可以通过以下步骤计算：

1. 如果 $R = I$ ，则 $\theta = 0$ ， $\hat{\omega}$ 任意
2. 如果 $\text{tr}(R) = -1$ ，则 $\theta = \pi$ ，此时需要特殊处理
3. 否则， $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \right) \in (0, \pi)$ ，且

$$[\hat{\omega}] = \frac{1}{2 \sin \theta} (R - R^T) \quad (1.39)$$

♡

证明. 由 Rodrigues 公式， $R = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2$ 。

计算迹：

$$\text{tr}(R) = \text{tr}(I) + \sin \theta \cdot \text{tr}([\hat{\omega}]) + (1 - \cos \theta) \cdot \text{tr}([\hat{\omega}]^2) \quad (1.40)$$

$$= 3 + 0 + (1 - \cos \theta)(-2) \quad (1.41)$$

$$= 1 + 2 \cos \theta \quad (1.42)$$

因此 $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(R)-1}{2} \right)$ 。

当 $\sin \theta \neq 0$ 时：

$$R - R^T = 2 \sin \theta [\hat{\omega}] \quad (1.43)$$

从而得到 $[\hat{\omega}]$ 。 □

1.5 特殊欧几里得群 SE(3)

1.5.1 SE(3) 的结构

定义 1.16 (特殊欧几里得群)

三维特殊欧几里得群定义为：

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (1.44)$$

它表示三维空间中所有保向刚体运动（旋转和平移的复合）。 ♣

定理 1.12 (SE(3) 的群性质)

$SE(3)$ 在矩阵乘法下构成群：

1. 封闭性：若 $T_1, T_2 \in SE(3)$ ，则 $T_1 T_2 \in SE(3)$
 2. 结合性：矩阵乘法满足结合律
 3. 单位元： $I_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$
 4. 逆元： $T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$
- ♡

1.5.2 se(3) 李代数

定义 1.17 (se(3) 李代数)

$SE(3)$ 的李代数是：

$$\mathfrak{se}(3) = \left\{ [\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : [\omega] \in \mathfrak{so}(3), v \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (1.45)$$

这是一个 6 维向量空间，可以用六维向量 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$ 参数化。 ♣

定理 1.13 (se(3) 的李括号)

对于 $\mathcal{S}_1 = (\omega_1, v_1), \mathcal{S}_2 = (\omega_2, v_2) \in \mathbb{R}^6$ ，它们的李括号为：

$$[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2] = (\omega_1 \times \omega_2, v_1 \times \omega_2 + \omega_1 \times v_2) \quad (1.46) \quad \heartsuit$$

1.5.3 SE(3) 的指数映射

定理 1.14 (SE(3) 的指数映射)

对于 $[\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3)$:

情况 1: 如果 $\omega = 0$ (纯平移), 则:

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

情况 2: 如果 $\omega \neq 0$ (螺旋运动), 则:

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

其中 $G(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 由下式给出:

$$G(\theta) = \frac{1}{\|\omega\|^2} \left(I\theta + (1 - \cos(\|\omega\|\theta)) \frac{[\omega]}{\|\omega\|} + (\|\omega\|\theta - \sin(\|\omega\|\theta)) \frac{[\omega]^2}{\|\omega\|^2} \right) \quad (1.49)$$

证明. 我们需要计算矩阵指数:

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = I + [\mathcal{S}]\theta + \frac{([\mathcal{S}]\theta)^2}{2!} + \frac{([\mathcal{S}]\theta)^3}{3!} + \dots \quad (1.50)$$

首先注意到对于 $A = [\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$A^k = \begin{bmatrix} [\omega]^k & [\omega]^{k-1}v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

因此:

$$e^{A\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k [\omega]^{k-1}}{k!} \right) v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

括号中的矩阵级数收敛到 $G(\theta)$ 。 □

1.6 伴随表示理论

1.6.1 伴随表示的定义

定义 1.18 (伴随表示)

对于李群元素 $g \in G$, 伴随表示 $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 定义为:

$$\text{Ad}_g(X) = gXg^{-1} \quad (1.53)$$

对于矩阵李群。更一般地, Ad_g 是推前映射:

$$\text{Ad}_g = (L_{g^{-1}})_* \circ (R_g)_* \quad (1.54)$$

其中 L_g 和 R_g 分别是左平移和右平移。 ♣

定理 1.15 (伴随表示的性质)

伴随表示满足:

1. $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h$
2. $\text{Ad}_e = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$

3. $\text{Ad}_{g^{-1}} = (\text{Ad}_g)^{-1}$
4. $\text{Ad}_g([X, Y]) = [\text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y)]$



1.6.2 $\text{SO}(3)$ 和 $\text{SE}(3)$ 的伴随表示

定理 1.16 ($\text{SO}(3)$ 的伴随表示)

对于 $R \in \text{SO}(3)$ 和 $[\omega] \in \text{so}(3)$:

$$\text{Ad}_R([\omega]) = [R\omega] = R[\omega]R^T \quad (1.55)$$

即伴随作用就是旋转向量 ω 。



定理 1.17 ($\text{SE}(3)$ 的伴随表示)

对于 $T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3)$, 其伴随表示矩阵为:

$$[\text{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (1.56)$$



证明. 设 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$, 则:

$$T[\mathcal{S}]T^{-1} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

$$= \begin{bmatrix} R[\omega]R^T & Rv + [p]R[\omega]R^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

这对应于六维向量 $(R\omega, Rv + [p]R\omega)$, 即:

$$\text{Ad}_T \mathcal{S} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

□

1.6.3 adjoint 表示

定义 1.19 (adjoint 表示)

李代数的 adjoint 表示定义为:

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y] \quad (1.60)$$

对于 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 。



定理 1.18 (adjoint 表示矩阵)

对于 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$, adjoint 表示矩阵为:

$$[\text{ad}_{\mathcal{S}}] = \begin{bmatrix} [\omega] & 0 \\ [v] & [\omega] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (1.61)$$



1.7 Baker-Campbell-Hausdorff 公式

定理 1.19 (Baker-Campbell-Hausdorff 公式)

对于足够小的 $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]+\frac{1}{12}[Y,[Y,X]]+\cdots} \quad (1.62)$$

这个公式的重要性在于它给出了李群乘法与李代数加法之间的关系。

推论 1.2 (一阶近似)

当 X, Y 足够小时:

$$e^X e^Y \approx e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]} \quad (1.63)$$

本章的数学基础为后续章节的机器人学理论提供了坚实的数学 foundation。理解这些概念对于深入掌握现代机器人学至关重要。

第2章 位形空间

位形空间是机器人学中的一个基础概念，它描述了机器人所有可能的配置。理解位形空间对于机器人的运动规划、控制和分析至关重要。

内容提要

- 位形空间的定义与性质
- 自由度分析方法
- Grübler 公式及其应用
- 约束分析与建模
- 工作空间与任务空间的区别
- 常见机构的位形空间拓扑
- 位形空间障碍物
- 完整约束与非完整约束
- 位形空间的微分几何结构

2.1 基本概念与定义

2.1.1 配置与位形空间

定义 2.1 (配置)

机器人的配置是机器人每个点位置的完整规格说明。表示配置所需的最小 n 个实值坐标数就是机器人的自由度数 (**degrees of freedom, dof**)。包含机器人所有可能配置的 n 维空间称为位形空间 (**configuration space, C-space**)。机器人的配置由其 C 空间中的一个点表示。



笔记 自由度必须是实值坐标。例如，硬币的离散坐标 {正面, 反面} 不能成为自由度，因为其范围不是实数。

例题 2.1 简单例子

- 平面上的点：位形空间为 \mathbb{R}^2 ，自由度为 2
- 平面上的刚体：位形空间为 $\mathbb{R}^2 \times S^1$ ，自由度为 3（两个平移 + 一个旋转）
- 空间中的刚体：位形空间为 $SE(3)$ ，自由度为 6（三个平移 + 三个旋转）
- 单摆：位形空间为 S^1 ，自由度为 1
- 双摆：位形空间为 $S^1 \times S^1 = T^2$ （环面），自由度为 2

2.1.2 关节类型与自由度

表 2.1: 常见关节类型及其自由度

关节类型	符号	自由度	约束数
转动关节	R	1	5
移动关节	P	1	5
螺旋关节	H	1	5
圆柱关节	C	2	4
万向关节	U	2	4
球关节	S	3	3
平面关节	E	3	3

定理 2.1 (关约束)

在三维空间中, 连接两个刚体的关节最多可以施加 6 个约束。如果关节允许 f 个自由度, 则它施加 $6 - f$ 个约束。



2.2 自由度分析: Grübler 公式

2.2.1 基本 Grübler 公式

定理 2.2 (Grübler 公式)

机构的自由度为:

$$\text{DoF} = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i \quad (2.1)$$

其中:

- m = 刚体在自由空间中的自由度数 (平面为 3, 空间为 6)
- N = 连杆数 (包括地面/固定连杆)
- J = 关节数
- f_i = 第 i 个关节提供的自由度数



Grübler 公式的推导. 考虑 N 个连杆的系统:

- 如果所有连杆都是自由的, 总自由度为 mN
- 固定地面连杆, 减少 m 个自由度, 剩余 $m(N - 1)$
- 每个关节连接两个连杆, 如果完全固定连接, 会减少 m 个自由度
- 但关节允许 f_i 个自由度, 所以实际减少 $m - f_i$ 个自由度
- 总自由度: $m(N - 1) - \sum_{i=1}^J (m - f_i) = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i$

□

2.2.2 Grübler 公式的应用实例

例题 2.2 平面四杆机构 考虑一个平面四杆机构:

- $m = 3$ (平面运动)
- $N = 4$ (4 个连杆, 包括地面)
- $J = 4$ (4 个转动关节)
- $f_i = 1$ 对所有关节

应用 Grübler 公式:

$$\text{DoF} = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i \quad (2.2)$$

$$= 3(4 - 1 - 4) + 4 \times 1 \quad (2.3)$$

$$= 3(-1) + 4 \quad (2.4)$$

$$= 1 \quad (2.5)$$

例题 2.3 Stewart 平台 Stewart 平台是一个并联机构:

- $m = 6$ (空间运动)
- $N = 8$ (上平台 + 下平台 + 6 条腿)
- $J = 12$ (每条腿两端各一个球关节)

- $f_i = 3$ 对所有球关节

应用 Grübler 公式：

$$\text{DoF} = 6(8 - 1 - 12) + 12 \times 3 \quad (2.6)$$

$$= 6(-5) + 36 \quad (2.7)$$

$$= 6 \quad (2.8)$$

例题 2.4 机器人手臂 考虑一个 6R 串联机械臂：

- $m = 6$ (空间运动)
- $N = 7$ (6 个连杆 + 地面)
- $J = 6$ (6 个转动关节)
- $f_i = 1$ 对所有关节

应用 Grübler 公式：

$$\text{DoF} = 6(7 - 1 - 6) + 6 \times 1 \quad (2.9)$$

$$= 6(0) + 6 \quad (2.10)$$

$$= 6 \quad (2.11)$$

2.2.3 特殊情况与 Grübler 公式的局限性

警告 2.1 (Grübler 公式的局限性). Grübler 公式假设：

1. 所有关节约束都是独立的
2. 没有多余约束
3. 连杆都是刚体
4. 关节是理想的

当这些假设不成立时，公式可能给出错误结果。

例题 2.5 多余约束 考虑一个立方体，每个面都与相邻面通过铰链连接。按 Grübler 公式：

- $m = 3$ (假设平面运动)
- $N = 6$ (6 个面)
- $J = 12$ (12 条边，每条边一个铰链)
- $f_i = 1$ 对所有铰链

计算得： $\text{DoF} = 3(6 - 1 - 12) + 12 = -15 + 12 = -3$

负的自由度表明存在多余约束，实际上这个结构是过约束的。

2.3 约束分析与分类

2.3.1 完整约束与非完整约束

定义 2.2 (完整约束)

约束 $\phi(q) = 0$ 称为完整约束，如果它可以表示为配置变量的函数，而不涉及速度或更高阶导数。

定义 2.3 (非完整约束)

约束如果涉及配置变量的导数 (通常是速度)，且不能积分为完整约束的形式，则称为非完整约束。一般形式为：

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (2.12)$$

例题 2.6 非完整约束：滚动轮子 考虑一个在平面上滚动而不滑动的轮子。设轮子中心位置为 (x, y) ，轮子方向角为 θ ，轮子转角为 ϕ 。

滚动约束为：

$$\dot{x} = r\dot{\phi} \cos \theta \quad (2.13)$$

$$\dot{y} = r\dot{\phi} \sin \theta \quad (2.14)$$

这些约束不能积分为 (x, y, θ, ϕ) 的函数关系，因此是非完整的。

2.3.2 位形空间的拓扑结构

定理 2.3 (位形空间的拓扑)

机器人的位形空间通常是微分流形，其拓扑结构取决于关节类型和约束：

- 移动关节贡献 \mathbb{R} 因子
- 转动关节贡献 S^1 因子
- 球关节贡献 $SO(3)$ 因子



例题 2.7 常见位形空间

- n 个转动关节的平面机械臂： $T^n = (S^1)^n$
- n 个转动关节的空间机械臂： $(S^1)^n$
- 带移动关节的机械臂： $\mathbb{R}^k \times (S^1)^{n-k}$
- 空间中的自由刚体： $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

2.4 工作空间与任务空间

2.4.1 基本定义

定义 2.4 (任务空间)

任务空间是包含任务指定的所有配置的空间。这个空间独立于具体的机器人机构，描述的是任务本身的需求。



定义 2.5 (工作空间)

工作空间是机器人末端执行器的位形空间。工作空间可以解释为末端执行器的可达空间。



定义 2.6 (可达工作空间)

可达工作空间是末端执行器至少能以一种姿态到达的所有点的集合。



定义 2.7 (灵巧工作空间)

灵巧工作空间是末端执行器能以任意姿态到达的所有点的集合。显然，灵巧工作空间 \subseteq 可达工作空间。



2.4.2 工作空间分析方法

定理 2.4 (工作空间体积)

对于 n 自由度机械臂，其工作空间体积可以通过雅可比行列式积分计算：

$$V = \int_C |\det(J(q))| dq \quad (2.15)$$

其中 C 是位形空间， $J(q)$ 是几何雅可比矩阵。



例题 2.8 平面 2R 机械臂的工作空间 考虑平面上的两连杆机械臂，连杆长度为 l_1, l_2 ：

- 如果 $l_1 \neq l_2$ ，可达工作空间是环形区域： $|l_1 - l_2| \leq r \leq l_1 + l_2$
- 如果 $l_1 = l_2 = l$ ，可达工作空间是圆盘： $0 \leq r \leq 2l$
- 灵巧工作空间（如果存在）通常小得多

2.5 位形空间障碍物

2.5.1 障碍物映射

定义 2.8 (位形空间障碍物)

设机器人在配置 q 时占据工作空间中的区域 $\mathcal{A}(q)$ ，工作空间障碍物为 \mathcal{O} 。则位形空间障碍物 \mathcal{C}_{obs} 定义为：

$$\mathcal{C}_{obs} = \{q : \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} \quad (2.16)$$



定理 2.5 (Minkowski 和的概念)

对于多边形机器人和多边形障碍物，位形空间障碍物可以用 Minkowski 和计算：

$$\mathcal{C}_{obs} = \mathcal{O} \oplus (-\mathcal{A}) \quad (2.17)$$

其中 \oplus 表示 Minkowski 和， $-\mathcal{A}$ 表示机器人形状的反射。



2.5.2 自由位形空间

定义 2.9 (自由位形空间)

自由位形空间定义为：

$$\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obs} \quad (2.18)$$

即位形空间中除去障碍物的部分。



2.6 位形空间的微分几何

2.6.1 配置流形上的度量

定义 2.10 (位形空间度量)

位形空间上的 Riemann 度量通常由动能定义：

$$g_{ij}(q) = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \quad (2.19)$$

其中 T 是系统的动能。



定理 2.6 (动能度量)

对于机器人系统，位形空间上的度量张量就是质量矩阵 $M(q)$:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.20)$$

**2.6.2 测地线与最优路径****定义 2.11 (测地线)**

位形空间中连接两点的最短路径称为测地线，满足测地线方程：

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0 \quad (2.21)$$

其中 Γ_{ij}^k 是 Christoffel 符号。

**2.7 特殊机构的位形空间分析****2.7.1 并联机构****定理 2.7 (并联机构的位形空间)**

并联机构的位形空间通常由约束方程定义：

$$\Phi(q) = 0 \quad (2.22)$$

其中 $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是约束函数。



例题 2.9 平面并联机构 考虑一个平面 3-RRR 并联机构：

- 每条腿有 2 个自由度（两个转动关节）
- 末端平台有 3 个自由度（平面运动）
- 总的自由度： $3 \times 2 - 3 = 3$ （每条腿提供 1 个约束）

