

# *ELECTROMAGNETISME*

## *Partie B.*

### *MAGNETOSTATIQUE*



*Règles ou techniques de:*

*1- La main droite.*

*2- Produit vectoriel.*

*3- Bonhomme d'Ampère.*

# *Justification de l'articulation du cours*

*En Électrostatique, après la présentation des propriétés des charges électriques, nous avons directement exposé la loi de force entre ces charges : la loi de Coulomb.*

*La difficulté mathématique de la loi des forces s'exerçant entre deux circuits nous incite à présenter les différentes grandeurs physiques de la Magnétostatique dans un ordre quelque peu inverse en abordant, dans un premier temps le champ magnétostatique et par la suite la loi des forces entre les circuits.*

## *Remarque sur les dessins des circuits*

*Sauf cas très spécifique, supraconductivité, un générateur électrique est nécessaire au maintien d'un courant constant dans un circuit. Pour des raisons de simplification nous sacrifions à la coutume de ne pas représenter ces générateurs. Ils seront représentés lorsqu'il faudra tenir compte de l'énergie qu'ils vont échanger avec le circuit.*

## *Remarque sur la mathématisation du cours*

*Ce cours fait appel à de nombreux résultats mathématiques non encore connus et prouvés à nos étudiants. Ils sont indispensables pour établir certaines propriétés des grandeurs physiques concernées par ce cours. Ils doivent être acceptés ici comme des clés donnant accès à des lois physiques présentant le plus souvent un caractère fondamental.*

# Partie:B    Chapitre :1    Éléments de courant

## 1 Circuits électriques élémentaires

Nous ne traiterons pas ici les phénomènes de transport du courant électrique. Notre étude, à cet instant est concernée par des courants électriques constants dans le temps, on dit aussi continus, circulant dans des fils métalliques de sections très petites par rapport à leurs longueurs. On les appelle des **circuits filiformes**.

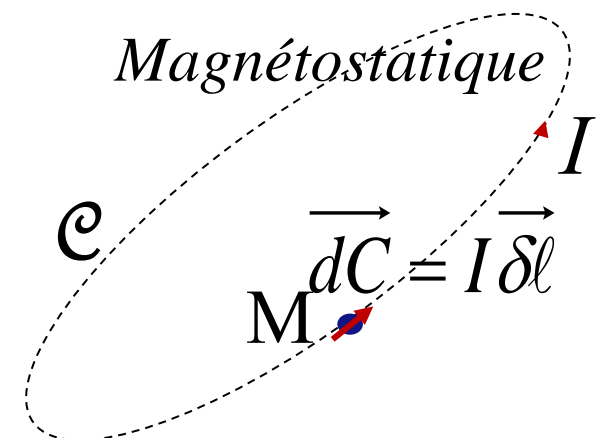
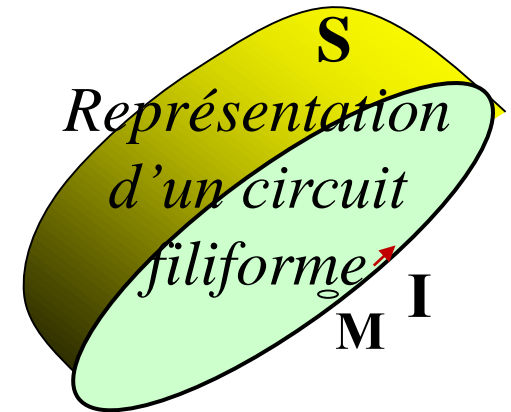
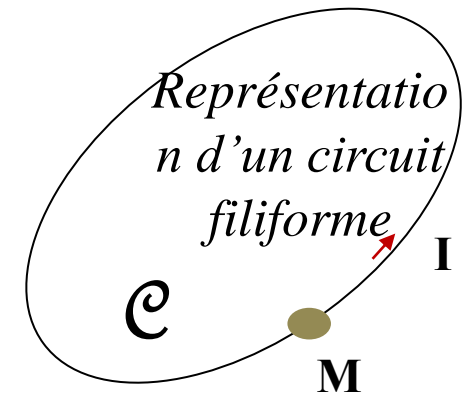
De tels circuits sont bien pratiques car ils représentent des domaines mathématiques à une dimension. Il est possible de se localiser le long de la boucle  $\mathcal{C}$  grâce à un seul paramètre et également d'appuyer sur ces circuits une surface  $S$  (comme une bulle de savon sur un anneau).

Seuls les circuits fermés sur eux-mêmes ont un sens physique. Les courants forment ainsi des boucles fermées.

Afin de traiter des circuits de formes quelconques, il est commode de décomposer un circuit filiforme en éléments de circuit  $\overrightarrow{d\mathcal{C}}$  vectoriels infinitésimaux orientés dans le sens du courant  $\overrightarrow{d\mathcal{C}} = I \overrightarrow{\delta\ell}$ .

Un tel élément, qui ne peut être isolé de l'ensemble du circuit que par la pensée, placé en un point  $M$  du circuit, est le correspondant élémentaire en magnétostatique de la charge ponctuelle de l'électrostatique.

$$M^0 q$$



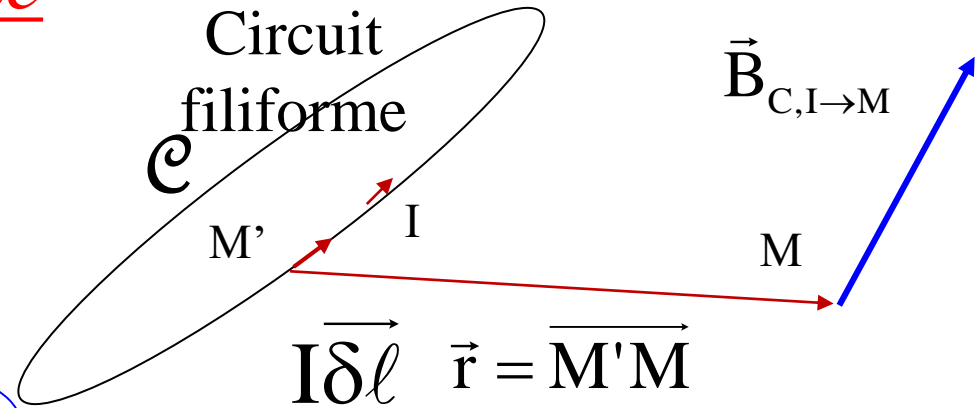
## 2. Champ magnétique

### 2.1 Définition

Par définition le champ magnétique produit par le circuit filiforme  $(\mathcal{C}, I)$  au point  $M$  de l'espace est donné par

$$\vec{B}_{C,I \rightarrow M} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left( \vec{\delta\ell} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

C'est une grandeur décrite par un vecteur, bien que ce « vecteur » ait des propriétés spéciales.



