

# 第14章 数项级数

## 14.1 无穷级数的基本性质

### 第14章 数项级数

#### 14.1 无穷级数的基本性质

##### 14.1.1 无穷级数的定义

##### 14.1.2 收敛的必要条件

##### 14.1.3 收敛级数的可加/可数乘性

##### 14.1.4 收敛级数的可结合性

##### 14.1.5 增加或去掉有限项

### 14.1.1 无穷级数的定义

$$\text{无穷级数: } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\text{部分和: } S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\text{级数收敛: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ 存在}$$

否则, 级数发散

### 14.1.2 收敛的必要条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

### 14.1.3 收敛级数的可加/可数乘性

- !!! 前提 !!! : 两级数都收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ 收敛}$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

### 14.1.4 收敛级数的可结合性

- 把 收敛级数 任意 结合
- 而 不改变 其 先后次序
- 与 新级数 和相同

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots$$

$$\text{新级数: } b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

- 正向: 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 得  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛

- 逆向：已知  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛，且括号中的项都同号，得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

### 14.1.5 增加或去掉有限项

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  前增加或去掉有限项，不影响级数的敛散性