2.7.2 闭链机构**定义 2.12 (闭链约束)**

闭链机构必须满足闭合约束：

$$\prod_{i=1}^n T_i(\theta_i) = I \quad (2.23)$$

其中 $T_i(\theta_i)$ 是第 i 个关节的变换矩阵。

**2.8 位形空间的计算方法****2.8.1 数值方法**

算法 2.1 (位形空间采样). 1. 在位形空间中均匀或随机采样

2. 对每个样本点，检查碰撞
3. 构建自由位形空间的近似表示
4. 连接邻近的自由配置点形成图

2.8.2 解析方法

定理 2.8 (代数约束)

对于由多项式约束定义的位形空间，可以使用代数几何方法：

- Gröbner 基方法
- 柱形代数分解 (CAD)
- 实代数几何工具



2.9 实际应用考虑

2.9.1 关节限制

定义 2.13 (关节限制)

实际机器人的关节通常有限制：

$$q_i^{\min} \leq q_i \leq q_i^{\max} \quad (2.24)$$

$$\dot{q}_i^{\min} \leq \dot{q}_i \leq \dot{q}_i^{\max} \quad (2.25)$$

$$\ddot{q}_i^{\min} \leq \ddot{q}_i \leq \ddot{q}_i^{\max} \quad (2.26)$$



2.9.2 奇异性分析

定义 2.14 (位形空间奇异性)

当雅可比矩阵 $J(q)$ 失去满秩时，配置 q 称为奇异配置：

$$\det(J(q)) = 0 \quad (2.27)$$



定理 2.9 (奇异性的影响)

在奇异配置附近：

- 某些末端执行器运动变得不可能
- 关节速度可能变得任意大
- 控制性能严重退化



本章系统地介绍了位形空间的概念、分析方法和实际应用。位形空间是机器人学的基础概念，为后续的运动学、动力学和控制理论提供了重要的数学框架。

第3章 刚体运动

刚体运动是机器人学的核心概念，描述了物体在三维空间中的位置和姿态变化。本章深入探讨刚体运动的数学表示方法及其相互关系。

内容提要

- 旋转矩阵与 $SO(3)$ 群
- 齐次变换矩阵与 $SE(3)$ 群
- 指数坐标表示与轴角表示
- 螺旋运动理论与 Chasles 定理
- 伴随表示与坐标变换
- 运动学中的数学工具
- 旋转的复合与插值
- 刚体运动的微分性质
- 运动螺旋与瞬时螺旋轴

3.1 旋转表示方法

3.1.1 旋转矩阵的基本理论

定义 3.1 (旋转矩阵)

旋转矩阵 $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是满足以下条件的矩阵：

- $R^T R = I$ (正交性)
- $\det(R) = 1$ (保持方向，即右手系)

所有 3×3 旋转矩阵构成特殊正交群 $SO(3)$ 。

定理 3.1 (旋转矩阵的性质)

设 $R \in SO(3)$ ，则：

- $R^{-1} = R^T$
- $\|Rx\| = \|x\|$ 对所有 $x \in \mathbb{R}^3$ (长度保持)
- $(Rx) \cdot (Ry) = x \cdot y$ 对所有 $x, y \in \mathbb{R}^3$ (内积保持)
- $R(x \times y) = (Rx) \times (Ry)$ (叉积保持)
- R 的特征值为 $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ ，其中 θ 是旋转角

证明. 性质 (4) 的证明：设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ， $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 。由于旋转保持体积和方向，有：

$$\det(R[x, y, z]) = \det(R) \det([x, y, z]) = \det([x, y, z]) \quad (3.1)$$

这等价于 $R(x \times y) = (Rx) \times (Ry)$ 。

3.1.2 基本旋转矩阵

绕坐标轴的基本旋转矩阵为：

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

定理 3.2 (旋转的复合)

对于旋转矩阵 $R_1, R_2 \in SO(3)$:

1. 如果 $R' = R_1 R_2$, 则先进行 R_2 旋转, 再进行 R_1 旋转 (左乘解释)
2. 旋转的复合仍然是旋转: $SO(3)$ 在矩阵乘法下封闭
3. 一般情况下 $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$ (非交换性)

**3.1.3 欧拉角与万向节锁****定义 3.2 (欧拉角)**

欧拉角是用三个角度参数表示旋转的方法。常见的 ZYZ 欧拉角定义为:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \quad (3.5)$$



警告 3.1 (万向节锁问题). 当欧拉角的中间角度为 $\pm 90^\circ$ 时, 会出现万向节锁现象:

- 失去一个旋转自由度
- 存在多个欧拉角表示同一旋转
- 数值计算不稳定

3.1.4 四元数表示**定义 3.3 (单位四元数)**

单位四元数 $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, 满足 $\|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, 可以表示旋转。

**定理 3.3 (四元数到旋转矩阵的转换)**

单位四元数 $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ 对应的旋转矩阵为:

$$R(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$



3.2 指数坐标表示

3.2.1 轴角表示的几何意义

定理 3.4 (旋转轴定理)

每个非恒等旋转都有唯一的旋转轴，通过原点且方向为单位向量 $\hat{\omega}$ 。绕该轴旋转角度 θ 的旋转可以表示为 $R = e^{[\hat{\omega}]\theta}$ 。

定义 3.4 (反对称矩阵映射)

定义映射 $\wedge : \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$:

$$\omega^\wedge = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

其逆映射为 $\vee : so(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。

3.2.2 Rodriguez 公式的详细推导

定理 3.5 (Rodrigues 公式)

对于任意 $[\hat{\omega}]\theta \in so(3)$ ，其中 $\|\hat{\omega}\| = 1$ ，有：

$$e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin \theta [\hat{\omega}] + (1 - \cos \theta) [\hat{\omega}]^2 \quad (3.8)$$

这给出了从李代数元素到李群元素的显式公式。

证明. 设 $A = [\hat{\omega}]$ ，其中 $\|\hat{\omega}\| = 1$ 。我们需要详细推导反对称矩阵的重要性质。

步骤 1: 建立反对称矩阵的幂次性质

对于反对称矩阵 $A = [\hat{\omega}]$ ，其中 $\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ 是单位向量，有：

$$A = [\hat{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

计算 A^2 :

$$A^2 = [\hat{\omega}]^2 = [\hat{\omega}][\hat{\omega}] \quad (3.10)$$

$$= \hat{\omega}\hat{\omega}^T - \|\hat{\omega}\|^2 I \quad (3.11)$$

$$= \hat{\omega}\hat{\omega}^T - I \quad (\text{因为 } \|\hat{\omega}\| = 1) \quad (3.12)$$

计算 A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = [\hat{\omega}](\hat{\omega}\hat{\omega}^T - I) \quad (3.13)$$

$$= [\hat{\omega}]\hat{\omega}\hat{\omega}^T - [\hat{\omega}] \quad (3.14)$$

$$= 0 - [\hat{\omega}] \quad (\text{因为 } [\hat{\omega}]\hat{\omega} = 0) \quad (3.15)$$

$$= -A \quad (3.16)$$

继续计算更高阶的幂：

$$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (-A) = -A^2 \quad (3.17)$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot (-A^2) = -A^3 = -(-A) = A \quad (3.18)$$

$$A^6 = A \cdot A^5 = A \cdot A = A^2 \quad (3.19)$$

因此得到周期性模式：

$$A^{2k} = (-1)^{k-1} A^2 \quad \text{对 } k \geq 1 \quad (3.20)$$

$$A^{2k+1} = (-1)^k A \quad \text{对 } k \geq 0 \quad (3.21)$$

步骤 2：矩阵指数的幂级数展开

利用矩阵指数的定义：

$$e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2!} + \frac{(A\theta)^3}{3!} + \frac{(A\theta)^4}{4!} + \frac{(A\theta)^5}{5!} + \dots \quad (3.22)$$

步骤 3：利用周期性性质重新组织级数

将级数按 A 的奇偶幂分组：

$$e^{A\theta} = I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!} A^2 + \frac{\theta^3}{3!} A^3 + \frac{\theta^4}{4!} A^4 + \frac{\theta^5}{5!} A^5 + \frac{\theta^6}{6!} A^6 + \dots \quad (3.23)$$

$$= I + A\theta + \frac{\theta^2}{2!} A^2 + \frac{\theta^3}{3!} (-A) + \frac{\theta^4}{4!} (-A^2) + \frac{\theta^5}{5!} A + \frac{\theta^6}{6!} A^2 + \dots \quad (3.24)$$

$$= I + A \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) + A^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \dots \right) \quad (3.25)$$

步骤 4：识别三角函数级数

观察到：

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.26)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots \quad (3.27)$$

因此：

$$1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \dots \quad (3.28)$$

步骤 5：得出最终结果

将三角函数级数代入，得到：

$$e^{A\theta} = I + A \sin \theta + A^2 (1 - \cos \theta) \quad (3.29)$$

$$= I + [\hat{\omega}] \sin \theta + [\hat{\omega}]^2 (1 - \cos \theta) \quad (3.30)$$

这就是著名的 **Rodrigues 公式**。

几何意义： 此公式表示绕轴 $\hat{\omega}$ 旋转角度 θ 的旋转矩阵，体现了指数映射将李代数 $so(3)$ 中的反对称矩阵映射到李群 $SO(3)$ 中的旋转矩阵。

物理解释：

- I ：保持垂直于旋转轴的分量不变
- $[\hat{\omega}] \sin \theta$ ：产生旋转效应
- $[\hat{\omega}]^2 (1 - \cos \theta)$ ：沿旋转轴方向的投影调整

□

3.2.3 对数映射与轴角提取

定理 3.6 (旋转矩阵的对数映射)

给定旋转矩阵 $R \in SO(3)$, 其对数映射 $\log(R) = [\hat{\omega}]\theta$ 的计算步骤:

情况 1: $R = I$, 则 $\theta = 0$, $\hat{\omega}$ 任意。

情况 2: $\text{tr}(R) = -1$, 则 $\theta = \pi$ 。此时:

- 找到 R 的特征值为 1 的特征向量作为 $\hat{\omega}$

- 或使用公式: $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2(1+R_{ii})}} \begin{bmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{bmatrix}$, 其中 $R_{ii} = \max\{R_{11}, R_{22}, R_{33}\}$

情况 3: 其他情况, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{tr}(R)-1}{2}\right) \in (0, \pi)$, 且:

$$[\hat{\omega}] = \frac{\theta}{2\sin\theta}(R - R^T) \quad (3.31)$$



3.3 齐次变换与 SE(3)

3.3.1 SE(3) 群的结构

定义 3.5 (特殊欧几里得群)

三维特殊欧几里得群定义为:

$$SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : R \in SO(3), p \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (3.32)$$

它表示三维空间中所有保向刚体运动 (旋转和平移的复合)。



定理 3.7 (SE(3) 的群运算)

设 $T_1 = \begin{bmatrix} R_1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} R_2 & p_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$, 则:

乘法:

$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 p_2 + p_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

逆元:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

单位元:

$$I_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$



3.3.2 齐次坐标与变换

定义 3.6 (齐次坐标)

三维点 $p = (x, y, z)^T$ 的齐次坐标表示为 $\tilde{p} = (x, y, z, 1)^T$ 。齐次变换矩阵作用于齐次坐标：

$$\tilde{p}' = T\tilde{p} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rp + t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$



3.3.3 se(3) 李代数

定义 3.7 (se(3) 李代数)

$SE(3)$ 的李代数是：

$$se(3) = \left\{ [\mathcal{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : [\omega] \in so(3), v \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (3.37)$$

这是一个 6 维向量空间，可以用六维向量 $\mathcal{S} = (\omega, v)^T \in \mathbb{R}^6$ 参数化。



定理 3.8 (se(3) 的李括号)

对于 $\mathcal{S}_1 = (\omega_1, v_1)^T, \mathcal{S}_2 = (\omega_2, v_2)^T \in \mathbb{R}^6$ ，它们的李括号为：

$$[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2] = \begin{bmatrix} \omega_1 \times \omega_2 \\ v_1 \times \omega_2 + \omega_1 \times v_2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$



3.4 螺旋运动理论

3.4.1 Chasles 定理

定理 3.9 (Chasles 定理)

任何刚体位移都可以表示为绕某个轴的螺旋运动，即同时进行旋转和沿旋转轴的平移。



定义 3.8 (螺旋轴参数)

螺旋轴由以下参数完全确定：

- 轴的方向：单位向量 $\hat{s} \in \mathbb{R}^3$
- 轴上一点： $q \in \mathbb{R}^3$
- 螺距： $h =$ 单位旋转角对应的沿轴平移距离



定理 3.10 (螺旋运动的参数化)

给定螺旋轴参数 (\hat{s}, q, h) ，绕该轴进行角度为 θ 的螺旋运动对应的变换矩阵为：

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} e^{[\hat{s}]\theta} & (I - e^{[\hat{s}]\theta})(\hat{s} \times q) + h\theta\hat{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$



3.4.2 螺旋坐标

定义 3.9 (螺旋坐标)

螺旋 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$ 可以分为两种情况:

情况 1: $\omega \neq 0$ (有限螺旋)

- 轴方向: $\hat{s} = \frac{\omega}{\|\omega\|}$
- 轴上一点: $q = \frac{\omega \times v}{\|\omega\|^2}$
- 螺距: $h = \frac{\omega \cdot v}{\|\omega\|^2}$

情况 2: $\omega = 0$ (无限螺旋, 纯平移)

- 平移方向: $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$
- 螺旋轴在无穷远处, 平行于 v



3.5 SE(3) 的指数映射

3.5.1 指数映射公式

定理 3.11 (SE(3) 的指数映射)

对于 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$:

情况 1: $\omega = 0$ (纯平移)

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

情况 2: $\omega \neq 0$ (螺旋运动)

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

其中:

$$G(\theta) = \frac{1}{\|\omega\|^2} \left(I\theta + (1 - \cos(\|\omega\|\theta)) \frac{[\omega]}{\|\omega\|} + (\|\omega\|\theta - \sin(\|\omega\|\theta)) \frac{[\omega]^2}{\|\omega\|^2} \right) \quad (3.42)$$



推论 3.1 (单位螺旋的情况)

当 $\|\omega\| = 1$ 时:

$$G(\theta) = I\theta + (1 - \cos \theta)[\omega] + (\theta - \sin \theta)[\omega]^2 \quad (3.43)$$



3.5.2 SE(3) 的对数映射

定理 3.12 (SE(3) 的对数映射)

给定 $T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$, 计算 $\log(T) = [\mathcal{S}]\theta$:

情况 1: $R = I$ (纯平移)

$$\mathcal{S} = (0, p)^T, \quad \theta = 1 \quad (3.44)$$

情况 2: $R \neq I$ (一般螺旋运动)

1. 计算 $[\omega]\theta = \log(R)$
2. 计算 $G^{-1}(\theta) = \frac{1}{\theta}I - \frac{1}{2}[\omega] + \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} - 1 \right) [\omega]^2$
3. 得到 $v = G^{-1}(\theta)p$

4. 输出 $\mathcal{S} = (\omega, v)^T$



3.6 伴随表示

3.6.1 SE(3) 的伴随表示

定理 3.13 (SE(3) 的伴随表示)

对于 $T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$, 其伴随表示矩阵为:

$$[\text{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (3.45)$$



定理 3.14 (伴随表示的几何意义)

伴随表示描述了螺旋在不同坐标系之间的变换:

$$\mathcal{V}_a = [\text{Ad}_{T_{ab}}] \mathcal{V}_b \quad (3.46)$$

其中 \mathcal{V}_a 和 \mathcal{V}_b 分别是同一螺旋在坐标系 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 中的表示。



3.6.2 adjoint 表示

定理 3.15 (se(3) 的 adjoint 表示)

对于 $\mathcal{S} = (\omega, v) \in \mathbb{R}^6$, 其 adjoint 表示矩阵为:

$$[\text{ad}_{\mathcal{S}}] = \begin{bmatrix} [\omega] & 0 \\ [v] & [\omega] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (3.47)$$



3.7 刚体运动的微分性质

3.7.1 角速度与旋转矩阵的关系

定理 3.16 (角速度公式)