Biot



Savart

### 2.2 Propriétés du champ magnétique

- ✓ La formule ci-dessus est la formule de Biot et Savart
- ✓ Moyen commode de calculer des champs plus compliqués par intégration d'éléments différentiels.
- ✓ Le champ magnétique a des propriétés d'un vecteur dit axial. Pour un vecteur  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  l'inversion des axes du repère change le vecteur  $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$ . Par contre, pour un vecteur dont l'inversion des axes du repère ne change pas ce dernier en son inverse: le cas des vecteurs du type  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ .
- ✓ L'unité du champ magnétique est le **Tesla**. (sous-unité le **Gauss** =  $10^{-4} \text{ T}$ ).

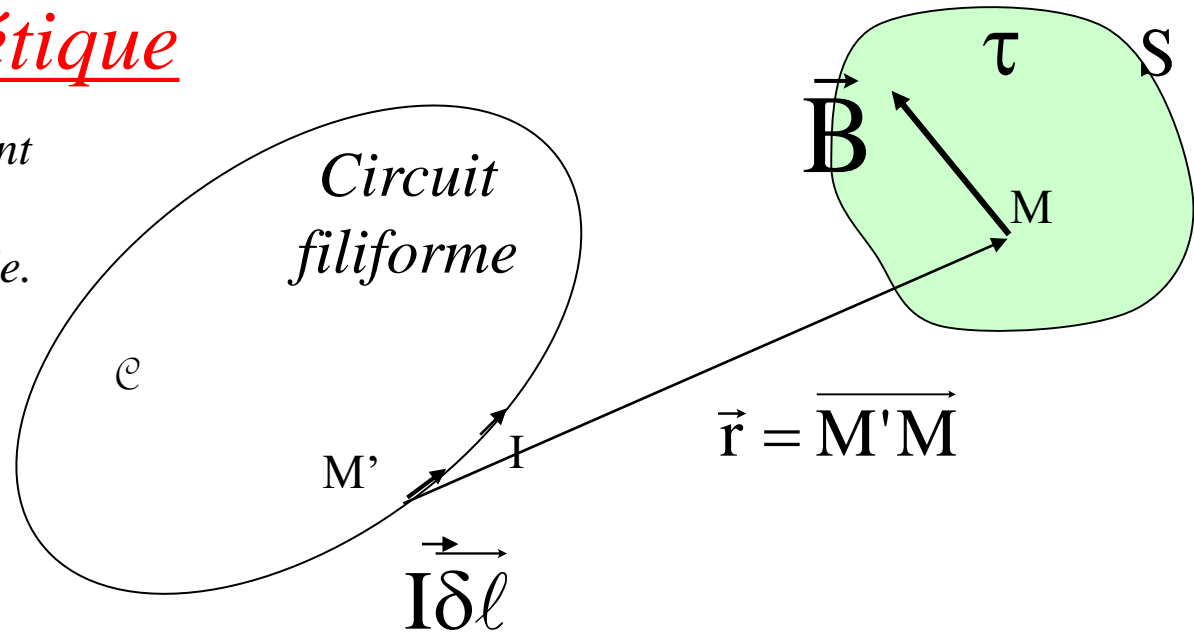
### 3. Flux du champ magnétique

Soit un circuit  $\mathcal{C}$  parcouru par un courant  $\mathbf{I}$  créant un champ magnétique  $\vec{B}$  dont on cherche à calculer le flux à travers une surface  $S$ , ici fermée.

Par définition: 
$$\Phi_{\vec{B} \rightarrow S} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

L'unité de flux est le Weber.

Montrons que le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface fermée est nul. C'est une propriété fondamentale du champ magnétique.



Transformons l'expression du flux à l'aide de la formule d'Ostrogradski 
$$\Phi_{\vec{B} \rightarrow S} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{B} \, d\tau$$

Nous avons d'autre part

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left( \vec{\delta l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Calculons la divergence de  $\vec{B}$  au point  $M$

$$\text{div}_M \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{div}_M \oint_C \left( \vec{\delta l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Les dérivées de la divergence portent sur l'extrémité  $M$  du vecteur  $\vec{r}$  et ne concerne pas la variable d'intégration  $M'$ . Nous pouvons ainsi écrire (sous réserve de la convergence uniforme de l'intégrale)

$$\text{div}_M \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div}_M \left( \vec{\delta l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Utilisons la formule  $\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$  ici  $\text{div}_M \left( \overrightarrow{\delta \ell} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_M \overrightarrow{\delta \ell} - \overrightarrow{\delta \ell} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_M \frac{\vec{r}}{r^3}$

Comme  $\overrightarrow{\delta \ell}$  n'est pas concerné par ce qui se passe en  $M$  et que  $\overrightarrow{\text{rot}}_M \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$

**Nous obtenons la relation locale, propriété fondamentale du champ magnétique, propriété qu'il ne faudra pas retoucher même dans les champs variables dans le temps dite de Maxwell Thomson.**

$$\text{div}_M \vec{B}(M) = 0$$

Cette propriété locale se traduit par une propriété intégrée sur un domaine fini de l'espace. Par conséquent:

**Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul.**

**On dit aussi que le champ magnétique est à flux conservatif.**

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

**Remarque:** Nous avons trouvé, avec le théorème de Gauss, que le flux du champ électrique à travers une surface fermée, n'était pas nécessairement nul mais dépendait de l'existence de charges électriques à l'intérieur du volume délimité par  $S$ . Les propriétés de  $\vec{B}$  et de  $\vec{E}$  ne sont donc pas équivalentes. On traduit également cette différence par la non existence de pôles magnétiques séparables, équivalence physique de la nécessité de courants électriques fermés sur eux-mêmes.



## 4. Circulation du champ magnétique - Théorème d'Ampère

Considérons au point  $M_2$  le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le circuit  $\mathcal{C}_1$  parcouru par le courant  $I$ . Considérons l'élément de circulation du champ  $\vec{B}$  le long d'un élément  $\vec{\delta\ell}_2$  du contour  $\mathcal{C}$  exprimée par:

$$\vec{B} \cdot \vec{\delta\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \left( \vec{\delta\ell}_1 \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{\delta\ell}_2$$

