第14章 数项级数

14.1 无穷级数的基本性质

14.1.1 无穷级数的定义

$$\text{无穷级数：}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\text{部分和：}S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\text{级数收敛：}\lim_{n\to\infty} S_n = S\text{存在}$$

$$\text{否则，级数发散}$$

14.1.2 收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

14.1.3 收敛级数的可加/可数乘性

- !!! 前提 !!!：两级数都收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k\text{收敛}$$

$$\text{则}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

14.1.4 收敛级数的可结合性

- 把 **收敛级数** 任意 **结合**
- 而 **不改变** 其 **先后次序**
- 与 **新级数** 和相同

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots$$

$$\text{新级数：}b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- 正向：已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

- 逆向：已知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且 括号中的项都同号，得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

14.1.5 增加或去掉有限项

> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 前 增加或去掉有限项，不影响级数的敛散性

14.2 正项级数的比较判别法

14.2.0 默认讨论 正项级数

14.2.0.0 正项级数 $a_n \geq 0$

14.2.0.1 收敛的充分必要条件 S_n 有界

14.2.1 比较判别法

$$\begin{aligned}&\text{两正向级数：}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &\text{大级数收敛，小级数也收敛，} \\ &\text{小级数发散，大级数也发散。}\end{aligned}$$

- 不等式形式
  - 条件：n 充分大时，$a_n \leq b_n$
  - 结论：
    1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
    2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

- 极限形式

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

比较对象 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 当 **分母**

1. $0 < l < +\infty$，级数数量级相同， 同敛散
2. $l = 0$， 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
3. $l = +\infty$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

14.2.2 Cauchy 积分判别法

条件:

$$\begin{aligned}&1. \quad x \geq 1, f(x) \geq 0 \\ &2. \quad f(x)\text{递减}\end{aligned}$$

结论:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 与 } \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \text{ 同敛散}$$

14.3 正项级数的其它判别法

14.3.0 默认讨论 正项级数

14.3.1 (Cauchy) 开方判别法

本质：与 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 比较

- 不等式形式

1. 收敛

   $\exists\, q<1$ 对 **充分大** 的 n 有

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

2. 发散

   对 **无穷多个** n, 有

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

- 极限形式

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

1. 收敛　　$q<1$
2. 发散　　$q>1$
3. 无法判断　$q=1$

14.3.2 一个比较的引理

条件：

$$n \geq n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散

14.3.3 D'Alembert 判别法

本质：与 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 比较

- 不等式形式

1. 收敛

   $\exists\ q < 1, n$ **充分大** 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

2. 发散

   n **充分大** 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

- 极限形式

1. 收敛

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

2. 发散

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n} = q' > 1$$

3. 无法判断

$$q = 1 \text{ 或 } q' = 1$$

14.3.4 Cauchy判别法条件更强

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

14.3.5 Raabe 判别法

本质：与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 比较

- 不等式形式

1. 收敛

   $\exists\ r > 1\ \ n$ **充分大** 时

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r$$

2. 发散

   n **充分大** 时

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\leq 1$$

- 极限形式

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l$$

$$\text{或}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{l}{n}+o(\frac{1}{n}), n\to\infty$$

1. 收敛 $l>1$
2. 发散 $l<1$
3. 无法判断 $l=1$

14.3.6 Gauss 判别法

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o(\frac{1}{n\ln n}), n\to\infty$$

1. 收敛 $\beta>1$
2. 发散 $\beta<1$
3. 无法判断 $\beta=1$

14.4 任意项级数

14.4.1 Cauchy 收敛原理

收敛的 **充分必要条件**

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$, 当 $n > N$, 对一切 p

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

14.4.1.1 一个例子

$$\{a_n\}\text{递减正数列，} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{收敛，}$$
$$\text{则 } \lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$
$$\text{即} a_n = o(\frac{1}{n})$$

14.4.2 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$

14.4.2.1 Leibniz 判别法

$$\{a_n\}\text{递减趋于零} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \text{ 收敛}$$

14.4.3 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

14.4.3.0 Abel 分部求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$
$$\text{这里 } S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$$

$$\text{记}\Delta b_k = b_k - b_{k+1} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k$$

$$\text{对比} \int v du = uv - \int u dv$$

14.4.3.0 Abel 引理

单调 数列 $\{b_n\}$

部分和 有界数列 $\{a_n\}$，$S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l \quad |S_k| \le M$

$$|\sum_{k=1}^{n} a_n b_n| \le M(|b_1| + 2|b_n|)$$

14.4.3.1 Dirichlet 判别法

(a) $\{b_n\}$ 单调 **趋于零**

(b) $\{S_k\}$ 有界

14.4.3.2 Abel 判别法

(a) $\{b_n\}$ 单调 **有界**

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**

14.4.3.3 一个常见的部分和有界数列 $\cos nx$

$$|\sum_{n=1}^{N} \cos nx| = |\frac{\sin{(N+\frac{1}{2})x} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$x \ne 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

14.5 绝对收敛和条件收敛

14.5.0 讨论交换求和次序，和改变的条件

绝对收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

14.5.1 绝对收敛必定条件收敛

14.5.2 交换绝对收敛级数

- 交换 **无穷多项** 的次序
- 新级数仍收敛
- 和不变

14.5.3 交换条件收敛级数(Riemann定理)

- 适当交换次序
- 可收敛到事先指定的任意实数 S
- 也可以发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$

14.6 级数的乘法

此节主要讨论 Cauchy 乘积

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \, , \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

14.6.0 Cauchy 乘积

对无穷矩阵按对角线相加

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$$

14.6.1 Cauchy(任意方式相加)

- 相乘的两级数都 **绝对收敛**
- 任意方式所加的得到级数都是 **绝对收敛**
- 为 AB

14.6.2 Mertens(判断收敛的条件)

- 若 至少一个**绝对收敛**
- 则 Cauchy 乘积 **收敛** 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$

14.6.3 Abel(已知收敛)

- 若 Cauchy 乘积 收敛
- 则 $\sum_{n=1}^{\infty} = AB$

14.7 无穷乘积

建立在无穷和的基础上

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

$$P_n = \prod_{n=1}^{n} = p_1 \cdots p_n$$

14.7.1 收敛发散的定义

收敛

$$\lim_{n\to} P_n = P \neq 0$$

发散

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0 \text{ 或 不存在}$$

14.7.2 收敛的必要条件

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1$$

14.7.3 无穷和与无穷乘积的关系

14.7.3.1 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛的充分必要条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n) = S \text{ 收敛}$$

$$\text{且} \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^S$$

以下讨论上述两级数的关系

14.7.3.2 同敛散条件

独立两个条件

1. 从某个 n 起，$a_n > 0$ 或 $a_n < 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

14.7.3.3 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 0$ 发散到0的条件

独立的两个条件

1. $-1 < a_n < 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散