设 $R(t) \in SO(3)$ 是时间的函数, 则存在向量 $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ 使得:

$$\dot{R}(t) = [\omega(t)]R(t) = R(t)[\omega_b(t)] \quad (3.48)$$

其中 $\omega(t)$ 是空间角速度, $\omega_b(t) = R^T(t)\omega(t)$ 是体角速度。



3.7.2 螺旋速度

定义 3.10 (空间螺旋速度)

刚体运动 $T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的空间螺旋速度定义为：

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{p} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

其中 ω 是空间角速度。

定义 3.11 (体螺旋速度)

体螺旋速度定义为：

$$\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \omega \\ R^T (\dot{p} - \omega \times p) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

定理 3.17 (螺旋速度变换)

空间螺旋速度和体螺旋速度之间的关系为：

$$\mathcal{V}_s = [\text{Ad}_T] \mathcal{V}_b \quad (3.51)$$

3.8 实际应用与计算考虑

3.8.1 旋转插值

定义 3.12 (球面线性插值 (SLERP))

在 $SO(3)$ 中，两个旋转 R_0 和 R_1 之间的球面线性插值为：

$$R(t) = R_0 (R_0^T R_1)^t, \quad t \in [0, 1] \quad (3.52)$$

3.8.2 数值稳定性考虑

警告 3.2 (数值计算问题). • 接近 $\theta = \pi$ 时，对数映射的计算可能不稳定

- 小角度情况下， $\sin \theta \approx \theta$, $1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2}$
- 四元数表示可以避免万向节锁问题
- 旋转矩阵的正交性在数值计算中可能丢失，需要重新正交化

3.9 坐标系与参考框架

3.9.1 坐标系变换

定义 3.13 (坐标系表示)

坐标系 $\{b\}$ 相对于坐标系 $\{a\}$ 的表示为：

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

其中 R_{ab} 表示 $\{b\}$ 相对于 $\{a\}$ 的姿态， p_{ab} 表示 $\{b\}$ 的原点在 $\{a\}$ 中的位置。

定理 3.18 (相邻下标消除法则)

坐标变换满足：

$$T_{ac} = T_{ab}T_{bc} \quad (3.54)$$

即相邻下标可以消除。



本章详细介绍了刚体运动的各种数学表示方法及其相互关系。这些工具为机器人的运动学分析提供了坚实的数学基础。

第4章 前向运动学

前向运动学是机器人学的基础问题之一，它研究如何根据给定的关节变量计算末端执行器的位置和姿态。本章详细介绍前向运动学的数学理论和计算方法。

内容提要

- 指数积公式理论
- 空间形式与体形式
- 螺旋轴的确定方法
- 串联机构的前向运动学
- 并联机构的前向运动学
- D-H 参数方法比较
- 前向运动学的数值计算
- 机构奇异性分析
- 实际应用案例

4.1 指数积公式基础理论

4.1.1 基本概念

定义 4.1 (关节螺旋)

第 i 个关节的螺旋轴 \mathcal{S}_i 定义为该关节在零位时单位速度对应的瞬时螺旋轴。对于：

- 转动关节： $\mathcal{S}_i = (\omega_i, v_i)$ ，其中 $\|\omega_i\| = 1$
- 移动关节： $\mathcal{S}_i = (0, v_i)$ ，其中 $\|v_i\| = 1$

定理 4.1 (指数积公式)

对于具有 n 个关节的串联机器人，末端执行器的配置可以表示为：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \quad (4.1)$$

其中：

- \mathcal{S}_i 是第 i 个关节在零位时的螺旋轴
- θ_i 是第 i 个关节变量
- M 是零位时末端执行器相对于基座的配置

证明. 考虑从零位开始，依次驱动每个关节。第 i 个关节运动 θ_i 对应的变换为 $e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i}$ 。由于螺旋轴在零位定义，后续关节运动不会改变前面关节的螺旋轴表示，因此可以简单地将变换矩阵相乘。□

4.1.2 螺旋轴的几何意义

定义 4.2 (转动关节的螺旋轴)

对于绕轴线 l 旋转的关节，设轴线方向为单位向量 $\hat{\omega}$ ，轴线上任一点为 q ，则关节螺旋为：

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ q \times \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

定义 4.3 (移动关节的螺旋轴)

对于沿方向 \hat{v} 移动的关节，关节螺旋为：

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{v} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

例题 4.1 平面 2R 机械臂 考虑平面上的两连杆机械臂：

- 连杆长度： l_1, l_2
 - 关节 1：绕 z 轴旋转，位于原点
 - 关节 2：绕 z 轴旋转，位于 $(l_1, 0, 0)$
- 螺旋轴为：

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

初始配置：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

前向运动学：

$$T(\theta_1, \theta_2) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} M \quad (4.7)$$

4.2 空间形式与体形式

4.2.1 空间形式

定义 4.4 (空间形式前向运动学)

在空间形式中，所有螺旋轴都在固定的基座坐标系中表示：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1^s]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2^s]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{S}_n^s]\theta_n} M \quad (4.8)$$

其中 \mathcal{S}_i^s 是第 i 个关节在基座坐标系中的螺旋轴。

定理 4.2 (空间螺旋轴的计算)

如果第 i 个关节之前有 $(i-1)$ 个关节，则：

$$\mathcal{S}_i^s = \text{Ad}_{T_{0,i-1}(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})} \mathcal{S}_i^{(i)} \quad (4.9)$$

其中 $\mathcal{S}_i^{(i)}$ 是第 i 个关节在自身坐标系中的表示。

4.2.2 体形式

定义 4.5 (体形式前向运动学)

在体形式中, 所有螺旋轴都在末端执行器坐标系中表示:

$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \quad (4.10)$$

其中 \mathcal{B}_i 是第 i 个关节在末端执行器坐标系中的螺旋轴。

定理 4.3 (空间形式与体形式的关系)

空间螺旋轴和体螺旋轴之间的关系为:

$$\mathcal{S}_i = \text{Ad}_M \mathcal{B}_i \quad (4.11)$$

证明. 由于 $T = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}$, 通过伴随表示的性质可以得到上述关系。 □

4.3 螺旋轴的确定方法

4.3.1 转动关节螺旋轴

算法 4.1 (转动关节螺旋轴计算). 给定转动关节的轴线, 计算其螺旋轴:

1. 确定关节轴线的方向向量 $\hat{\omega}$
2. 在轴线上选择一点 q
3. 计算 $v = q \times \hat{\omega}$
4. 螺旋轴为 $\mathcal{S} = (\hat{\omega}, v)^T$

注 轴线上不同点的选择会导致不同的 v , 但对应的螺旋轴表示同一个关节运动。

4.3.2 移动关节螺旋轴

定理 4.4 (移动关节的表示)

移动关节的螺旋轴简单地为:

$$\mathcal{S} = (0, \hat{v})^T \quad (4.12)$$

其中 \hat{v} 是移动方向的单位向量。

4.4 复杂机构的前向运动学

4.4.1 分支机构

定义 4.6 (分支机构)

分支机构是指从某个连杆分出多个分支的机构, 如机器人手指或多臂机器人。

定理 4.5 (分支机构的前向运动学)

对于具有分支结构的机构，每个分支的前向运动学可以独立计算：

$$T_k(\theta) = T_{common}(\theta_{common}) \cdot T_{branch,k}(\theta_{branch,k}) \quad (4.13)$$

其中 T_{common} 是公共部分的运动学， $T_{branch,k}$ 是第 k 个分支的运动学。

**4.4.2 闭链机构****定义 4.7 (闭链约束)**

闭链机构必须满足闭链约束：

$$\prod_{i=1}^n T_i(\theta_i) = I \quad (4.14)$$

其中 $T_i(\theta_i)$ 是第 i 个关节的变换矩阵。

**定理 4.6 (闭链机构的自由度)**

n 个关节的闭链机构的自由度为：

$$\text{DoF} = \sum_{i=1}^n f_i - 6 \quad (4.15)$$

其中 f_i 是第 i 个关节的自由度数。

**4.5 数值计算方法****4.5.1 矩阵指数的计算**

算法 4.2 (矩阵指数数值计算). 对于 $e^{[\mathcal{S}]\theta}$ 的计算：

1. 如果 $\|\omega\| = 0$ (移动关节)：

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

2. 如果 $\|\omega\| \neq 0$ (转动关节)，使用 *Rodrigues* 公式：

$$e^{[\mathcal{S}]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

其中：

$$G(\theta) = \frac{I\theta}{\|\omega\|} + \frac{1 - \cos(\|\omega\|\theta)}{\|\omega\|^2} [\omega] + \frac{\|\omega\|\theta - \sin(\|\omega\|\theta)}{\|\omega\|^3} [\omega]^2 \quad (4.18)$$

4.5.2 数值稳定性考虑

警告 4.1 (数值计算问题). • 当 $\|\omega\| \rightarrow 0$ 时，需要使用泰勒展开避免除零

- 当 $\theta \rightarrow \pi$ 时， $\sin \theta \rightarrow 0$ ，需要特殊处理
- 累积的数值误差可能导致变换矩阵失去正交性

4.6 奇异性分析

4.6.1 运动学奇异性

定义 4.8 (奇异配置)

当机器人的雅可比矩阵失去满秩时，对应的配置称为奇异配置：

$$\text{rank}(J(\theta)) < \min(6, n) \quad (4.19)$$

其中 n 是关节数。



定理 4.7 (奇异性的几何解释)

奇异配置通常对应于：

- 两个或多个关节轴线重合
- 机械臂完全伸展或收缩
- 腕部关节轴线交于一点



4.6.2 奇异性的影响

定理 4.8 (奇异性附近的行为)

在奇异配置附近：

- 某些末端执行器运动变得不可能
- 关节速度可能变得任意大
- 系统的可操作性急剧下降
- 控制系统可能变得不稳定



4.7 实际应用案例

4.7.1 6R 串联机械臂

例题 4.2 PUMA 560 机械臂 PUMA 560 是经典的 6 自由度机械臂，其 D-H 参数为：

表 4.1: PUMA 560 D-H 参数

关节	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	-90°	0	θ_2
3	a_2	0	d_3	θ_3
4	a_3	-90°	d_4	θ_4
5	0	90°	0	θ_5
6	0	-90°	0	θ_6

使用指数积公式，螺旋轴为：

$$\mathcal{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (4.20)$$

$$\mathcal{S}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \quad (4.21)$$

$$\mathcal{S}_3 = (0, 1, 0, -d_3, 0, 0)^T \quad (4.22)$$

$$\vdots \quad (4.23)$$

4.7.2 并联机构

例题 4.3 Stewart 平台 Stewart 平台是经典的 6 自由度并联机构，由 6 条可变长度的腿连接上下两个平台。

前向运动学问题：给定 6 条腿的长度 l_1, \dots, l_6 ，求上平台的位置和姿态。

这是一个高度非线性的问题，一般情况下有多达 40 个解。求解方法包括：

- 数值迭代法（牛顿-拉夫逊法）
- 多项式求解法
- 几何分析法

4.8 D-H 参数法比较

4.8.1 D-H 参数法的局限性

注[D-H 参数的问题] 传统的 D-H 参数方法存在以下问题：

- 对于平行轴的关节，D-H 参数可能不唯一
- 需要在每个连杆上建立坐标系
- 不易处理闭链机构
- 奇异性附近数值不稳定

4.8.2 指数积公式的优势

定理 4.9 (指数积公式的优点)

相比 D-H 参数法，指数积公式具有以下优势：

- 只需要一个全局坐标系
- 螺旋轴定义直观，具有明确的几何意义
- 易于处理复杂机构和闭链
- 数值计算更稳定
- 便于速度和加速度分析



4.9 误差分析与标定

4.9.1 运动学误差源

定义 4.9 (运动学误差)

实际机器人的运动学模型与理论模型之间的差异称为运动学误差，主要来源包括：

- 制造公差导致的几何参数误差
- 装配误差
- 关节间隙和柔性变形
- 传感器误差



4.9.2 运动学标定

算法 4.3 (运动学标定步骤). 1. 建立包含误差参数的运动学模型

2. 设计标定轨迹，采集测量数据

3. 建立误差方程： $\Delta p = J_p \Delta \phi$

4. 使用最小二乘法求解参数误差: $\Delta\phi = (J_p^T J_p)^{-1} J_p^T \Delta p$
5. 更新运动学参数并验证精度

本章全面介绍了前向运动学的理论基础和计算方法。指数积公式为现代机器人运动学分析提供了强有力的数学工具，具有计算高效、几何直观等优点。

第5章 速度运动学与静力学

速度运动学研究关节速度与末端执行器速度之间的关系。静力学则研究机器人在静态平衡条件下的受力分析。

内容提要

- 螺旋速度的概念与表示
- 几何雅可比矩阵的推导
- 空间雅可比与体雅可比
- 雅可比矩阵的奇异性分析
- 可操作性度量
- 静力学分析与虚功原理
- 关节力矩与末端力的关系
- 机器人的力/力矩能力分析
- 冗余机器人的速度解析

5.1 螺旋速度基础

5.1.1 螺旋速度的定义

定义 5.1 (空间螺旋速度)

刚体运动 $T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的空间螺旋速度定义为：

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{p} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

其中 ω 是空间角速度， \dot{p} 是原点的线速度。

定义 5.2 (体螺旋速度)

相对于运动坐标系，体螺旋速度定义为：

$$\mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

其中 $\omega_b = R^T \omega$ 是体角速度， v_b 是体线速度。

定理 5.1 (螺旋速度的变换关系)

空间螺旋速度和体螺旋速度之间的关系为：

$$\mathcal{V}_s = [\text{Ad}_T] \mathcal{V}_b \quad (5.3)$$

其中 $[\text{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix}$ 。

5.1.2 螺旋速度的时间导数

定理 5.2 (刚体运动的微分方程)

给定刚体运动 $T(t)$ ，其满足微分方程：

$$\dot{T} = [\mathcal{V}_s]T = T[\mathcal{V}_b] \quad (5.4)$$

其中 $[\mathcal{V}_s], [\mathcal{V}_b] \in se(3)$ 分别是空间和体螺旋速度的矩阵表示。

证明. 设 $T(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则：

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$= \begin{bmatrix} [\omega]R & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$= \begin{bmatrix} [\omega] & \dot{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$= [\mathcal{V}_s]T \quad (5.8)$$

□

5.2 雅可比矩阵的推导

5.2.1 几何雅可比矩阵

定义 5.3 (几何雅可比矩阵)

几何雅可比矩阵 $J(\theta) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ 定义了关节速度与末端执行器螺旋速度之间的线性关系：

$$\mathcal{V} = J(\theta)\dot{\theta} \quad (5.9)$$

其中 $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^6$ 是螺旋速度， $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$ 是关节速度向量。

♣

5.2.2 空间雅可比矩阵

定理 5.3 (空间雅可比矩阵的构造)

对于串联机器人，空间雅可比矩阵的第 i 列为：

$$J_i^s = \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}} \mathcal{S}_i \quad (5.10)$$

即：

$$J^s(\theta) = \begin{bmatrix} J_1^s & J_2^s & \dots & J_n^s \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

♡

证明. 我们需要详细推导空间雅可比矩阵每一列的物理意义和数学构造。

步骤 1：前向运动学的时间导数

考虑前向运动学：

$$T(\theta) = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \quad (5.12)$$

对时间求导：

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \right) \quad (5.13)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \quad (5.14)$$

步骤 2：计算偏导数

第 i 个关节对前向运动学的贡献：

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_i} = e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}} \cdot [\mathcal{S}_i] \cdot e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \quad (5.15)$$

步骤 3：利用螺旋速度关系

由于 $\dot{T} = [\mathcal{V}_s]T$ ，我们有：

$$[\mathcal{V}_s] = \dot{T}T^{-1} \quad (5.16)$$

将第 2 步的结果代入：

$$[\mathcal{V}_s] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \theta_i} T^{-1} \dot{\theta}_i \quad (5.17)$$

$$= \sum_{i=1}^n e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}} [\mathcal{S}_i] e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \cdot (e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M)^{-1} \dot{\theta}_i \quad (5.18)$$

步骤 4：简化表达式

注意到：

$$e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M \cdot (e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} M)^{-1} \quad (5.19)$$

$$= e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n} \cdot (e^{[\mathcal{S}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{S}_n]\theta_n})^{-1} \quad (5.20)$$

$$= I \quad (5.21)$$

因此：

$$[\mathcal{V}_s] = \sum_{i=1}^n e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}} [\mathcal{S}_i] (e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}})^{-1} \dot{\theta}_i \quad (5.22)$$