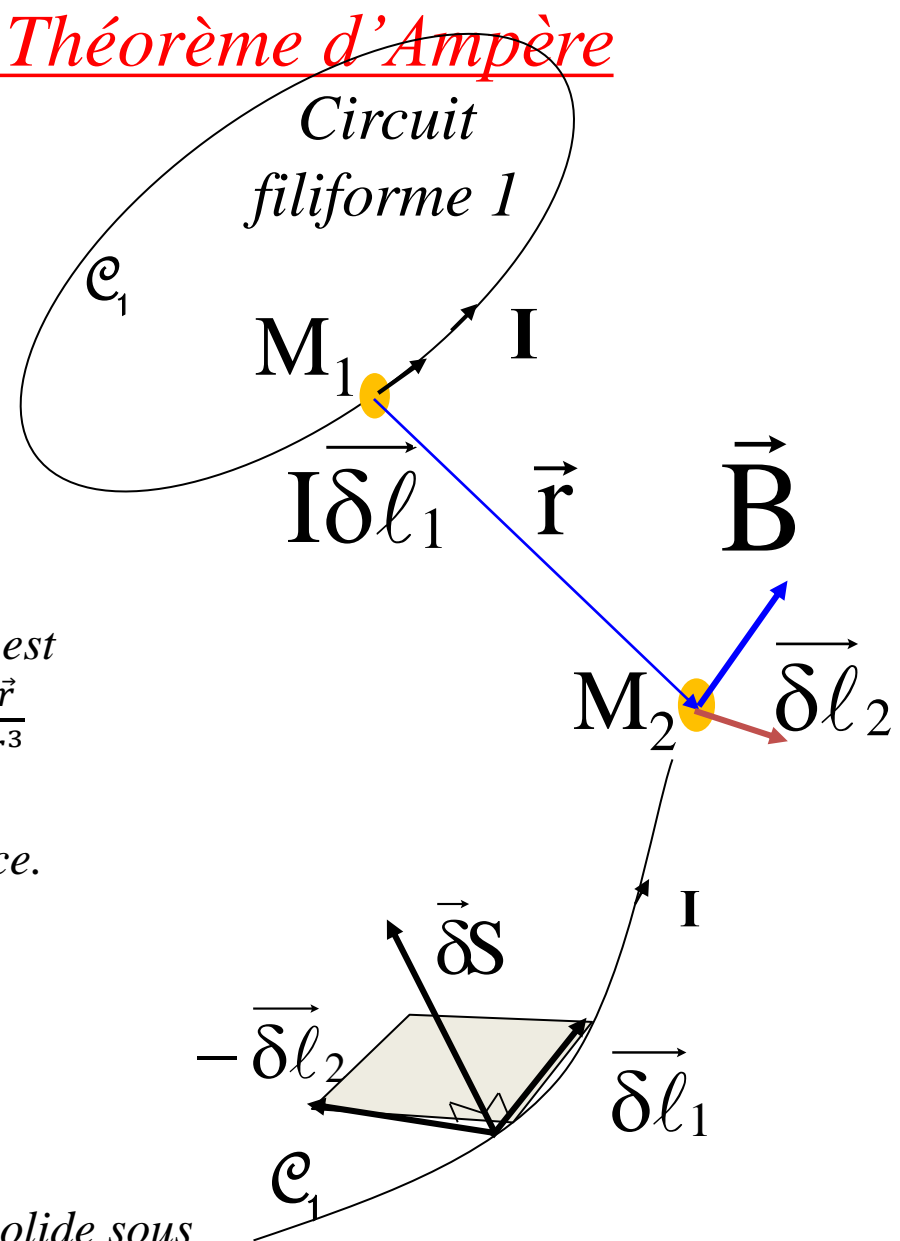
L'intégrale  $\oint_{\mathcal{C}_1} ( )$  portant sur la variable en  $M_1$  n'est pas concernée par  $\vec{\delta\ell}_2$  qui est une constante pour cette intégrale. Il est alors possible d'écrire  $\vec{B}(M_2) \cdot \vec{d\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} (\vec{d\ell}_1 \wedge -\vec{d\ell}_2) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$  en vertu des propriétés du produit mixte.

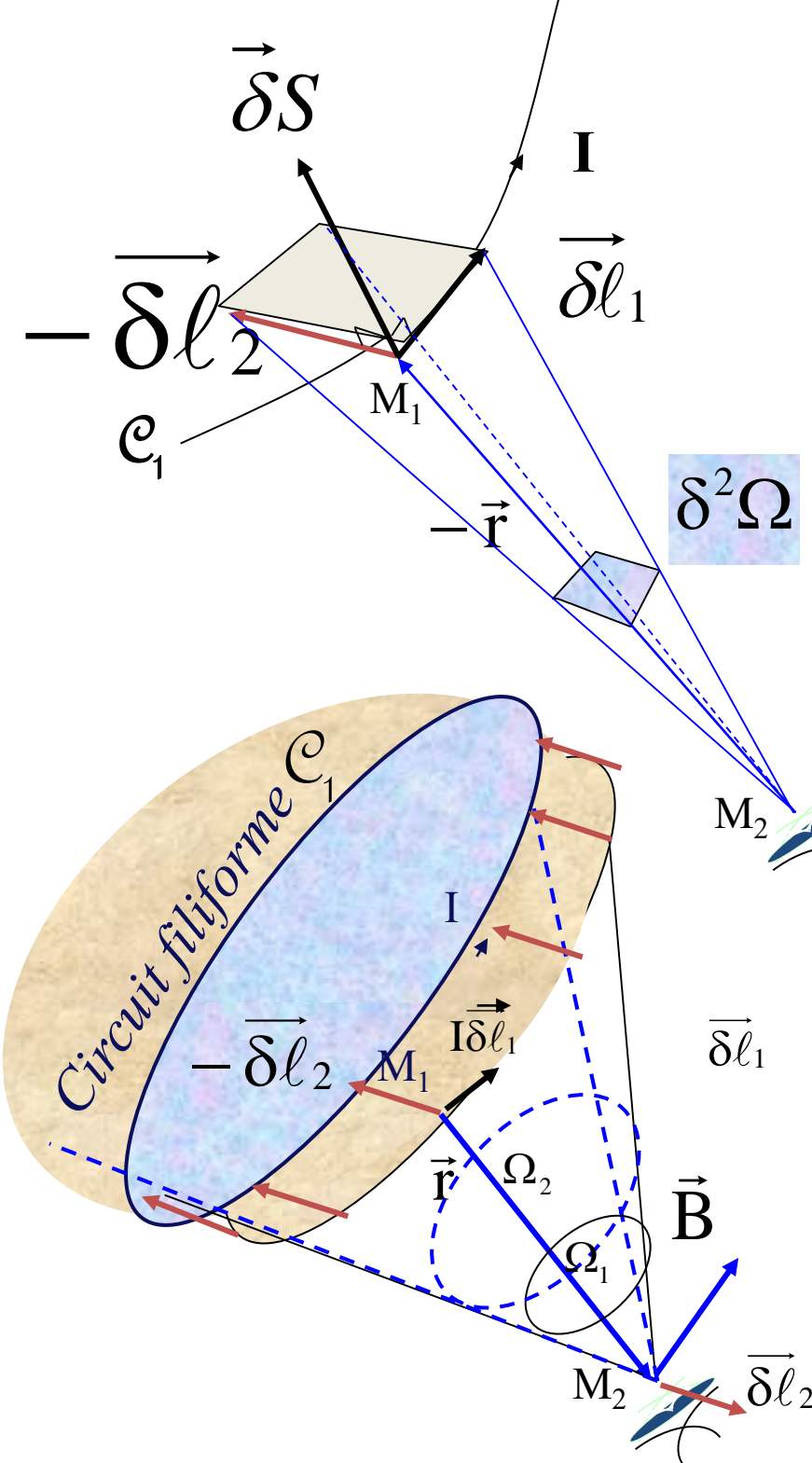
La quantité vectorielle  $\vec{dS} = (\vec{d\ell}_1 \wedge -\vec{d\ell}_2)$  un élément de surface.

La circulation élémentaire peut ainsi s'écrire:

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{d\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\vec{r} \cdot \vec{dS}}{r^3}$$

Où la quantité:  $\left( -\frac{\vec{r} \cdot \vec{dS}}{r^3} \right) = \delta^2 \Omega$ , représente l'élément d'angle solide sous lequel du point  $M_2$  on voit l'élément de surface  $\vec{dS}$ . Avant de procéder à une intégration discutons les variations des différents paramètres.





Lors de l'intégration le long de  $\mathcal{C}_i$

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{\delta \ell_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \left( \overrightarrow{\delta \ell_1} \times \overrightarrow{\delta \ell_2} \right) \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \delta^2 \Omega$$

L'intégrale donne l'angle solide  $\delta \Omega$  sous lequel de  $M_2$  est vu le bandeau de surface obtenu en déplaçant le circuit  $\mathcal{C}_i$  de  $\overrightarrow{\delta \ell_2}$ .

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \delta^2 \Omega = \delta \Omega.$$

Si on appelle l'angle solide sous lequel est vue la surface du circuit  $\mathcal{C}_i$  du point  $M_2$

$\Omega_1$  dans sa position initiale et  $\Omega_2$  après être déplacée de  $-\overrightarrow{\delta \ell_2}$   
alors  $\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$

est la variation de l'angle solide sous lequel est vue la surface du circuit  $\mathcal{C}_i$  lorsque ce dernier se déplace de  $\overrightarrow{\delta \ell_2}$ .

Or déplacer le circuit de  $-\delta \ell_2$  revient à le garder fixe mais à déplacer le point d'observation  $M_2$  de  $-\delta \ell_2$ .

Il vient alors le résultat important suivant : la circulation élémentaire du vecteur  $\vec{B}$  sur  $\overrightarrow{\delta \ell_2}$  est égale à

$$dC = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\delta \ell_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \delta \Omega$$

$\delta \Omega$  étant la variation d'angle solide sous lequel est vue la surface du circuit  $(\mathcal{C}_i, I)$  source de  $\vec{B}$ , lors du déplacement  $\overrightarrow{\delta \ell_2}$ .



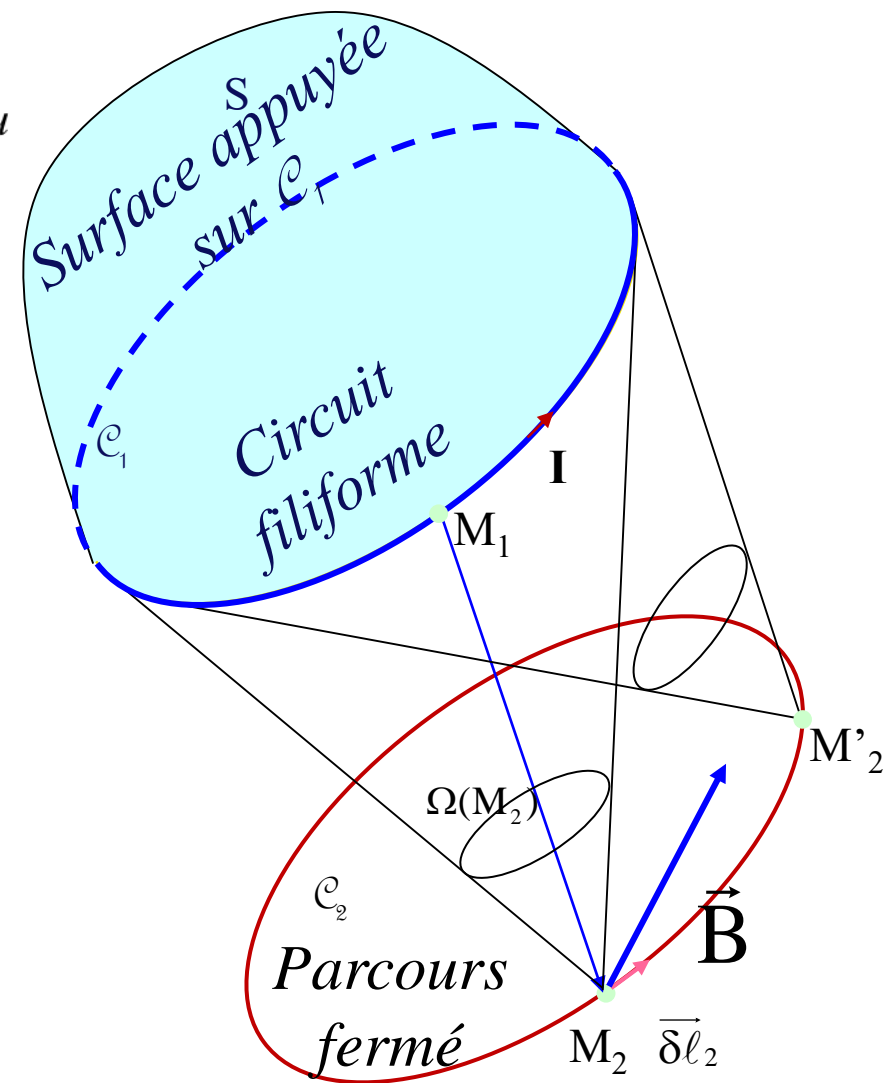
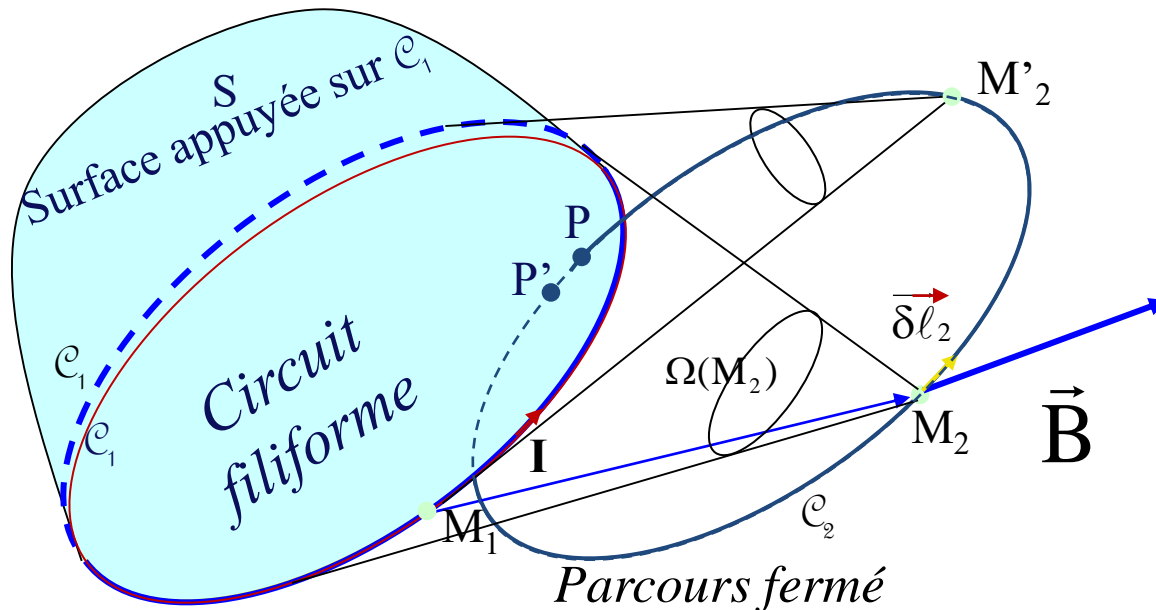
La circulation élémentaire  $d\vec{C}$  de  $\vec{B}$  n'est qu'une étape vers le théorème d'Ampère. Considérons maintenant la circulation  $C$  du champ  $\vec{B}$  le long d'un parcours fermé  $\mathcal{C}_2$