步骤 5：应用伴随表示

利用伴随表示的定义：

$$\text{Ad}_g(X) = gXg^{-1} \quad (5.23)$$

我们得到：

$$[\mathcal{V}_s] = \sum_{i=1}^n \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}} ([\mathcal{S}_i]) \dot{\theta}_i \quad (5.24)$$

$$= \sum_{i=1}^n [\text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}} \mathcal{S}_i] \dot{\theta}_i \quad (5.25)$$

步骤 6：得出雅可比矩阵

因此，空间雅可比矩阵的第 i 列为：

$$J_i^s = \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}} \mathcal{S}_i \quad (5.26)$$

递推计算公式:

$$J_1^s = \mathcal{S}_1 \quad (5.27)$$

$$J_2^s = \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}} \mathcal{S}_2 \quad (5.28)$$

$$J_3^s = \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}} \mathcal{S}_3 \quad (5.29)$$

$$\vdots \quad (5.30)$$

$$J_i^s = \text{Ad}_{e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{S}_{i-1}]\theta_{i-1}}} \mathcal{S}_i \quad (5.31)$$

物理意义: 第 i 列 J_i^s 表示当第 i 个关节以单位角速度运动而其他关节静止时, 末端执行器在空间坐标系 $\{s\}$ 下的瞬时螺旋速度。伴随变换 $\text{Ad}_{T_{0,i-1}}$ 将第 i 个关节轴上的单位螺旋转换到空间坐标系中。 \square

5.2.3 体雅可比矩阵

定理 5.4 (体雅可比矩阵的构造)

体雅可比矩阵的第 i 列为:

$$J_i^b = \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}} \mathcal{B}_i \quad (5.32)$$

其中 \mathcal{B}_i 是体形式的螺旋轴。

证明. 对于体形式的前向运动学:

$$T(\theta) = M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \quad (5.33)$$

步骤 1: 体螺旋速度关系

体螺旋速度满足:

$$T\dot{T}^{-1} = [\mathcal{V}_b] \quad (5.34)$$

步骤 2: 时间导数计算

$$\dot{T} = M \sum_{i=1}^n e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_{i-1}]\theta_{i-1}} [\mathcal{B}_i] e^{[\mathcal{B}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_i \quad (5.35)$$

步骤 3: 计算 $\dot{T}T^{-1}$

$$\dot{T}T^{-1} = M \sum_{i=1}^n e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_{i-1}]\theta_{i-1}} [\mathcal{B}_i] e^{[\mathcal{B}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dot{\theta}_i \quad (5.36)$$

$$\cdot (M e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n})^{-1} \quad (5.37)$$

$$= \sum_{i=1}^n e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_{i-1}]\theta_{i-1}} [\mathcal{B}_i] (e^{[\mathcal{B}_1]\theta_1} \dots e^{[\mathcal{B}_{i-1}]\theta_{i-1}})^{-1} \quad (5.38)$$

$$\cdot e^{[\mathcal{B}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n} (e^{[\mathcal{B}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n})^{-1} \dot{\theta}_i \quad (5.39)$$

步骤 4: 简化并应用伴随表示

注意第一项简化为单位矩阵, 第二项可以用伴随表示表示:

$$\dot{T}T^{-1} = \sum_{i=1}^n [\mathcal{B}_i] \cdot \text{Ad}_{e^{[\mathcal{B}_i]\theta_i} \dots e^{[\mathcal{B}_n]\theta_n}}^{-1} \dot{\theta}_i \quad (5.40)$$

$$= \sum_{i=1}^n \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}} [\mathcal{B}_i] \dot{\theta}_i \quad (5.41)$$

步骤 5: 得出体雅可比

因此：

$$[\mathcal{V}_b] = \sum_{i=1}^n [\text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}} \mathcal{B}_i] \dot{\theta}_i \quad (5.42)$$

体雅可比矩阵的第 i 列为：

$$J_i^b = \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}} \mathcal{B}_i \quad (5.43)$$

递推计算公式（从右向左）：

$$J_n^b = \mathcal{B}_n \quad (5.44)$$

$$J_{n-1}^b = \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n}} \mathcal{B}_{n-1} \quad (5.45)$$

$$J_{n-2}^b = \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} e^{-[\mathcal{B}_{n-1}]\theta_{n-1}}} \mathcal{B}_{n-2} \quad (5.46)$$

$$\vdots \quad (5.47)$$

$$J_i^b = \text{Ad}_{e^{-[\mathcal{B}_n]\theta_n} \dots e^{-[\mathcal{B}_{i+1}]\theta_{i+1}}} \mathcal{B}_i \quad (5.48)$$

物理意义：第 i 列 J_i^b 表示当第 i 个关节以单位角速度运动时，末端执行器在体坐标系 $\{b\}$ 下的瞬时螺旋速度。□

定理 5.5 (空间雅可比与体雅可比的关系)

空间雅可比和体雅可比之间的关系为：

$$J^s(\theta) = [\text{Ad}_T] J^b(\theta) \quad (5.49)$$

其中 $[\text{Ad}_T] \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 是伴随表示矩阵：

$$[\text{Ad}_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [p]R & R \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

证明. 由螺旋速度的关系：

$$\mathcal{V}_s = \text{Ad}_T \mathcal{V}_b \quad (5.51)$$

以及：

$$\mathcal{V}_s = J^s(\theta) \dot{\theta} \quad (5.52)$$

$$\mathcal{V}_b = J^b(\theta) \dot{\theta} \quad (5.53)$$

因此：

$$J^s(\theta) \dot{\theta} = \text{Ad}_T J^b(\theta) \dot{\theta} \quad (5.54)$$

由于这对任意 $\dot{\theta}$ 都成立，所以：

$$J^s(\theta) = [\text{Ad}_T] J^b(\theta) \quad (5.55)$$

几何意义解释：

- 空间雅可比 J^s ：描述关节运动如何在固定的空间坐标系 $\{s\}$ 中产生末端执行器的速度
- 体雅可比 J^b ：描述关节运动如何在随末端执行器运动的体坐标系 $\{b\}$ 中产生速度
- 伴随变换 $[\text{Ad}_T]$ ：提供了两个坐标系之间螺旋速度的转换关系

应用场景：

- 力控制： $\tau = (J^s)^T(\theta) \mathcal{F}_s$ （空间力到关节力矩的映射）
- 速度控制： $\mathcal{V}_s = J^s(\theta) \dot{\theta}$ （关节速度到空间速度的映射）
- 奇异性分析：通过分析 $J^s(\theta)$ 或 $J^b(\theta)$ 的秩来识别奇异配置

□

定理 5.6 (雅可比矩阵列的几何解释)

雅可比矩阵的第 i 列 J_i 表示当第 i 个关节以单位角速度运动而其他关节静止时，末端执行器的瞬时螺旋速度。

**5.2.4 雅可比矩阵的计算实例**

例题 5.1 平面 2R 机械臂的雅可比矩阵 对于平面 2R 机械臂，连杆长度为 l_1, l_2 ：

空间螺旋轴为：

$$\mathcal{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (5.56)$$

$$\mathcal{S}_2 = (0, 0, 1, -l_1, 0, 0)^T \quad (5.57)$$

空间雅可比矩阵为：

$$J^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_2 c_{12} \\ -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

其中 $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ 。

5.3 奇异性分析**5.3.1 雅可比奇异性****定义 5.4 (奇异配置)**

当雅可比矩阵 $J(\theta)$ 失去满秩时，配置 θ 称为奇异配置：

$$\text{rank}(J(\theta)) < \min(6, n) \quad (5.59)$$

**定理 5.7 (奇异性的分类)**

奇异性可以分为三类：

1. 边界奇异性：机械臂完全伸展或收缩时发生
2. 内部奇异性：由于关节轴线特殊配置导致
3. 腕部奇异性：腕部多个轴线交汇时发生

**5.3.2 奇异性的数学分析****定理 5.8 (奇异值分解分析)**

对雅可比矩阵进行奇异值分解：

$$J = U \Sigma V^T \quad (5.60)$$

其中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, σ_i 是奇异值。

当 $\min(\sigma_i) \rightarrow 0$ 时，系统接近奇异。



5.3.3 可操作性度量

定义 5.5 (Yoshikawa 可操作性度量)

Yoshikawa 可操作性度量定义为：

$$w(\theta) = \sqrt{\det(J(\theta)J^T(\theta))} \quad (5.61)$$

定理 5.9 (可操作性的几何意义)

可操作性度量 $w(\theta)$ 与末端执行器可达速度椭球体的体积成正比。当 $w(\theta) = 0$ 时，系统处于奇异配置。

定义 5.6 (条件数)

雅可比矩阵的条件数定义为：

$$\kappa(J) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (5.62)$$

条件数越大，系统越接近奇异。

5.4 冗余机器人的速度解析

5.4.1 冗余自由度的利用

定义 5.7 (冗余机器人)

如果机器人的关节数 n 大于任务空间的维数 m ，则称该机器人为冗余机器人。冗余度为 $n - m$ 。

定理 5.10 (冗余机器人的速度解)

对于冗余机器人，给定期望的末端执行器速度 \mathcal{V}_d ，关节速度的通解为：

$$\dot{\theta} = J^\dagger \mathcal{V}_d + (I - J^\dagger J) \dot{\theta}_0 \quad (5.63)$$

其中：

- $J^\dagger = J^T(JJ^T)^{-1}$ 是右伪逆矩阵
- $\dot{\theta}_0$ 是任意的关节速度向量
- $(I - J^\dagger J)$ 是零空间投影矩阵

5.4.2 冗余度的优化利用

算法 5.1 (梯度投影法). 利用冗余自由度优化性能指标 $H(\theta)$ ：

1. 计算性能指标的梯度： $\nabla H = \frac{\partial H}{\partial \theta}$
2. 将梯度投影到零空间： $\dot{\theta}_0 = k \nabla H$
3. 计算关节速度： $\dot{\theta} = J^\dagger \mathcal{V}_d + k(I - J^\dagger J) \nabla H$

例题 5.2 常用的性能指标

- 可操作性最大化： $H = w(\theta) = \sqrt{\det(JJ^T)}$
- 关节限制回避： $H = -\sum_{i=1}^n \frac{(\theta_i - \theta_{i,mid})^2}{(\theta_{i,max} - \theta_{i,min})^2}$
- 奇异性回避： $H = \sigma_{\min}(J)$
- 障碍物回避： $H = \min_i d_i$ ，其中 d_i 是到障碍物的距离

5.5 静力学分析

5.5.1 虚功原理

定理 5.11 (虚功原理)

对于处于静态平衡的机器人系统，外力和关节力矩做的虚功之和为零：

$$\delta W = \mathcal{F}^T \delta \mathcal{X} + \tau^T \delta \theta = 0 \quad (5.64)$$

其中：

- \mathcal{F} 是末端执行器受到的外力螺旋
- $\delta \mathcal{X}$ 是末端执行器的虚位移
- τ 是关节力矩向量
- $\delta \theta$ 是关节虚位移



5.5.2 力变换关系

定理 5.12 (力变换方程)

根据虚功原理和速度运动学关系 $\mathcal{V} = J\dot{\theta}$ ，可以得到力变换关系：

$$\tau = J^T(\theta) \mathcal{F} \quad (5.65)$$

其中 J^T 是雅可比矩阵的转置。



证明. 由虚功原理： $\mathcal{F}^T \delta \mathcal{X} + \tau^T \delta \theta = 0$

由于 $\delta \mathcal{X} = J \delta \theta$ ，代入得：

$$\mathcal{F}^T J \delta \theta + \tau^T \delta \theta = 0 \quad (5.66)$$

对于任意的 $\delta \theta$ ，必须有：

$$\tau = -J^T \mathcal{F} \quad (5.67)$$

考虑符号约定，最终得到 $\tau = J^T \mathcal{F}$ 。



5.5.3 力椭圆分析

定义 5.8 (力椭圆)

给定关节力矩约束 $\|\tau\| \leq \tau_{\max}$ ，末端执行器能够产生的力螺旋集合构成力椭圆：

$$\{\mathcal{F} : \mathcal{F} = J^{-T} \tau, \|\tau\| \leq \tau_{\max}\} \quad (5.68)$$



定理 5.13 (力椭球的形状)

力椭圆的主轴方向由 $(JJ^T)^{-1}$ 的特征向量决定，主轴长度与特征值的平方根成反比。



5.6 静态力分析的应用

5.6.1 抓取力分析

定义 5.9 (抓取矩阵)

对于多指抓取，抓取矩阵 G 描述了各手指接触力与物体所受合力螺旋的关系：

$$\mathcal{F}_{\text{object}} = G\mathbf{f}_{\text{contact}} \quad (5.69)$$

其中 $\mathbf{f}_{\text{contact}}$ 是所有接触点的力向量。



定理 5.14 (力闭合条件)

要实现力闭合抓取，抓取矩阵 G 必须满足：

$$\text{rank}(G) = 6 \quad (5.70)$$

即抓取矩阵必须满秩。



5.6.2 重力补偿

定义 5.10 (重力项)

考虑重力影响时，机器人的重力项为：

$$g(\theta) = - \sum_{i=1}^n m_i g^T \frac{\partial r_{ci}}{\partial \theta} \quad (5.71)$$

其中 m_i 是第 i 个连杆质量， r_{ci} 是第 i 个连杆质心位置。



定理 5.15 (重力补偿控制)

为了抵消重力影响，需要施加重力补偿力矩：

$$\tau_{\text{gravity}} = g(\theta) \quad (5.72)$$



5.7 速度与力的对偶性

5.7.1 速度-力对偶关系

定理 5.16 (对偶性原理)

在机器人学中，速度和力之间存在对偶关系：

- 速度映射： $\mathcal{V} = J\dot{\theta}$
- 力映射： $\tau = J^T \mathcal{F}$

这种对偶性体现在雅可比矩阵及其转置的使用上。



推论 5.1 (功率守恒)

在理想系统中（无摩擦和损耗），关节空间和任务空间的功率相等：

$$P = \tau^T \dot{\theta} = \mathcal{F}^T \mathcal{V} \quad (5.73)$$



5.8 数值计算考虑

5.8.1 伪逆的计算

算法 5.2 (雅可比伪逆的数值计算). 1. 对雅可比矩阵进行奇异值分解: $J = U\Sigma V^T$

2. 计算伪逆的奇异值: $\sigma_i^\dagger = \begin{cases} 1/\sigma_i & \text{if } \sigma_i > \epsilon \\ 0 & \text{if } \sigma_i \leq \epsilon \end{cases}$

3. 构造伪逆矩阵: $J^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$

其中 ϵ 是数值截断阈值。

5.8.2 数值稳定性

警告 5.1 (数值计算问题). • 接近奇异配置时, 雅可比伪逆的计算可能不稳定

- 需要使用阻尼最小二乘法等鲁棒算法
- 浮点数精度限制可能影响小奇异值的计算

定义 5.11 (阻尼最小二乘伪逆)

为提高数值稳定性, 使用阻尼最小二乘伪逆:

$$J_\lambda^\dagger = J^T(JJ^T + \lambda^2 I)^{-1} \quad (5.74)$$

其中 $\lambda > 0$ 是阻尼系数。



本章详细介绍了速度运动学和静力学的理论基础。雅可比矩阵是连接关节空间和任务空间的桥梁, 其分析对于机器人控制、轨迹规划和性能优化都具有重要意义。

第6章 逆运动学

逆运动学是机器人学中的核心问题，它研究如何根据期望的末端执行器位置和姿态计算相应的关节变量。与正向运动学相比，逆运动学问题通常更加复杂，可能存在多个解、无解或者需要数值迭代求解。

内容提要

- 逆运动学问题的基本特性
- 解析解方法与几何分析
- 数值解法与优化技术
- 逆运动学的唯一性与多解性
- 奇异性对逆运动学的影响
- 工作空间边界处理
- 关节限制的考虑
- 冗余机器人的逆运动学
- 实时逆运动学算法

6.1 逆运动学问题的基本特性

6.1.1 问题陈述

定义 6.1 (逆运动学问题)

给定机器人末端执行器的期望配置 $T_d \in SE(3)$ ，求解关节变量 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$ ，使得：

$$T(\theta) = T_d \quad (6.1)$$

其中 $T(\theta)$ 是正向运动学函数。

6.1.2 解的存在性与唯一性

定理 6.1 (解的基本性质)

逆运动学问题具有以下特性：

- 解的存在性：当且仅当 T_d 在机器人的工作空间内时，逆运动学问题有解
- 解的多样性：一般情况下，逆运动学问题可能有多个解
- 解的不连续性：即使期望配置连续变化，关节角度的解可能不连续

例题 6.1 平面 2R 机械臂的多解性 对于连杆长度为 l_1, l_2 的平面 2R 机械臂，给定末端位置 (x, y) ：

- 当 $|l_1 - l_2| < \sqrt{x^2 + y^2} < l_1 + l_2$ 时，有两个解（肘关节向上和向下）
- 当 $\sqrt{x^2 + y^2} = l_1 + l_2$ 时，有一个解（完全伸展）
- 当 $\sqrt{x^2 + y^2} = |l_1 - l_2|$ 时，有一个解（完全收缩）
- 其他情况无解

6.2 解析解方法

6.2.1 几何分析法

几何分析法通过分析机器人的几何结构来求解逆运动学，适用于具有特殊结构的机器人。

算法 6.1 (几何分析法的一般步骤).