### Deux cas sont à envisager

✓ La courbe fermée  $\mathcal{C}_2$  n'intercepte pas toute surface  $S$  appuyée, comme une bulle de savon, sur le circuit  $(\mathcal{C}_1, I)$ .

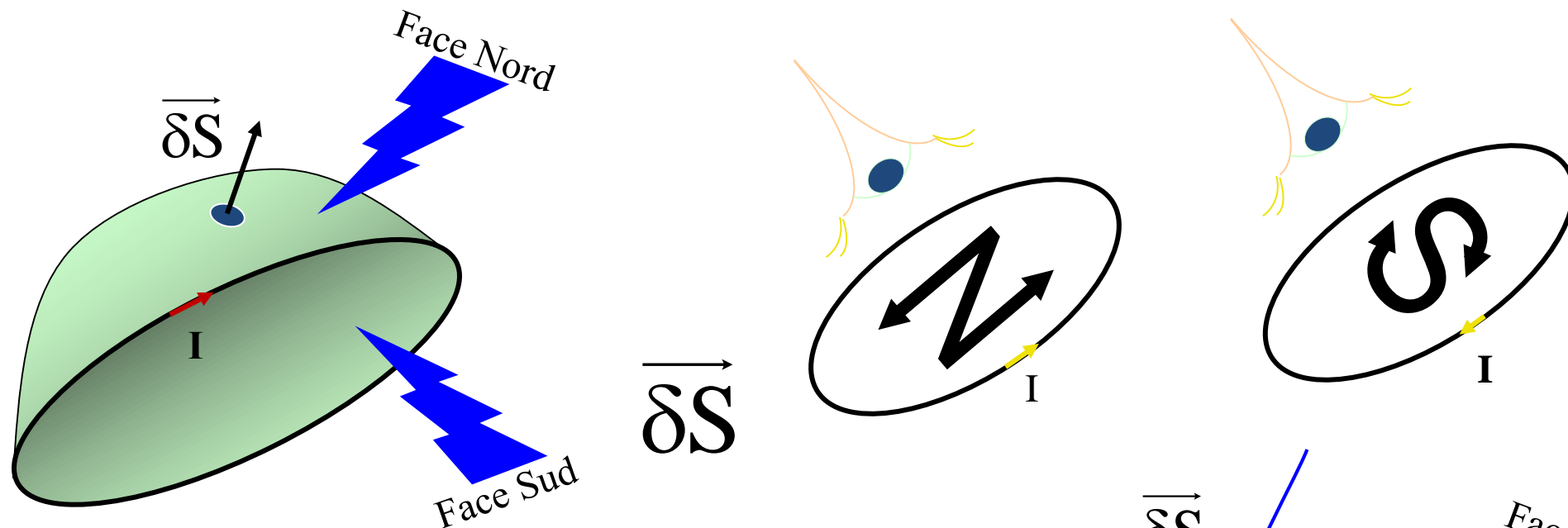
Lors de la circulation du champ  $\vec{B}$  sur  $\mathcal{C}_2$  l'angle solide  $\Omega$  varie continûment de la valeur qu'il a en  $M_2$  à cette valeur retrouvée après un tour complet sur  $\mathcal{C}_2$ . **Donc la circulation de  $\vec{B}$  sur la courbe  $\mathcal{C}_2$  qui n'intercepte pas le courant  $I$  est nulle.**

✓ La courbe fermée  $\mathcal{C}_2$  intercepte toute surface  $S$  appuyée sur  $\mathcal{C}_1$ , dans ce cas l'angle solide  $\Omega$  varie d'une façon continue jusqu'à un point  $P$  au dessus de la surface  $S$ , juste avant de la traverser.

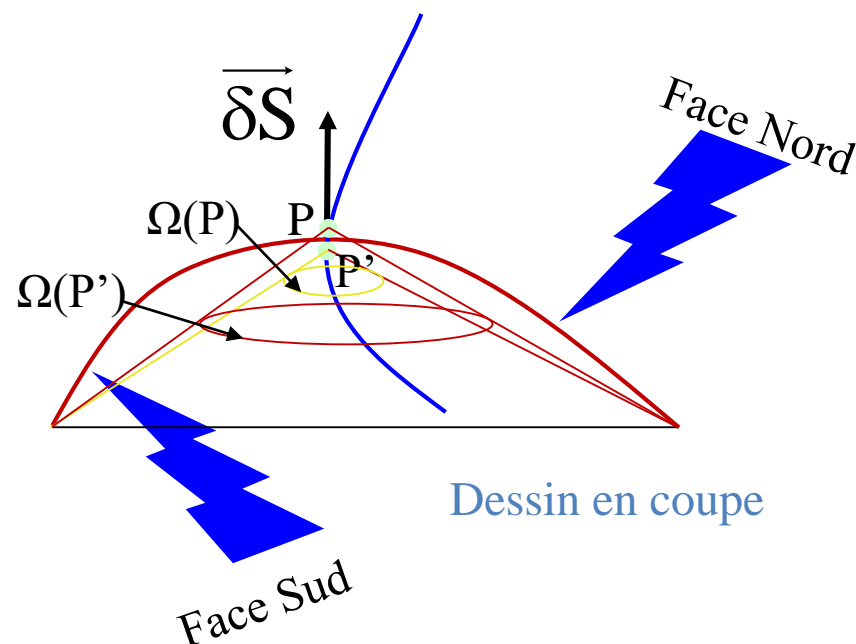


Au point  $P$  l'angle solide est égal à  $\Omega(P)$ . Au point  $P'$ , après avoir traversé la surface, l'angle devient  $\Omega(P')$ . Ces deux angles sont reliés entre eux. Avant d'établir cette relation rappelons comment on oriente une surface appuyée sur un circuit donné.