- 分析机器人的几何结构，识别特殊点和平面
- 利用几何关系建立约束方程

3. 逐步求解各关节角度
4. 处理多解情况，选择合适的解

例题 6.2 平面 3R 机械臂的几何解法 对于平面 3R 机械臂，设连杆长度为 l_1, l_2, l_3 ，期望末端位置和姿态为 (x, y, ϕ) ：

步骤 1：计算腕关节位置

$$x_w = x - l_3 \cos \phi \quad (6.2)$$

$$y_w = y - l_3 \sin \phi \quad (6.3)$$

步骤 2：求解前两个关节（2R 子问题）

$$\theta_2 = \pm \cos^{-1} \left(\frac{x_w^2 + y_w^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (6.4)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(y_w, x_w) - \text{atan2}(l_2 \sin \theta_2, l_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (6.5)$$

步骤 3：求解第三个关节

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (6.6)$$

定义 6.2 (瞬时自由度)

在给定制下，机构可以进行的独立微分运动的数目。



定义 6.3 (有限自由度)

机构在整个运动范围内可以进行的独立有限运动的数目。



注 由于特殊配置的存在，瞬时自由度可能与有限自由度不同。

6.3 位置分析

6.3.1 代数方法

算法 6.2 (多项式求解法). 1. 建立闭环约束方程组 $f(q) = 0$

2. 选择独立变量（驱动关节）和从动变量
3. 消元得到关于从动变量的多项式方程
4. 使用代数方法求解多项式
5. 回代求得所有关节变量

例题 6.3 四杆机构位置分析 给定驱动角 θ_1 ，求解从动角 θ_3 ：

从闭环约束方程可以导出：

$$a \cos \theta_3 + b \sin \theta_3 + c = 0 \quad (6.7)$$

其中：

$$a = 2l_2 l_3 \quad (6.8)$$

$$b = 0 \quad (6.9)$$

$$c = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta_1 - 2l_1 l_4 \cos \theta_1 \quad (6.10)$$

求解得：

$$\theta_3 = \pm \cos^{-1} \left(-\frac{c}{a} \right) \quad (6.11)$$

6.3.2 数值方法

当代数方法复杂时，使用数值方法求解约束方程组。

算法 6.3 (牛顿-拉夫逊法求解闭环约束). 给定驱动关节变量 q_d 和初始猜测 $q_p^{(0)}$:

1. 计算约束误差: $f^{(k)} = \phi(q_d, q_p^{(k)})$
2. 计算约束雅可比: $J^{(k)} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \right|_{q_p^{(k)}}$
3. 更新从动变量: $q_p^{(k+1)} = q_p^{(k)} - (J^{(k)})^{-1} f^{(k)}$
4. 检查收敛性: $\|f^{(k)}\| < \epsilon$

6.4 速度和加速度分析

6.4.1 速度分析

对闭环约束方程 $\phi(q) = 0$ 关于时间求导:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (6.12)$$

将关节变量分为驱动关节 q_d 和从动关节 q_p :

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_d} \dot{q}_d + \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \dot{q}_p = 0 \quad (6.13)$$

定理 6.2 (闭链速度关系)

从动关节速度与驱动关节速度的关系为:

$$\dot{q}_p = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_p} \right)^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial q_d} \dot{q}_d \quad (6.14)$$

6.4.2 加速度分析

对速度方程再次求导得到加速度关系:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_d} \ddot{q}_d + \frac{\partial \phi}{\partial q_p} \ddot{q}_p + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \dot{q} = 0 \quad (6.15)$$

定理 6.3 (闭链加速度关系)

从动关节加速度为:

$$\ddot{q}_p = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_p} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial q_d} \ddot{q}_d + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \right) \dot{q} \right] \quad (6.16)$$

6.5 奇异性与可动性分析

6.5.1 奇异配置

定义 6.4 (闭链奇异性)

当约束雅可比矩阵 $\frac{\partial \phi}{\partial q_p}$ 奇异时, 机构处于奇异配置。此时:

1. 从动关节的运动变得不确定
2. 机构可能获得额外的自由度
3. 或者运动完全被约束

6.5.2 分支问题

定义 6.5 (装配模式)

满足相同约束方程的不同机构配置称为不同的装配模式或分支。



算法 6.4 (分支跟踪). 1. 识别所有可能的装配模式

2. 在每个模式内进行连续运动分析
3. 监测奇异点处的分支转换
4. 处理分支间的跳跃问题

6.6 并联机构运动学

6.6.1 并联机构的特点

定义 6.6 (并联机构)

并联机构是指动平台通过多个独立的运动链与固定平台相连的机构。



并联机构的优点:

- 高刚度和承载能力
- 高精度和重复精度
- 动态性能好
- 累积误差小

缺点:

- 工作空间相对较小
- 正向运动学复杂
- 奇异性配置复杂

6.6.2 Stewart 平台

例题 6.46-UPS Stewart 平台 Stewart 平台由 6 条可变长度的腿连接上下两个平台。

逆运动学 (简单): 给定动平台位姿 $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, 第 i 条腿的长度为:

$$l_i = \|p + R \cdot b_i - a_i\| \quad (6.17)$$

其中 p 是动平台位置, R 是旋转矩阵, a_i, b_i 分别是第 i 条腿在基座和动平台上的连接点。

正向运动学 (复杂): 给定 6 条腿的长度 l_1, \dots, l_6 , 要求解动平台位姿。这是一个高度非线性的问题, 一般情况下有多达 40 个解。

6.6.3 平面并联机构

例题 6.53-RRR 平面并联机构 动平台通过 3 条 RRR 链与基座相连, 具有 3 个自由度 (x, y, θ) 。

约束方程: 每条腿的末端必须与动平台上的对应点重合:

$$x + r_p \cos(\theta + \alpha_i) = x_{0i} + l_{i1} \cos \theta_{i1} + l_{i2} \cos(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \quad (6.18)$$

$$y + r_p \sin(\theta + \alpha_i) = y_{0i} + l_{i1} \sin \theta_{i1} + l_{i2} \sin(\theta_{i1} + \theta_{i2}) \quad (6.19)$$

对 $i = 1, 2, 3$ 。

6.7 混合串并联机构

6.7.1 串并联机构的分析方法

混合串并联机构结合了串联和并联机构的特点，分析更加复杂。

算法 6.5 (混合机构分析步骤). 1. 将机构分解为串联和并联子系统

2. 分别分析各子系统的运动学

3. 建立子系统间的耦合关系

4. 求解整体系统的运动学方程

6.8 实际应用案例

6.8.1 工业并联机器人

例题 6.6 Delta 机器人 Delta 机器人是一种典型的高速并联机器人：

- 3 条并联的 RUU 链
- 动平台只有平移自由度
- 广泛应用于高速拾放作业

运动学特点：

- 逆运动学相对简单，可以得到解析解
- 正向运动学需要数值求解
- 奇异性主要出现在工作空间边界

6.8.2 汽车悬架机构

例题 6.7 双叉臂悬架 双叉臂悬架是典型的空间闭链机构：

- 上下两个三角叉臂
- 减震器和弹簧组件
- 转向节和轮毂总成

分析要点：

- 车轮运动轨迹分析
- 悬架几何参数优化
- 运动学特性对操控性能的影响

第7章 闭链运动学

与开链机构相比，闭链机构（当一个平台固定而另一个平台运动时，也称为并联机构）在运动学上带来了独特的挑战。其结构特点是包含一个或多个闭合运动环，这引入了相互关联关节变量的约束。这通常简化了逆运动学，但使正运动学和奇异性分析复杂化。

内容提要

- 闭合运动链的定义与特性。
- 使用 Grübler 公式进行自由度（DOF）分析。
- 闭环约束方程的建立。
- 闭链的逆运动学（IK）。
- 闭链的正运动学（FK）与多解性。
- 微分运动学：约束雅可比矩阵、正运动学雅可比矩阵和逆运动学雅可比矩阵。
- 闭链中的奇异性分析（驱动器奇异性、构型空间奇异性、末端执行器奇异性）。
- 闭链机构的静力学。
- 实例：Stewart-Gough 平台、Delta 机器人、平面机构。

7.1 闭链基本概念

7.1.1 定义与特性

定义 7.1 (闭合运动链)

如果一个运动链包含一个或多个闭合的运动环，则称其为闭合运动链。这意味着从基座连杆到机构中任何其他连杆至少存在两条路径。并联机构是闭链机构中常见的一类，其中运动平台通过多个独立的运动支链连接到固定基座。

主要特性包括：

- **被动关节**：闭链中的并非所有关节通常都是驱动的。一些关节是被动的，意味着它们的运动由驱动关节和闭环约束决定。
- **闭环约束**：关节变量不是独立的，而是通过一组代数方程（称为闭环约束方程）相关联，这些方程确保了环的几何完整性。
- **高刚度与高精度**：由于载荷在多个支链间分布，与相似尺寸的串联机器人相比，通常具有更高的刚度、精度和承载能力。

7.1.2 自由度 (DOF)

闭链机构的自由度可以使用 Grübler 公式确定。

定理 7.1 (闭链 Grübler 公式)

对于一个包含 N 个连杆（包括地面连杆）、 J 个关节（其中关节 i 具有 f_i 个自由度）的机构，以及运动学活动度判据 m （平面机构 $m = 3$ ，空间机构 $m = 6$ ），机构的自由度（DOF）由下式给出：

$$\text{DOF} = m(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^J f_i \quad (7.1)$$

此公式假设所有由关节施加的约束都是独立的。如果约束是相关的（例如，冗余约束），则实际自由度可能会更高。

例题 7.1 Stewart-Gough 平台的自由度 一个常见的 Stewart-Gough 平台（6-SPS）有一个固定基座（连杆 0）、一个运动平台（连杆 7）和 6 条支链。每条支链由两个连杆（如活塞和气缸）和三个关节组成：基座处的一个球铰（S）、

一个移动副 (P) 和平台上另一个球铰 (S)。对于 6-SPS 平台, 通常认为 6 个移动副是驱动的, 它们决定了平台的 6 个自由度姿态。直接应用 Grübler 公式于复杂的多自由度关节可能会比较棘手。我们以平面 3-RPR 机构为例, 这是一个更直接的应用: $N = 1(\text{基座}) + 3 \times 2(\text{支链连杆}) + 1(\text{平台}) = 8$ 。 $J = 3(\text{基座 R}) + 3(\text{支链 P}) + 3(\text{平台 R}) = 9$ 个关节。所有 $f_i = 1$ 。 $\sum f_i = 9$ 。平面机构 $m = 3$ 。 $\text{DOF} = 3(8 - 1 - 9) + 9 = 3(-2) + 9 = -6 + 9 = 3$ 。这是正确的。

7.2 闭环约束方程

7.2.1 公式化

闭环约束方程是由闭环结构产生的对关节变量的代数约束。

定理 7.2 (矢量环闭合)

对于闭链中的每一个独立环, 可以通过对环周围的位置矢量 (或齐次变换矩阵) 求和来写出一个矢量环方程。对于单个环路, 从一个参考点开始, 遍历环路并返回起点, 可得:

$$T_{01}(\theta_1)T_{12}(\theta_2) \cdots T_{(k-1)k}(\theta_k)T_{k0}(\theta_0) = I \quad (7.2)$$

或者对于位置的矢量形式:

$$\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{12} + \cdots + \mathbf{p}_{(k-1)k} + \mathbf{p}_{k0} = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

这些矩阵或矢量方程会产生一组涉及关节变量的标量非线性代数方程。

从一个空间闭环 (使用齐次变换) 导出的独立标量方程的数量是 6 个 (3 个用于位置, 3 个用于姿态)。对于平面环, 则是 3 个 (2 个用于位置, 1 个用于姿态)。

7.2.2 实例: 平面 3-RPR 机构

考虑一个平面 3-RPR 机构。固定基座点为 \mathbf{a}_i , 平台坐标系 $\{b\}$ 中的平台连接点为 \mathbf{b}'_i 。平台在世界坐标系 $\{s\}$ 中的位姿为 (x, y, ϕ) 。设 $R(\phi)$ 是从 $\{b\}$ 到 $\{s\}$ 的旋转矩阵。支链长度为 s_i 。对于每条支链 i :

$$\mathbf{p}_b + R(\phi)\mathbf{b}'_i - \mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i \quad (7.4)$$

其中 \mathbf{d}_i 是沿第 i 条支链的矢量, 且 $\|\mathbf{d}_i\| = s_i$ 。这导致:

$$(x + x'_{bi} \cos \phi - y'_{bi} \sin \phi - x_{ai})^2 + (y + x'_{bi} \sin \phi + y'_{bi} \cos \phi - y_{ai})^2 = s_i^2 \quad (7.5)$$

对于 $i = 1, 2, 3$ 。这是三个关联平台位姿 (x, y, ϕ) 和支链长度 (s_1, s_2, s_3) 的方程。

7.3 逆运动学与正运动学

7.3.1 逆运动学 (IK)

给定运动平台的期望位姿 T_{sb} , 求解驱动关节变量 θ_a 的值。

定理 7.3 (并联机构的 IK)

对于许多并联机构, 特别是那些具有简单支链结构 (如 SPS 或 RPR) 的机构, 逆运动学通常很简单。一旦平台位姿 T_{sb} 已知, 每条支链的构型就可以独立确定, 从而可以直接计算驱动关节变量 (例如 SPS/RPR 的支链长度)。

例题 7.2 Stewart-Gough (6-SPS) 平台的 IK 给定平台位姿 $T_{sb} = (R_{sb}, \mathbf{p}_{sb})$ 。设基座连接点为 \mathbf{a}_i (在 $\{s\}$ 中), 平

台连接点为 \mathbf{b}'_i (在 $\{b\}$ 中)。在坐标系 $\{s\}$ 中, 第 i 条支链的矢量 \mathbf{d}_i 为:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{p}_{sb} + R_{sb}\mathbf{b}'_i - \mathbf{a}_i \quad (7.6)$$

驱动的移动副长度 s_i 就是 \mathbf{d}_i 的模:

$$s_i = \|\mathbf{d}_i\| = \sqrt{\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_i} \quad (7.7)$$

这为每个 s_i 产生一个唯一解 (假设 $s_i \geq 0$)。

7.3.2 正运动学 (FK)

给定驱动关节变量 θ_a 的值, 求解运动平台的位姿 T_{sb} 。

定理 7.4 (并联机构的 FK)

并联机构的正运动学通常很复杂。它涉及求解一组从闭环约束导出的非线性代数方程组。这个系统可能有多个解, 意味着一组驱动关节值可能对应多个平台位姿。解的最大数量取决于机构的几何形状。

例题 7.3 Stewart-Gough (6-SPS) 平台的 FK 给定支链长度 s_i , 我们需要找到满足以下条件的 R_{sb} 和 \mathbf{p}_{sb} :

$$\|\mathbf{p}_{sb} + R_{sb}\mathbf{b}'_i - \mathbf{a}_i\|^2 = s_i^2 \quad \text{对于 } i = 1, \dots, 6 \quad (7.8)$$

并满足 $R_{sb}^T R_{sb} = I, \det(R_{sb}) = 1$ 。这是一个包含 6 个未知数 (3 个用于 \mathbf{p}_{sb} , 3 个用于 R_{sb} 的姿态参数) 的 6 个代数方程组。已经证明, 一般的 6-SPS 平台其正运动学最多可以有 40 个实数解。

7.4 微分运动学 (雅可比矩阵)

微分运动学关联驱动关节的速度与运动平台的螺旋速度。设 $\dot{\theta}$ 为所有关节速度的向量 (驱动关节速度 $\dot{\theta}_a$ 和被动关节速度 $\dot{\theta}_p$)。设 \mathcal{V}_p 为运动平台的螺旋速度。

7.4.1 约束雅可比矩阵 J_c

对闭环约束方程关于时间求导, 得到速度级的约束方程。

定义 7.2 (约束雅可比矩阵)