En premier lieu il nous faut définir l'orientation d'une surface appuyée sur un circuit parcouru par un courant. Une telle surface est orientée par convention.



Il est alors possible d'expliciter la relation entre  $\Omega(P)$  et  $\Omega(P')$ . Un dessin en coupe est plus explicite. Compte tenu de l'orientation de la surface, au point  $P$  l'élément  $\delta\vec{S}$  est vu dans le sens inverse et l'angle solide  $\Omega(P)$  est négatif. A l'inverse l'angle  $\Omega(P')$  est positif. L'angle négatif  $\Omega(P)$  peut être remplacé par l'angle  $4\pi - \Omega(P)$ , son complémentaire à tout l'espace. Le passage de  $P$  à  $P'$  se traduit par une variation d'angle solide, lorsque les deux points sont confondus avec la surface



$$\Delta\Omega = \Omega(P') - \Omega(P) = \lim_{P, P' \rightarrow M \in S} [\Omega(P') - (4\pi - \Omega(P))] = 4\pi$$

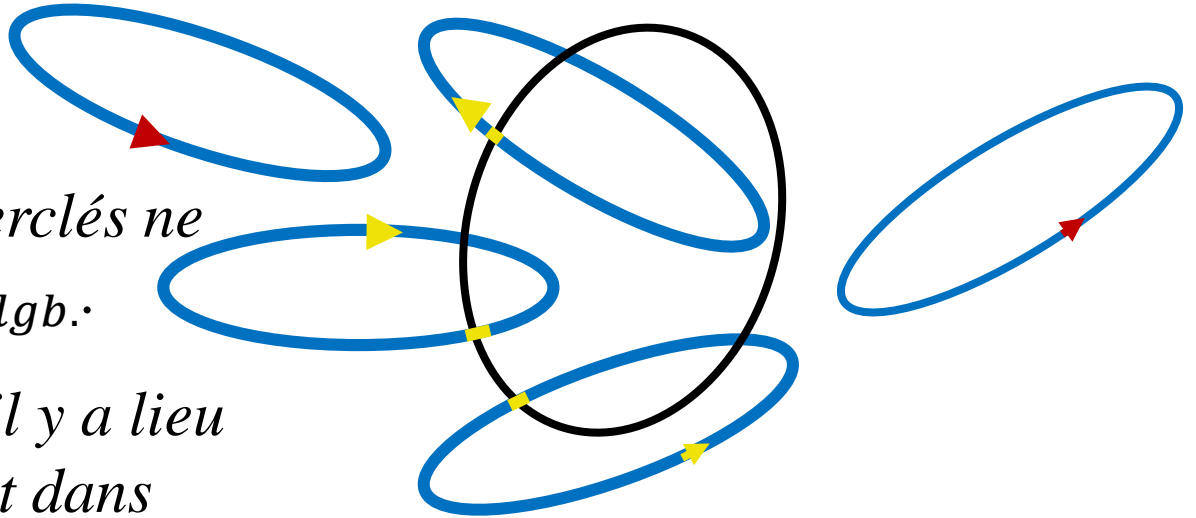
Il en résulte pour la circulation du champ magnétique  $\vec{B}(\mathbf{M})$  sur le contour  $\mathcal{C}_2$  qui traverse la surface  $S$  portée par le circuit  $\mathcal{C}_1$  est donnée par la relation qui exprime le théorème d'Ampère:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}(\mathbf{M}) \cdot \overrightarrow{d\ell}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} d\Omega = \mu_0 I_{\text{enl., algéb}},$$

Où  $I_{\text{enl.,alg.}}$  est égale à la somme algébrique de tous les courants  $I$  enlacés par le contour  $\mathcal{C}_2$  dit aussi Contour d'Ampère  $\Gamma_A$ .

✓ Les courants qui ne sont pas encerclés ne contribuent pas au calcul de  $I_{\text{enl.,alg.}}$ .

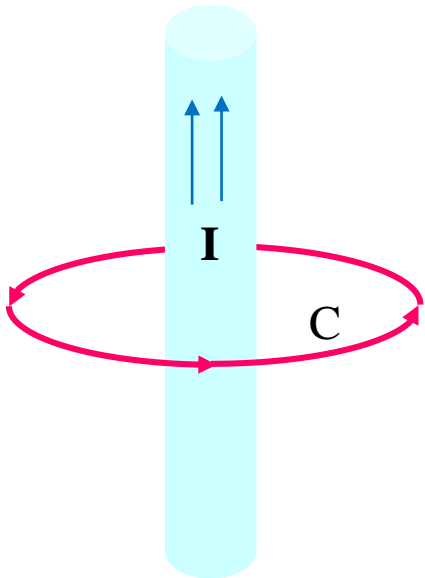
✓ Cette sommation est algébrique, il y a lieu de tenir compte du sens du courant dans chaque circuit encerclé, la surface étant orientée en fonction de ce courant.



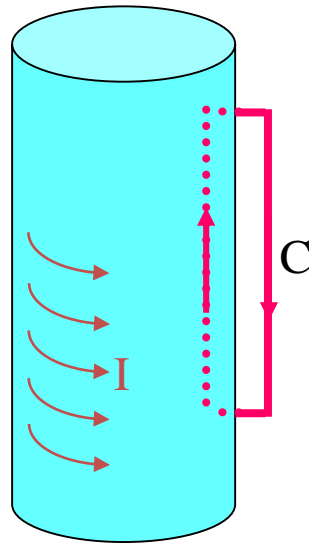
## 5. Symétries où le théorème d'Ampère est applicable

*L'application du théorème d'Ampère est réservée à quelques cas particuliers de distribution de courants à haute symétrie. Il conviendra d'examiner attentivement si le théorème est applicable au problème posé.*

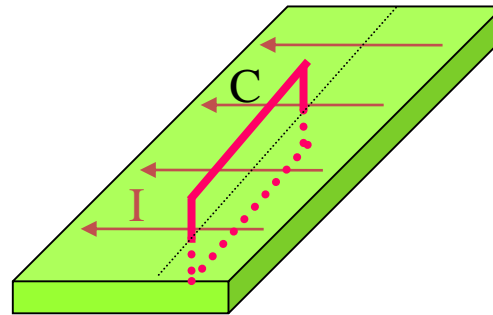
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{encerclés par } C}$$



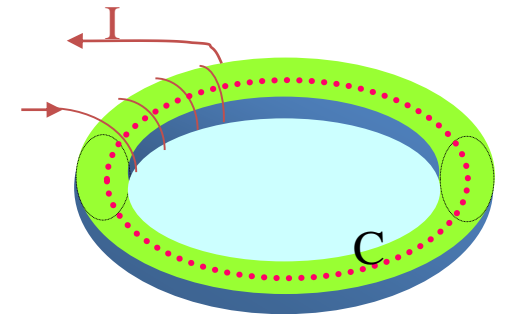
*Fil infiniment long*



*Solénoïde  
infiniment long*



*Plan  
infiniment long*

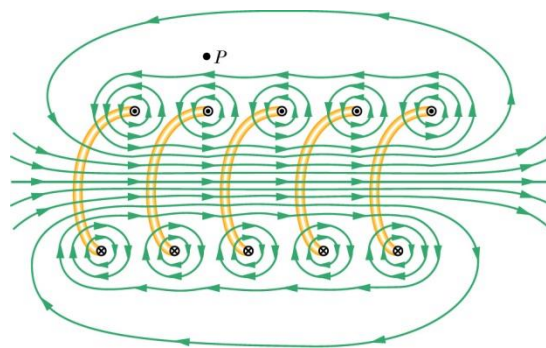
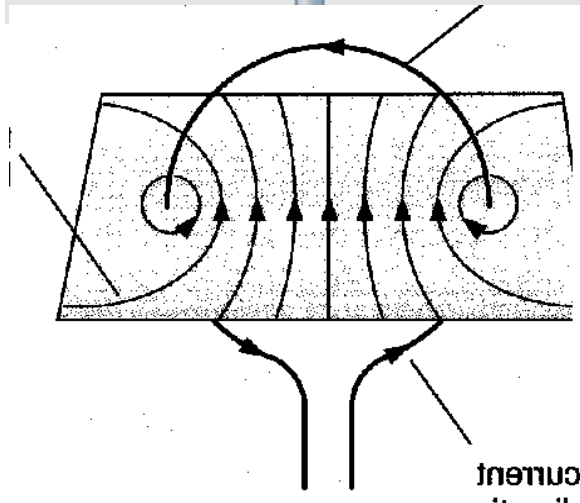
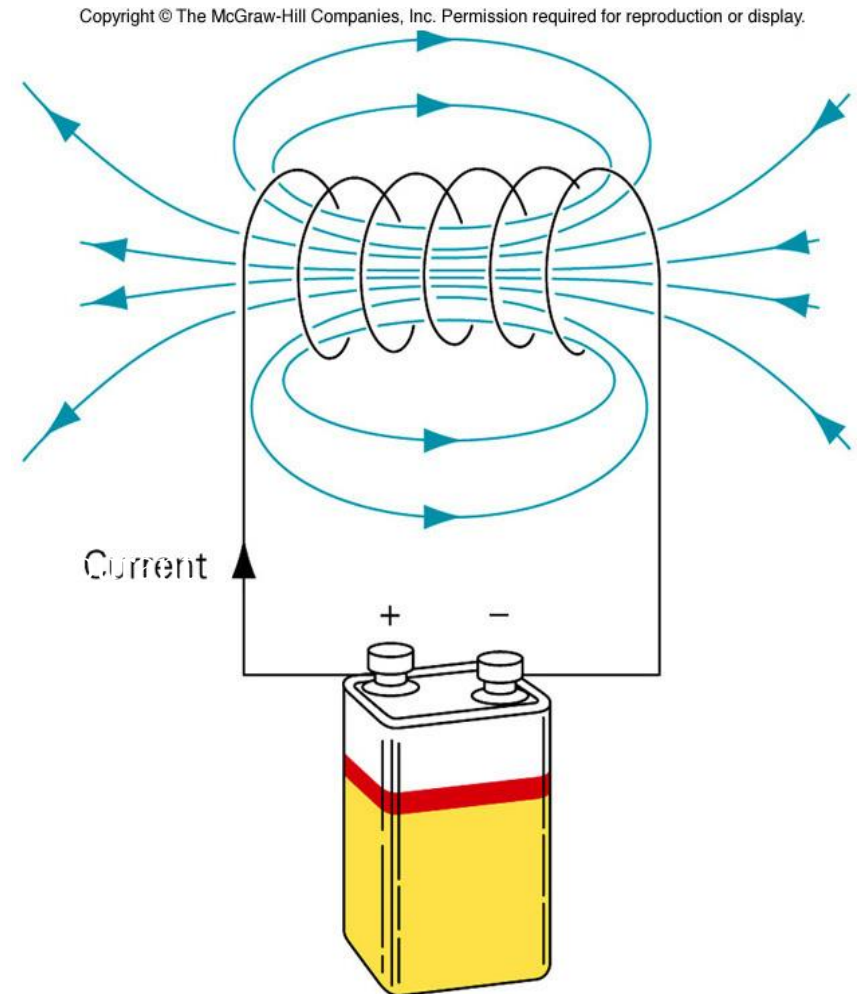
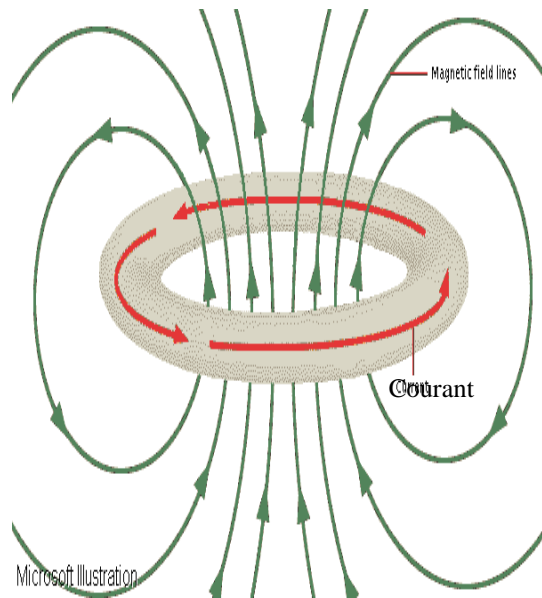
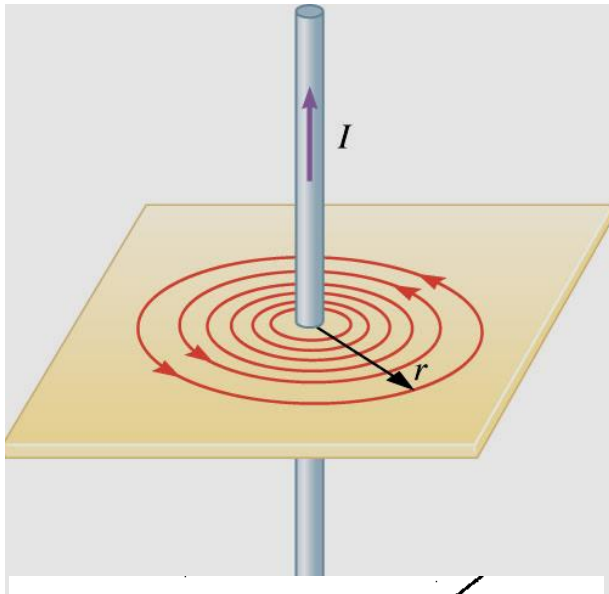