约束雅可比矩阵 J_c 通过闭环约束关联机构中的所有关节速度:

$$J_c(\theta)\dot{\theta} = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

如果我们将 $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_a^T, \dot{\theta}_p^T]^T$ 分解为驱动和被动关节速度, 并相应地分解 $J_c = [J_{ca}(\theta), J_{cp}(\theta)]$, 则:

$$J_{ca}(\theta)\dot{\theta}_a + J_{cp}(\theta)\dot{\theta}_p = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

如果 J_{cp} 是方阵且可逆, 则被动关节速度可以表示为:

$$\dot{\theta}_p = -J_{cp}^{-1}(\theta)J_{ca}(\theta)\dot{\theta}_a \quad (7.11)$$

7.4.2 正运动学雅可比矩阵 J_{fk}

定义 7.3 (正运动学雅可比矩阵)

正运动学雅可比矩阵 J_{fk} (通常简写为 J 或 J_p 代表平台) 关联驱动关节速度 $\dot{\theta}_a$ 与运动平台的螺旋速度 \mathcal{V}_p :

$$\mathcal{V}_p = J_{fk}(\theta)\dot{\theta}_a \quad (7.12)$$

此雅可比矩阵对于速度控制和分解速率控制至关重要。它可以通过考虑每条支链对平台运动的贡献来推导，同时考虑到由约束雅可比矩阵确定的被动关节速度。设 $J_{leg,i}$ 为第 i 条支链的雅可比矩阵（将其视为从基座到平台的开链）。则 $\mathcal{V}_p = J_{leg,i} \dot{\theta}_{leg,i}$ 。使用约束方程将所有 $\dot{\theta}_{leg,i}$ 与 $\dot{\theta}_a$ 联系起来，便可推导出 J_{fk} 。

7.4.3 逆运动学雅可比矩阵 J_{ik}

定义 7.4 (逆运动学雅可比矩阵)

逆运动学雅可比矩阵 J_{ik} 关联运动平台的螺旋速度 \mathcal{V}_p 与驱动关节速度 $\dot{\theta}_a$ ：

$$\dot{\theta}_a = J_{ik}(\theta) \mathcal{V}_p \quad (7.13)$$

定理 7.5 (J_{fk} 与 J_{ik} 的关系)

如果驱动关节的数量等于平台的自由度数量，并且 J_{fk} 是方阵且非奇异：

$$J_{ik}(\theta) = J_{fk}^{-1}(\theta) \quad (7.14)$$

对于像 Stewart-Gough 这样的 6 自由度平台， J_{fk} 和 J_{ik} 都是 6×6 矩阵。

一个常用的寻找 J_{ik} 的方法是对逆运动学映射 $s_i = f_i(T_{sb})$ 求导，例如 $\dot{s}_i = \frac{\partial f_i}{\partial T_{sb}} \dot{T}_{sb}$ 。关联 \dot{s} 与 \mathcal{V}_p 的矩阵就是 J_{ik} 。对于 Stewart-Gough 平台，可以证明 $(J_{ik})^T$ 关联了平台力螺旋与支链力。

7.5 闭链奇异性分析

闭链中的奇异性是指机构行为出现问题的构型，例如失去或获得自由度。

7.5.1 奇异性类型

定义 7.5 (驱动器奇异性)

当矩阵 $J_{cp}(\theta)$ （通过约束雅可比矩阵将被动关节速度映射到驱动关节速度）变为奇异时，发生驱动器奇异性。

- 在这种构型下，驱动关节不再能唯一确定被动关节的速度。
- 机构可能会获得不希望的自由度，或者某个被动关节可能会锁死。
- 即使 J_{fk} 非奇异，平台也可能无法抵抗任意的外部力螺旋。

定义 7.6 (构型空间奇异性)

当整体约束雅可比矩阵 $J_c(\theta)$ 失去满秩时，发生构型空间奇异性（或结构奇异性）。

- 机构获得了其设计之外的一个或多个自由度（Grübler 公式失效）。
- 这些奇异性仅取决于机构的几何形状，与驱动关节的选择无关。
- 例子：平面四杆机构达到死点位置。

定义 7.7 (末端执行器奇异性 (正运动学奇异性))

当正运动学雅可比矩阵 $J_{fk}(\theta)$ 变为奇异（失去满秩）时，发生末端执行器奇异性（或平台奇异性）。

- 平台在其任务空间中失去一个或多个自由度，即使驱动关节可以运动，它也无法以任意的螺旋速度 \mathcal{V}_p 运动。
- 类似于串联机械臂的奇异性。

• 在这种构型下，存在某些平台螺旋速度无法实现，并且存在某些外部力螺旋无法由驱动关节抵抗。这也是 $J_{ik}(\theta)$ 变为奇异或不存在的时候。



7.6 闭链静力学

静力学处理施加在驱动关节上的力/力矩与运动平台所施加/承受的力螺旋之间的关系。

7.6.1 闭链虚功原理

虚功原理指出，对于处于静态平衡的系统，所有外力和驱动关节力矩所做的总虚功为零。

$$\tau_a^T \delta \theta_a - \mathcal{F}_p^T \delta \mathcal{X}_p = 0 \quad (7.15)$$

其中 τ_a 是驱动关节力矩/力， \mathcal{F}_p 是作用在平台上的外部力螺旋， $\delta \theta_a$ 是驱动关节的虚位移， $\delta \mathcal{X}_p$ 是平台的虚位移（虚时间内的螺旋速度积分）。

7.6.2 力传递

定理 7.6 (平台力螺旋到驱动关节力/力矩)

维持平台上的外部力螺旋 \mathcal{F}_p (或由平台施加) 所需的驱动关节力/力矩 τ_a 由下式给出：

$$\tau_a = J_{fk}^T(\theta) \mathcal{F}_p \quad (7.16)$$

这与开链情况类似。



定理 7.7 (驱动关节力/力矩到平台力螺旋)

由驱动关节力/力矩 τ_a 产生的平台力螺旋 \mathcal{F}_p 由下式给出（假设 J_{fk} 可逆）：

$$\mathcal{F}_p = (J_{fk}^T(\theta))^{-1} \tau_a = J_{fk}^{-T}(\theta) \tau_a \quad (7.17)$$



7.7 闭链机构实例

7.7.1 Stewart-Gough 平台再探

Stewart-Gough 平台是一个 6 自由度的并联机构。

- **IK**：可解析求解（从平台位姿得到 6 个支链长度）。
- **FK**：最多有 40 个解。需要数值方法或复杂的代数解法。
- **雅可比矩阵**： J_{ik} （关联平台螺旋速度与支链伸缩速率）可以通过对 **IK** 求导或使用静力学得到。 $J_{fk} = J_{ik}^{-1}$ 。
- **奇异性**：
 - **驱动器**：当支链共面或以特定方式相交时可能发生。
 - **末端执行器**：当平台在支链长度固定的情况下仍能运动时发生（例如，基座和平台上的连接点均呈平面排列）。此时 J_{ik} 奇异。
 - **构型空间**：如果设计避免了支链干涉，则较少见。

7.7.2 Delta 机器人

一种 3 自由度的并联机器人，常用于高速拾取和放置，提供平移运动 (x, y, z) ，同时保持平台姿态固定。其三个支链均为由基座旋转电机驱动平行四边形闭环连杆机构。

- **IK:** 给定平台位置 (x, y, z) , 三个驱动基座旋转关节的角度可以解析求解。
- **FK:** 存在多个解; 通常通过数值或特定的代数方法求解。
- **雅可比矩阵:** 关联驱动基座电机速度与平台线速度。
- **奇异性:** 发生在工作空间边界, 并可能根据设计参数出现在工作空间内部。

闭链运动学是一个内容丰富且复杂的领域。闭环约束的存在从根本上改变了与开链相比的分析方法, 通常使得正运动学比逆运动学更具挑战性, 并引入了新型的奇异性。理解这些方面对于并联机器人的设计、控制和应用至关重要。

第8章 开链动力学

动力学研究力和运动之间的关系，是机器人控制和仿真的基础。机器人动力学分析对于高性能控制、轨迹优化和系统设计都至关重要。

内容提要

- 拉格朗日动力学建模
- 牛顿-欧拉递推算法
- 动力学方程的性质与结构
- 能量方法与哈密顿力学
- 动力学参数辨识
- 计算动力学与数值方法
- 柔性连杆动力学
- 动力学仿真技术

8.1 拉格朗日动力学

8.1.1 拉格朗日方程的推导

定义 8.1 (拉格朗日函数)

系统的拉格朗日函数定义为动能与势能之差：

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (8.1)$$

其中 T 是动能， V 是势能。

定理 8.1 (拉格朗日方程)

对于具有 n 个广义坐标的保守系统，拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.2)$$

其中 Q_i 是第 i 个广义坐标对应的广义力。

8.1.2 机器人系统的动能

对于串联机器人，系统的总动能为各连杆动能之和：

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \right) \quad (8.3)$$

其中：

- m_i 是第 i 个连杆的质量
- v_{ci} 是第 i 个连杆质心的线速度
- ω_i 是第 i 个连杆的角速度
- I_i 是第 i 个连杆关于质心的转动惯量矩阵

定理 8.2 (动能的二次型表示)

机器人系统的动能可以表示为关节速度的二次型：

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (8.4)$$

其中 $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是质量矩阵（惯性矩阵）。

8.1.3 动力学方程的标准形式

将拉格朗日方程展开，得到机器人动力学方程的标准形式：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (8.5)$$

其中：

- $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是质量矩阵
- $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是科里奥利和离心力矩阵
- $g(q) \in \mathbb{R}^n$ 是重力项
- $\tau \in \mathbb{R}^n$ 是关节力矩向量

定理 8.3 (科里奥利力矩阵元素)

科里奥利力矩阵的元素为：

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{q}_k \quad (8.6)$$

其中 Christoffel 符号为：

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (8.7)$$



8.2 牛顿-欧拉递推算法

牛顿-欧拉算法是计算机器人动力学的高效数值方法，时间复杂度为 $O(n)$ 。

定理 8.4 (牛顿-欧拉递推算法原理)

牛顿-欧拉算法基于牛顿第二定律和欧拉方程，分为两个阶段：

1. 前向递推：从基座到末端，计算各连杆的速度、加速度
2. 后向递推：从末端到基座，计算各连杆受到的力和力矩

算法的核心思想是利用相邻连杆间的运动学和动力学关系进行递推计算。



8.2.1 前向递推（运动学部分）

前向递推阶段从基座开始，逐个计算各连杆的运动学量。

初始条件：

$${}^0\omega_0 = 0 \quad (\text{基座角速度}) \quad (8.8)$$

$${}^0\dot{\omega}_0 = 0 \quad (\text{基座角加速度}) \quad (8.9)$$

$${}^0\dot{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (\text{重力加速度}) \quad (8.10)$$

从基座开始，逐个计算各连杆的运动学量：

算法 8.1 (前向递推步骤). 对于 $i = 1, 2, \dots, n$:

步骤 1: 角速度递推

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R_i^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \quad (8.11)$$

物理意义：第 $i+1$ 个连杆的角速度等于前一个连杆角速度的坐标变换，加上第 $i+1$ 个关节的角速度贡献。

步骤 2: 角加速度递推

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}R_i^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}R_i^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \quad (8.12)$$

详细推导：

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = \frac{d}{dt}({}^{i+1}R_i {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0) \quad (8.13)$$

$$= {}^{i+1}\dot{R}_i {}^i\omega_i + {}^{i+1}R_i \dot{{}^i\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \quad (8.14)$$

$$= {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}R_i {}^i\omega_i + {}^{i+1}R_i \dot{{}^i\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \quad (8.15)$$

$$= {}^{i+1}R_i \dot{{}^i\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \times {}^{i+1}R_i {}^i\omega_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}z_0 \quad (8.16)$$

步骤 3：线加速度递推

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}R_i (\dot{{}^i\omega}_i \times {}^ip_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i) \quad (8.17)$$

物理意义解释：

- $\dot{{}^i\omega}_i \times {}^ip_{i+1}$ ：由角加速度产生的切向加速度
- ${}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^ip_{i+1})$ ：向心加速度
- ${}^i\dot{v}_i$ ：传递的线加速度

步骤 4：质心加速度

$${}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}p_{c_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}p_{c_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \quad (8.18)$$

其中 ${}^{i+1}p_{c_{i+1}}$ 是从关节 $i+1$ 到连杆 $i+1$ 质心的位置向量。

8.2.2 后向递推（动力学部分）

后向递推阶段从末端开始，逆向计算各连杆的力和力矩。

算法 8.2 (后向递推步骤). 对于 $i = n, n-1, \dots, 1$:

1. 惯性力：

$${}^iF_i = m_i {}^i\dot{v}_{c_i} \quad (8.19)$$

2. 惯性力矩：

$${}^iN_i = {}^iI_i \dot{{}^i\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^iI_i {}^i\omega_i \quad (8.20)$$

3. 作用力递推：

$${}^if_i = {}^iR_{i+1} {}^{i+1}f_{i+1} + {}^iF_i \quad (8.21)$$

4. 作用力矩递推：

$${}^in_i = {}^iN_i + {}^iR_{i+1} {}^{i+1}n_{i+1} + {}^ip_{c_i} \times {}^iF_i + {}^ip_{i+1} \times {}^iR_{i+1} {}^{i+1}f_{i+1} \quad (8.22)$$

5. 关节力矩：

$$\tau_i = {}^in_i^T z_i \quad (8.23)$$

8.3 动力学方程的重要性质

8.3.1 质量矩阵的性质

定理 8.5 (质量矩阵性质)

质量矩阵 $M(q)$ 具有以下重要性质：

1. 对称性： $M(q) = M^T(q)$
2. 正定性： $M(q) > 0$ 对所有 q
3. 有界性： 存在常数 $m_1, m_2 > 0$ 使得 $m_1 I \leq M(q) \leq m_2 I$
4. 可逆性： $M(q)$ 始终可逆



8.3.2 反对称性质

定理 8.6 (反对称性质)

矩阵 $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ 是反对称的, 即:

$$\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) = -(\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}))^T \quad (8.24)$$

证明. 这个性质可以通过 Christoffel 符号的对称性证明:

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \quad (8.25)$$

从而:

$$\dot{M}_{ij} - C_{ij} - C_{ji} = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik}) \dot{q}_k = 0 \quad (8.26)$$

□

8.3.3 能量守恒性质

定理 8.7 (能量守恒)

对于保守系统 (无外力作用), 总能量保持不变:

$$E = T + V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + V(q) = \text{常数} \quad (8.27)$$

8.4 动力学建模实例

8.4.1 单摆动力学

对于长度为 l 、质量为 m 的单摆:

动能:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (8.28)$$

势能:

$$V = -mgl \cos \theta \quad (8.29)$$

动力学方程:

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau \quad (8.30)$$

8.4.2 二连杆机械臂详细推导

考虑平面二连杆机械臂, 连杆长度为 l_1, l_2 , 质量为 m_1, m_2 , 质心位于连杆中点。

位置分析:

$$x_{c1} = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \quad (8.31)$$

$$y_{c1} = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \quad (8.32)$$

$$x_{c2} = l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (8.33)$$

$$y_{c2} = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (8.34)$$

速度分析:

$$\dot{x}_{c1} = -\frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (8.35)$$

$$\dot{y}_{c1} = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (8.36)$$

$$\dot{x}_{c2} = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (8.37)$$

$$\dot{y}_{c2} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (8.38)$$

动能:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (8.39)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (8.40)$$

其中 $I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2$, $I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$ 。

质量矩阵:

$$M_{11} = (m_1 + m_2) \frac{l_1^2}{4} + m_2 l_1^2 + m_2 \frac{l_2^2}{4} + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 + I_1 + I_2 \quad (8.41)$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 \frac{l_2^2}{4} + \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \cos \theta_2 + I_2 \quad (8.42)$$

$$M_{22} = m_2 \frac{l_2^2}{4} + I_2 \quad (8.43)$$

科里奥利项:

$$C_1 = -\frac{m_2 l_1 l_2}{2} \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (8.44)$$

$$C_2 = \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (8.45)$$

重力项:

$$g_1 = (m_1 + m_2) g \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (8.46)$$

$$g_2 = m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (8.47)$$

8.5 计算动力学方法

8.5.1 复合刚体算法

算法 8.3 (复合刚体算法 (CRB)). 计算质量矩阵的高效算法:

1. 计算复合刚体惯性:

$$I_i^c = I_i + \sum_{j=i+1}^n I_j \quad (8.48)$$

2. 计算质量矩阵元素:

$$M_{ij} = \text{tr}(Ad_{T_{ij}}^T I_i^c Ad_{T_{ij}} S_j) \quad (8.49)$$

时间复杂度: $O(n^2)$

8.5.2 关节空间惯性算法

算法 8.4 (关节空间惯性算法 (JSIM)). 同时计算 $M(q)$ 、 $C(q, \dot{q})$ 和 $g(q)$:

1. 前向递推计算运动学
2. 后向递推计算复合刚体惯性
3. 计算雅可比矩阵

4. 组装质量矩阵和偏置项

时间复杂度: $O(n^2)$

8.6 动力学参数辨识

8.6.1 线性化参数模型

动力学方程可以线性化为参数的形式:

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (8.50)$$

其中:

- $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 是回归矩阵
- $\theta \in \mathbb{R}^p$ 是动力学参数向量

8.6.2 最小参数集

定义 8.2 (基本参数)

不能通过线性组合其他参数得到的独立参数称为基本参数。基本参数的数量小于等于所有物理参数的数量。

算法 8.5 (参数辨识步骤). 1. 设计激励轨迹, 确保参数可辨识性

2. 收集输入输出数据: $\{q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, \tau_k\}$
3. 构造回归矩阵: $Y_k = Y(q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k)$
4. 最小二乘求解: $\hat{\theta} = (Y^T Y)^{-1} Y^T \tau$
5. 验证辨识结果

8.7 柔性连杆动力学

对于具有柔性连杆的机器人, 需要考虑弹性变形:

8.7.1 有限元建模

$$M_r \ddot{q}_r + M_{rf} \ddot{q}_f + C_r \dot{q}_r + C_{rf} \dot{q}_f + K_f q_f = \tau_r \quad (8.51)$$

其中:

- q_r 是刚体运动坐标
- q_f 是柔性变形坐标
- K_f 是刚度矩阵

8.7.2 模态降阶

使用模态坐标减少自由度:

$$q_f = \Phi \eta \quad (8.52)$$

其中 Φ 是模态矩阵, η 是模态坐标。

本章详细介绍了机器人动力学的理论基础和计算方法。动力学建模是实现高性能机器人控制的前提, 对于轨迹优化、振动抑制和精密操作都具有重要意义。

第9章 轨迹生成

轨迹生成是机器人系统中的核心技术，负责在约束条件下规划从起点到终点的运动路径。优秀的轨迹生成能够提高运动效率、减少振动并保证系统安全。

内容提要

- 轨迹生成基本概念与分类
- 多项式轨迹插值方法
- 样条轨迹生成技术
- 时间最优轨迹规划
- 基于动力学的轨迹优化
- B样条与NURBS轨迹
- 实时轨迹生成算法
- 多机器人协调轨迹规划

9.1 轨迹生成基础理论

9.1.1 基本概念

定义 9.1 (路径与轨迹)

- 路径 (Path): 空间中的几何曲线，不考虑时间因素
- 轨迹 (Trajectory): 时间参数化的路径，描述运动的时间历程

定义 9.2 (轨迹生成问题)

给定起始位姿 q_0 和目标位姿 q_f ，以及边界条件（速度、加速度），在约束条件下生成满足要求的轨迹 $q(t)$ ， $t \in [0, T]$ 。

9.1.2 轨迹质量评价指标

- 时间最优性：最小化运动时间 T
- 能量最优性：最小化能量消耗 $\int_0^T \tau^T(t) \dot{q}(t) dt$
- 平滑性：最小化加加速度 $\int_0^T \ddot{q}^T(t) \ddot{q}(t) dt$
- 路径精度：最小化路径误差

9.2 多项式轨迹插值

9.2.1 三次多项式轨迹

对于标量函数，三次多项式轨迹为：

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (9.1)$$

速度和加速度：

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (9.2)$$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \quad (9.3)$$

算法 9.1 (三次多项式轨迹设计). 给定边界条件：

- $q(0) = q_0$, $q(T) = q_f$
- $\dot{q}(0) = v_0$, $\dot{q}(T) = v_f$

求解线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ q_f \\ v_f \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

解得：

$$a_0 = q_0 \quad (9.5)$$

$$a_1 = v_0 \quad (9.6)$$

$$a_2 = \frac{3(q_f - q_0) - (2v_0 + v_f)T}{T^2} \quad (9.7)$$

$$a_3 = \frac{2(q_0 - q_f) + (v_0 + v_f)T}{T^3} \quad (9.8)$$

9.2.2 五次多项式轨迹

五次多项式提供更多自由度，可以控制加速度边界条件：

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (9.9)$$

算法 9.2 (五次多项式系数计算). 边界条件: $q(0), \dot{q}(0), \ddot{q}(0), q(T), \dot{q}(T), \ddot{q}(T)$

系数矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (9.10)$$

9.2.3 分段多项式轨迹

对于多个中间点的轨迹，使用分段多项式：

定理 9.1 (分段三次多项式连续性)

要保证 C^2 连续性，相邻段在连接点必须满足：

$$q_i(T_i) = q_{i+1}(0) \quad (9.11)$$

$$\dot{q}_i(T_i) = \dot{q}_{i+1}(0) \quad (9.12)$$

$$\ddot{q}_i(T_i) = \ddot{q}_{i+1}(0) \quad (9.13)$$

9.3 样条轨迹生成

9.3.1 三次样条插值

定义 9.3 (三次样条函数)

在区间 $[a, b]$ 上的三次样条函数 $S(x)$ 满足：

1. 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是三次多项式
2. 在节点处具有 C^2 连续性
3. 满足边界条件

算法 9.3 (自然样条计算). 设节点为 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, 函数值为 $y_i = f(x_i)$ 。

三对角线性方程组:

$$\lambda_i S''_{i-1} + 2S''_i + \mu_i S''_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (9.14)$$

其中:

$$\lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \quad (9.15)$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \quad (9.16)$$

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \quad (9.17)$$

边界条件: $S''_0 = S''_n = 0$ (自然样条)

9.3.2 B 样条轨迹

定义 9.4 (B 样条基函数)

k 次 B 样条基函数递推定义为:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.18)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (9.19)$$

B 样条曲线表示为:

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \mathbf{P}_i \quad (9.20)$$

其中 \mathbf{P}_i 是控制点。

定理 9.2 (B 样条性质)

B 样条具有以下重要性质:

1. 局部支撑性: 修改控制点只影响局部曲线
2. 凸包性: 曲线位于控制点的凸包内
3. 仿射不变性: 几何变换可直接作用于控制点
4. 变分递减性: 曲线与直线的交点数不超过控制多边形

9.4 时间最优轨迹规划

9.4.1 问题表述

时间最优轨迹规划的目标是在满足约束的前提下最小化运动时间:

$$\min_{q(t), T} T \quad (9.21)$$

约束条件:

$$|\dot{q}_i(t)| \leq v_{i,\max} \quad (9.22)$$

$$|\ddot{q}_i(t)| \leq a_{i,\max} \quad (9.23)$$

$$|\tau_i(t)| \leq \tau_{i,\max} \quad (9.24)$$

9.4.2 路径速度规划

定义 9.5 (路径参数化)

将路径参数化为 $\mathbf{r}(s)$ ，其中 $s \in [0, S]$ 是路径参数。轨迹为：

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(s(t)) \quad (9.25)$$

速度和加速度约束转化为：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}'(s)\dot{s} \quad (9.26)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}''(s)\dot{s}^2 + \mathbf{r}'(s)\ddot{s} \quad (9.27)$$

算法 9.4 (速度剖面优化). 1. 前向扫描：计算最大可达速度

$$v_{\max}(s) = \min \left\{ \sqrt{\frac{a_{\max}}{|\mathbf{r}''(s)|}} \right\} \quad (9.28)$$

2. 后向扫描：考虑减速约束

$$v(s) = \min \{ v_{\max}(s), \sqrt{v_f^2 + 2a_{\max}(S - s)} \} \quad (9.29)$$

3. 时间积分：计算总时间

$$T = \int_0^S \frac{ds}{v(s)} \quad (9.30)$$

9.4.3 动态规划方法

对于具有复杂约束的时间最优问题，使用动态规划：

算法 9.5 (动态规划轨迹优化). 1. 路径离散化： s_0, s_1, \dots, s_N

2. 速度离散化： $v_{\min}, \dots, v_{\max}$

3. 状态转移方程：

$$J(s_k, v_k) = \min_{v_{k-1}} \{ J(s_{k-1}, v_{k-1}) + \Delta t(s_{k-1}, v_{k-1}, v_k) \} \quad (9.31)$$

4. 约束检查：验证动力学可行性

5. 回溯最优路径

9.5 基于动力学的轨迹优化

9.5.1 变分法轨迹优化

考虑动力学约束的轨迹优化问题：

$$\min \int_0^T L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) dt \quad (9.32)$$

约束条件：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (9.33)$$

使用拉格朗日乘数法，哈密顿函数为：

$$H = L + \lambda^T [M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) - \tau] \quad (9.34)$$

定理 9.3 (欧拉-拉格朗日方程)

最优轨迹满足：

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \frac{\partial}{\partial q} [\lambda^T f(q, \dot{q}, \ddot{q})] \quad (9.35)$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (9.36)$$

**9.5.2 直接配点法**

将连续问题离散化为非线性规划问题：

算法 9.6 (直接配点法). 1. 时间离散化： t_0, t_1, \dots, t_N

2. 状态离散化： $q_k = q(t_k)$, $\dot{q}_k = \dot{q}(t_k)$

3. 约束离散化：

$$q_{k+1} = q_k + h_k \dot{q}_k + \frac{h_k^2}{2} \ddot{q}_k \quad (9.37)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + h_k \ddot{q}_k \quad (9.38)$$

4. 目标函数： $\sum_{k=0}^{N-1} L_k h_k$

5. 求解 *NLP* 问题

9.6 样条优化轨迹**9.6.1 样条轨迹优化模型**

使用 B 样条表示轨迹：

$$q(t) = \sum_{i=0}^n N_i(t) P_i \quad (9.39)$$

优化问题：

$$\min_{\mathbf{P}, T} \alpha J_{\text{time}} + \beta J_{\text{smooth}} + \gamma J_{\text{collision}} \quad (9.40)$$

其中：

$$J_{\text{time}} = T \quad (9.41)$$

$$J_{\text{smooth}} = \int_0^T \|\ddot{q}(t)\|^2 dt \quad (9.42)$$

$$J_{\text{collision}} = \sum_k w_k d_{\text{obs}}(q(t_k)) \quad (9.43)$$

9.6.2 梯度计算

对于 B 样条轨迹，梯度计算为：

$$\frac{\partial J_{\text{smooth}}}{\partial P_i} = \sum_j \int_0^T N_i^{(3)}(t) N_j^{(3)}(t) dt \cdot P_j \quad (9.44)$$

$$\frac{\partial J_{\text{collision}}}{\partial P_i} = \sum_k w_k \frac{\partial d_{\text{obs}}}{\partial q} N_i(t_k) \quad (9.45)$$

9.7 实时轨迹生成

9.7.1 模型预测控制轨迹生成

算法 9.7 (MPC 轨迹生成). 在每个控制周期:

1. 测量当前状态 $q(t_k), \dot{q}(t_k)$
2. 在预测视界 $[t_k, t_k + T_p]$ 内优化:

$$\min \int_{t_k}^{t_k + T_p} [Q(q - q_{ref})^2 + R\tau^2] dt \quad (9.46)$$

3. 应用第一步控制输入
4. 滑动视界, 重复优化

9.7.2 在线轨迹修正

对于动态环境, 需要实时修正轨迹:

算法 9.8 (弹性带方法). 1. 初始化离散路径点

2. 计算内力 (平滑性):

$$F_{int,i} = k_{spring}(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) \quad (9.47)$$

3. 计算外力 (避障):

$$F_{ext,i} = k_{rep} \nabla U_{rep}(q_i) \quad (9.48)$$

4. 更新路径点:

$$q_i^{new} = q_i + \alpha(F_{int,i} + F_{ext,i}) \quad (9.49)$$

5. 时间重参数化

9.8 多机器人协调轨迹规划

9.8.1 优先级规划

算法 9.9 (优先级轨迹规划). 1. 根据任务重要性排序机器人

2. 按优先级依次规划轨迹
3. 高优先级机器人的轨迹作为低优先级的动态障碍
4. 时间窗口冲突检测与避免

9.8.2 分布式优化方法

使用交替方向乘子法 (ADMM):

$$\min \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \quad (9.50)$$

$$\text{s.t. } A_i x_i = z, \quad \forall i \quad (9.51)$$

ADMM 迭代:

$$x_i^{k+1} = \arg \min_{x_i} \left(f_i(x_i) + \frac{\rho}{2} \|A_i x_i - z^k + u_i^k\|^2 \right) \quad (9.52)$$

$$z^{k+1} = \arg \min_z \left(\frac{\rho N}{2} \|z - \bar{v}^{k+1}\|^2 \right) \quad (9.53)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k + A_i x_i^{k+1} - z^{k+1} \quad (9.54)$$

9.9 轨迹生成实例分析

9.9.1 装配任务轨迹规划

考虑精密装配任务：

1. 接近阶段：使用五次多项式，确保平滑接近
2. 搜索阶段：螺旋轨迹或力导向轨迹
3. 插入阶段：阻抗控制与轨迹跟踪结合

9.9.2 移动机器人路径跟踪

对于非完整约束的移动机器人：

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (9.55)$$

使用多项式螺旋线：

$$\kappa(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 \quad (9.56)$$

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma \quad (9.57)$$

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(\sigma) d\sigma \quad (9.58)$$

$$y(s) = \int_0^s \sin \theta(\sigma) d\sigma \quad (9.59)$$

本章全面介绍了轨迹生成的理论和方法。从基本的多项式插值到复杂的样条优化，从离线规划到实时生成，轨迹生成技术为机器人实现复杂任务提供了重要支撑。

第 10 章 运动规划

运动规划是机器人技术中的基础问题，目标是在有障碍物的环境中找到从起始配置到目标配置的无碰撞路径。运动规划算法是自主机器人系统的核心组件。

内容提要

- 运动规划基本概念与复杂性
- 位形空间与障碍物建模
- 基于采样的路径规划
- 基于搜索的路径规划
- 势场方法与导航函数
- 路径平滑与优化
- 动态环境下的运动规划
- 多机器人运动规划

10.1 运动规划基础理论

10.1.1 问题形式化

定义 10.1 (运动规划问题)

给定：

- 机器人位形空间 \mathcal{C}
- 障碍物区域 $\mathcal{C}_{\text{obs}} \subset \mathcal{C}$
- 自由空间 $\mathcal{C}_{\text{free}} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\text{obs}}$
- 起始配置 $q_{\text{start}} \in \mathcal{C}_{\text{free}}$
- 目标配置 $q_{\text{goal}} \in \mathcal{C}_{\text{free}}$

求解：从 q_{start} 到 q_{goal} 的连续路径 $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{\text{free}}$ ，满足 $\pi(0) = q_{\text{start}}$ ， $\pi(1) = q_{\text{goal}}$ 。



10.1.2 计算复杂性

定理 10.1 (运动规划复杂性)

对于多自由度机器人的运动规划问题：

- 钢琴搬运问题：在二维环境中移动矩形物体，具有 PSPACE 完备性
- 高维位形空间：随着自由度增加，复杂性指数增长
- 近似算法：概率完备算法提供实用解决方案



10.2 位形空间建模

10.2.1 障碍物扩展

定义 10.2 (Minkowski 和)

对于机器人 \mathcal{R} 和障碍物 \mathcal{O} ，Minkowski 和定义为：

$$\mathcal{R} \oplus \mathcal{O} = \{r + o : r \in \mathcal{R}, o \in \mathcal{O}\} \quad (10.1)$$



对于平移机器人，位形空间障碍物为：

$$\mathcal{C}_{\text{obs}} = \mathcal{O} \oplus (-\mathcal{R}) \quad (10.2)$$

10.2.2 碰撞检测

算法 10.1 (层次包围盒碰撞检测). 1. 构建机器人和环境的层次包围盒树

2. 从根节点开始递归检测：
 - 如果包围盒不相交，返回无碰撞
 - 如果是叶节点且相交，返回碰撞
 - 否则递归检测子节点
3. 使用分离轴定理 (SAT) 进行精确检测

10.3 基于采样的运动规划

10.3.1 概率路图法 (PRM)

算法 10.2 (PRM 算法详述). 学习阶段：

1. 在 C_{free} 中随机采样 n 个配置
2. 对每个配置 q ，找到距离阈值 r 内的邻居
3. 使用局部规划器连接邻居，构建路图 $G = (V, E)$
4. 移除无效边 (碰撞路径)

查询阶段：

1. 将 q_{start} 和 q_{goal} 连接到路图
2. 在路图中搜索最短路径
3. 如果找到路径，返回结果；否则增加采样点

定理 10.2 (PRM 概率完备性)

如果问题有解，PRM 算法随着采样点数量增加，找到解的概率趋近于 1。



10.3.2 快速随机树 (RRT)

算法 10.3 (RRT 算法详述). 1. 初始化: $T \leftarrow \{q_{start}\}$

2. 重复直到找到解或达到最大迭代次数：
 - (a). 随机采样: $q_{rand} \sim \text{Uniform}(\mathcal{C})$
 - (b). 找最近节点: $q_{near} = \arg \min_{q \in T} d(q, q_{rand})$
 - (c). 扩展: $q_{new} = \text{Extend}(q_{near}, q_{rand}, \Delta q)$
 - (d). 碰撞检测: 如果路径 (q_{near}, q_{new}) 无碰撞
 - (e). 添加到树: $T \leftarrow T \cup \{q_{new}\}$
 - (f). 目标检查: 如果 $d(q_{new}, q_{goal}) < \epsilon$ ，返回路径

10.3.3 RRT* 算法

RRT* 通过重新连接操作实现渐近最优性：

算法 10.4 (RRT* 关键步骤). 在添加 q_{new} 后：

1. 选择最优父节点：

$$q_{parent} = \arg \min_{q \in N_r} \{Cost(q) + c(q, q_{new})\} \quad (10.3)$$

2. 重新连接邻居: 对所有 $q \in N_r$ ，如果通过 q_{new} 的路径成本更低：

$$Cost(q_{new}) + c(q_{new}, q) < Cost(q) \quad (10.4)$$

则重新连接 q 的父节点为 q_{new}

定理 10.3 (RRT* 渐近最优性)

随着采样点数量趋于无穷，RRT* 找到的路径成本收敛到最优解。

**10.3.4 Informed RRT***

使用启发式信息加速搜索：

算法 10.5 (Informed RRT*). 1. 运行标准 RRT* 直到找到第一个解，成本为 c_{best}
2. 定义椭圆采样区域：

$$\mathcal{X}_{informed} = \{x \in \mathcal{C} : \|x - f_1\| + \|x - f_2\| \leq c_{best}\} \quad (10.5)$$

其中 $f_1 = q_{start}$, $f_2 = q_{goal}$ 是椭圆焦点

3. 仅在椭圆内采样，逐步缩小搜索区域

10.4 基于搜索的运动规划**10.4.1 A* 算法**

算法 10.6 (A* 路径搜索). 1. 初始化：开放列表 $OPEN = \{q_{start}\}$ ，关闭列表 $CLOSED = \emptyset$

2. 重复直到 $OPEN$ 为空：

- (a). 选择最小 f 值节点： $q = \arg \min_{n \in OPEN} f(n)$
- (b). 如果 $q = q_{goal}$ ，返回路径
- (c). 将 q 移到 $CLOSED$
- (d). 对每个邻居 q' ：
 - 如果 $q' \in CLOSED$ ，跳过
 - 计算 $g(q') = g(q) + c(q, q')$
 - 如果 $q' \notin OPEN$ 或新 g 值更小，更新父节点
 - $f(q') = g(q') + h(q')$ ，添加到 $OPEN$

10.4.2 启发式函数设计**定义 10.3 (可接受启发式)**

启发式函数 $h(q)$ 是可接受的，当且仅当：

$$h(q) \leq h^*(q), \quad \forall q \in \mathcal{C} \quad (10.6)$$

其中 $h^*(q)$ 是从 q 到目标的真实最短距离。



常用启发式函数：

- 欧几里得距离： $h(q) = \|q - q_{goal}\|_2$
- 曼哈顿距离： $h(q) = \|q - q_{goal}\|_1$
- 位形空间距离：考虑关节权重的加权距离

10.5 人工势场法

10.5.1 势场函数设计

定义 10.4 (势场函数)

势场函数 $U(q)$ 由吸引势和排斥势组成:

$$U(q) = U_{\text{att}}(q) + \sum_i U_{\text{rep},i}(q) \quad (10.7)$$

吸引势场:

$$U_{\text{att}}(q) = \frac{1}{2}\xi\|q - q_{\text{goal}}\|^2 \quad (10.8)$$

排斥势场:

$$U_{\text{rep}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}\eta\left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2 & \text{if } \rho(q) \leq \rho_0 \\ 0 & \text{if } \rho(q) > \rho_0 \end{cases} \quad (10.9)$$

其中 $\rho(q)$ 是到最近障碍物的距离。

10.5.2 梯度下降运动

机器人沿负梯度方向运动:

$$\dot{q} = -K\nabla U(q) \quad (10.10)$$

吸引力:

$$F_{\text{att}}(q) = -\nabla U_{\text{att}}(q) = -\xi(q - q_{\text{goal}}) \quad (10.11)$$

排斥力:

$$F_{\text{rep}}(q) = \eta\left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0}\right)\frac{1}{\rho^2(q)}\nabla\rho(q) \quad (10.12)$$

10.5.3 局部最小值问题

传统势场方法的主要问题是局部最小值陷阱。

定理 10.4 (导航函数)

导航函数是一个可微函数 $\phi: \mathcal{C}_{\text{free}} \rightarrow [0, 1]$, 满足:

1. $\phi(q_{\text{goal}}) = 0$, 在边界处 $\phi = 1$
2. 除目标点外, ϕ 没有局部最小值
3. 在目标点处 ϕ 是最小值

算法 10.7 (波前扩展算法). 1. 将环境离散化为栅格

2. 目标位置设置为 0, 障碍物设置为无穷大

3. 从目标开始波前扩展:

$$\phi(i, j) = \min_{(i', j') \in N(i, j)} \{\phi(i', j')\} + c(i, j) \quad (10.13)$$

4. 重复直到所有自由栅格被访问

10.6 路径平滑与优化

10.6.1 路径后处理

算法 10.8 (路径平滑). 1. 节点约简: 移除不必要的中间节点

- 检查三点共线性
- 验证直线连接的无碰撞性

2. 角点平滑:

- 使用圆弧或样条曲线连接
- 保证 C^1 或 C^2 连续性

3. 路径优化:

- 最小化路径长度
- 最小化曲率
- 满足运动学约束

10.6.2 弹性带方法

定义 10.5 (弹性带)

将路径表示为一系列通过弹簧连接的节点, 在内力和外力作用下达到平衡。



$$F_{\text{total}}(q_i) = F_{\text{internal}}(q_i) + F_{\text{external}}(q_i) \quad (10.14)$$

内力 (平滑性):

$$F_{\text{internal}}(q_i) = k_s(q_{i+1} - q_i) + k_s(q_{i-1} - q_i) \quad (10.15)$$

外力 (避障):

$$F_{\text{external}}(q_i) = k_r \sum_j \frac{1}{\rho_j^2(q_i)} \nabla \rho_j(q_i) \quad (10.16)$$

10.7 动态环境运动规划

10.7.1 实时重规划

算法 10.9 (D* Lite 动态重规划). 1. 检测环境变化 (新障碍物或障碍物移除)

2. 更新受影响区域的代价函数
3. 标记不一致节点: $g(s) \neq rhs(s)$
4. 增量更新最短路径树
5. 沿新路径继续导航

10.7.2 速度障碍法

对于动态障碍物, 考虑速度约束:

定义 10.6 (速度障碍)

对于动态障碍物 B , 速度障碍 VO 定义为导致碰撞的机器人速度集合:

$$VO = \{v_r : \exists t > 0, p_r(t) \in B(t)\} \quad (10.17)$$



算法 10.10 (相互速度障碍 (RVO)). 1. 计算与每个动态障碍物的速度障碍

2. 选择不在任何 VO 内的速度
3. 如果无法避免碰撞, 选择最小侵入的速度
4. 考虑双向责任: 每个智能体承担一半避障责任

10.8 多机器人运动规划

10.8.1 集中式规划

定义 10.7 (复合位形空间)

对于 n 个机器人, 复合位形空间为:

$$\mathcal{C}_{\text{composite}} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_n \quad (10.18)$$

维度为各机器人自由度之和。

碰撞约束包括:

- 机器人与环境的碰撞
- 机器人之间的碰撞

10.8.2 优先级规划

算法 10.11 (优先级运动规划). 1. 根据任务优先级排序机器人: R_1, R_2, \dots, R_n

2. 按优先级依次规划:
 - (a). 为 R_i 规划路径, 将已规划的机器人视为动态障碍物
 - (b). 在时空中避免与高优先级机器人的碰撞
 - (c). 记录 R_i 的时空占用
3. 如果某个机器人无法找到路径, 调整优先级重新规划

10.9 运动规划实例与应用

10.9.1 移动机器人导航

对于差分驱动机器人:

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad (10.19)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta \quad (10.20)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (10.21)$$

使用 RRT 考虑非完整约束:

$$q_{\text{new}} = \text{Integrate}(q_{\text{near}}, (v, \omega), \Delta t) \quad (10.22)$$

10.9.2 机械臂路径规划

高维位形空间规划策略:

1. 使用 PRM 构建路网图
2. 采用任务相关的采样策略
3. 利用逆运动学采样工作空间目标
4. 采用双向搜索加速规划

10.9.3 人机协作环境规划

考虑人类行为的不确定性：

- 预测人类运动轨迹
- 使用概率占用栅格
- 动态调整安全距离
- 实现优雅的避让行为

本章系统介绍了运动规划的理论基础和算法实现。从经典的基于搜索的方法到现代的采样方法，从静态环境到动态环境，从单机器人到多机器人，运动规划技术为机器人自主导航提供了坚实的理论基础和实用的解决方案。

第 11 章 机器人控制

机器人控制确保机器人能够精确地跟踪期望的轨迹，是机器人系统实现预期功能的关键技术。

内容提要

- 控制系统基础理论
- PID 控制及其变种
- 计算力矩控制方法
- 自适应与鲁棒控制
- 滑模控制技术
- 力控制与阻抗控制
- 视觉伺服控制
- 现代控制理论应用

11.1 经典控制方法

11.1.1 PID 控制

基本 PID 控制律：

$$\tau = K_p e + K_i \int_0^t e d\tau + K_d \dot{e} \quad (11.1)$$

其中跟踪误差 $e = q_d - q$ ， K_p 、 K_i 、 K_d 分别为比例、积分、微分增益矩阵。

定理 11.1 (PID 稳定性条件)

对于线性时不变系统，适当选择 PID 参数可以保证闭环系统的稳定性。稳定性边界由系统特征方程的根决定。

11.1.2 计算力矩控制

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (11.2)$$

这种方法可以实现全局线性化，将非线性机器人系统转化为线性系统。

全局线性化证明. 将控制律代入动力学方程：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (11.3)$$

$$M(q)\ddot{q} = M(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) \quad (11.4)$$

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e \quad (11.5)$$

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0 \quad (11.6)$$

得到关于误差的线性微分方程。

□

11.2 自适应控制

11.2.1 参数自适应

当动力学参数未知时，使用自适应律：

$$\tau = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)\hat{\theta} \quad (11.7)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma Y^T s \quad (11.8)$$

其中 Y 是回归矩阵, $\hat{\theta}$ 是参数估计, s 是滑模面。

定理 11.2 (自适应控制稳定性)

在 Lyapunov 意义下, 自适应控制系统是全局稳定的, 跟踪误差收敛到零。



11.2.2 神经网络自适应控制

使用神经网络逼近未知非线性函数:

$$f(x) = W^T \sigma(V^T x) + \epsilon \quad (11.9)$$

其中 $\sigma(\cdot)$ 是激活函数, ϵ 是逼近误差。

11.3 滑模控制

11.3.1 滑模面设计

定义滑模面:

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (11.10)$$

滑模控制律:

$$\tau = \tau_{eq} + \tau_{sw} \quad (11.11)$$

其中等效控制:

$$\tau_{eq} = M(q)(\ddot{q}_d + \lambda \dot{e}) + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (11.12)$$

切换控制:

$$\tau_{sw} = -K \text{sgn}(s) \quad (11.13)$$

11.3.2 高阶滑模控制

为减少 chattering 现象, 采用高阶滑模:

$$\tau = -\alpha |s|^{1/2} \text{sgn}(s) - \beta \int \text{sgn}(s) dt \quad (11.14)$$

11.4 力控制与阻抗控制

11.4.1 阻抗控制

阻抗控制实现期望的动态行为:

$$M_d \ddot{x} + B_d \dot{x} + K_d(x - x_d) = F_{ext} \quad (11.15)$$

其中 M_d, B_d, K_d 是期望的惯性、阻尼和刚度矩阵。

11.4.2 混合位置/力控制

将任务空间分解为位置控制子空间和力控制子空间:

$$S_p \tau = S_p K_p(x_d - x) \quad (11.16)$$

$$S_f \tau = S_f F_d \quad (11.17)$$

其中 $S_p + S_f = I$, S_p 和 S_f 分别是位置和力控制的选择矩阵。

第 12 章 抓取与操作

抓取与操作研究机器人如何与物体进行物理交互，是机器人技术的重要分支。

内容提要

- 抓取规划基础理论
- 接触模型与摩擦
- 力闭合与形闭合
- 灵巧操作技术
- 多指手控制
- 触觉反馈与力觉
- 抓取质量评估
- 在线抓取规划

12.1 力控制基础

12.1.1 接触模型

点接触模型：

$$\mathbf{f} = f_n \mathbf{n} + f_{t1} \mathbf{t}_1 + f_{t2} \mathbf{t}_2 \quad (12.1)$$

摩擦锥约束：

$$\sqrt{f_{t1}^2 + f_{t2}^2} \leq \mu f_n \quad (12.2)$$

12.1.2 抓取矩阵

抓取矩阵 G 描述接触力到物体受力的映射：

$$F_{object} = G f_{contact} \quad (12.3)$$

对于 n 个接触点：

$$G = [G_1, G_2, \dots, G_n] \quad (12.4)$$

其中每个 G_i 对应第 i 个接触点的抓取映射。

12.2 抓取分析

12.2.1 力闭合抓取

定义 12.1 (力闭合)

如果存在接触力使得物体在任意外力下保持平衡，则称抓取是力闭合的。

力闭合条件：

$$\text{rank}(G) = 6 \quad (\text{对于 3D 物体}) \quad (12.5)$$

12.2.2 形闭合抓取

定义 12.2 (形闭合)

如果物体被机械约束完全固定，无法在任何方向上移动，则称抓取是形闭合的。

12.2.3 抓取质量指标

最小奇异值:

$$Q_1 = \sigma_{\min}(G) \quad (12.6)$$

可操作性:

$$Q_2 = \sqrt{\det(GG^T)} \quad (12.7)$$

条件数:

$$Q_3 = \frac{\sigma_{\max}(G)}{\sigma_{\min}(G)} \quad (12.8)$$

12.3 多指手控制

12.3.1 运动学约束

对于 n 指手抓取物体:

$$J_h \dot{q}_h = J_o \dot{q}_o \quad (12.9)$$

其中 J_h 是手部雅可比, J_o 是物体雅可比。

12.3.2 力分配

在冗余系统中, 内力不影响物体运动:

$$f = G^+ F_{ext} + (I - G^+ G) f_{internal} \quad (12.10)$$

第 13 章 移动机器人

移动机器人具有在平面或三维空间中移动的能力，面临独特的运动学和控制挑战。

内容提要

- 移动机器人类型与特点
- 运动学建模方法
- 非完整约束分析
- 路径跟踪控制

- 定位与建图技术
- SLAM 算法原理
- 导航系统设计
- 多机器人协调

13.1 运动学约束

13.1.1 轮式机器人约束

轮式移动机器人通常受到非完整约束：

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (13.1)$$

对于差分驱动机器人：

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (13.2)$$

13.1.2 运动学模型

差分驱动机器人的运动学方程：

$$\dot{x} = \frac{r}{2}(\omega_L + \omega_R) \cos \theta \quad (13.3)$$

$$\dot{y} = \frac{r}{2}(\omega_L + \omega_R) \sin \theta \quad (13.4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{r}{2L}(\omega_R - \omega_L) \quad (13.5)$$

13.2 控制方法

13.2.1 路径跟踪控制

算法 13.1 (纯追踪控制). 1. 在期望路径上选择前视点

- 计算机器人到前视点的距离和角度
- 设计控制律使机器人朝向前视点
- 实现平滑的路径跟踪

反对称性质：

$$\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \text{ 是反对称矩阵} \quad (13.6)$$