*Tore régulier*

## 6. Lignes de champ – Tubes de flux

### 6.1. Lignes de champ

*Comme pour le champ électrique les lignes du champ magnétique sont localement tangentes au champ. Elles définissent ce que l'on appelle le spectre. Comme principale propriété elles constituent des boucles fermées.*

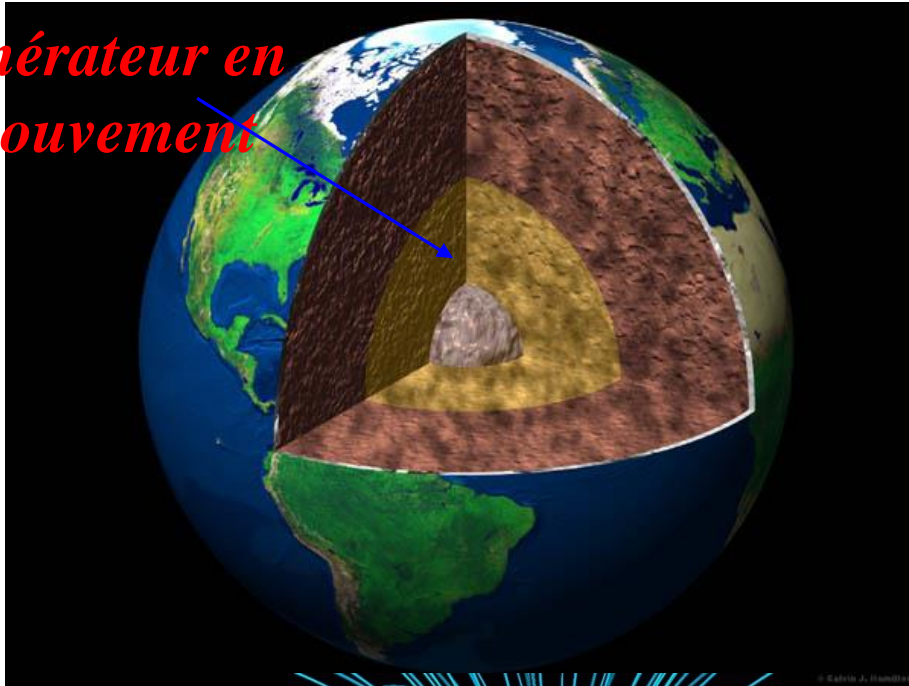




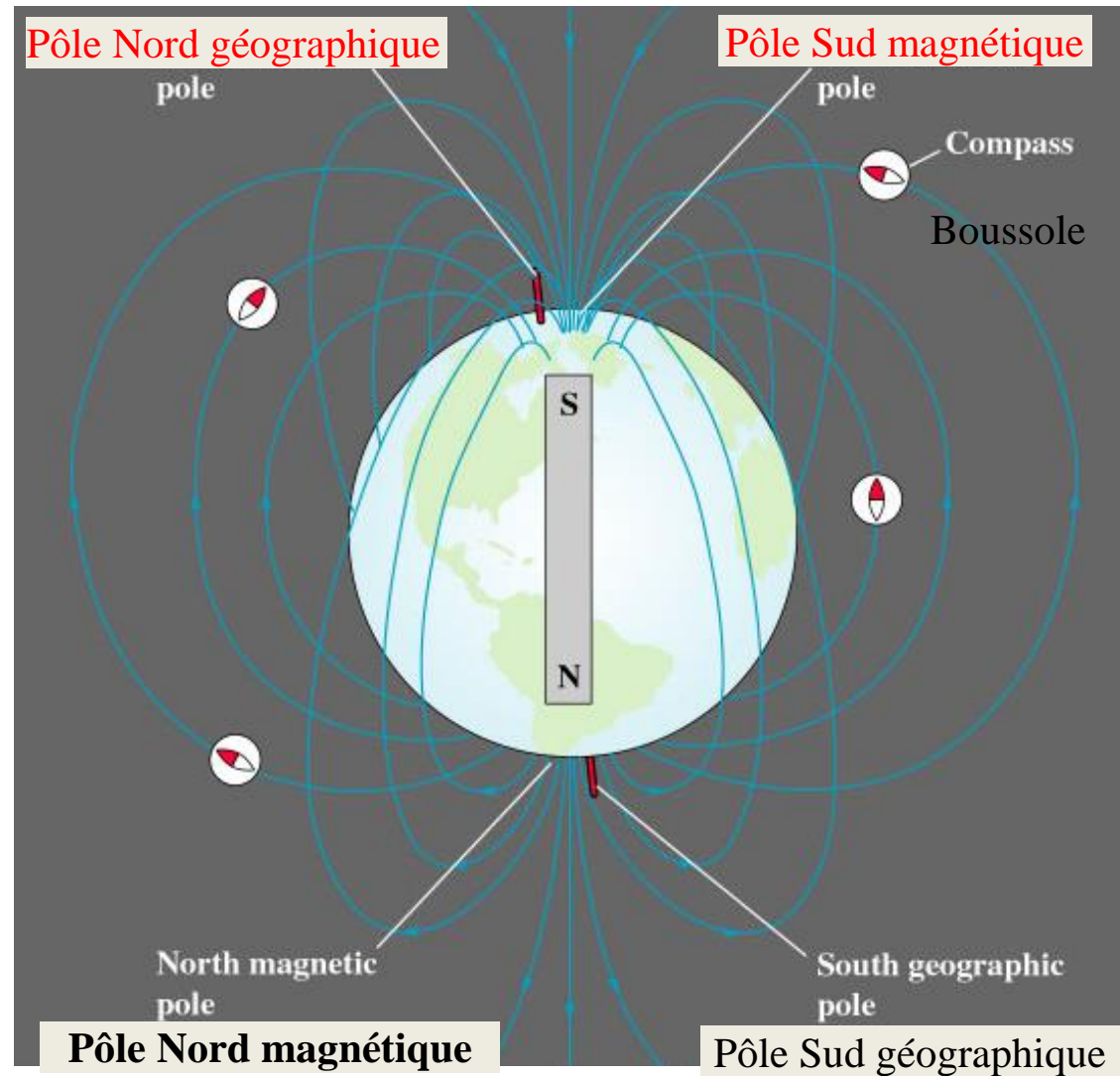
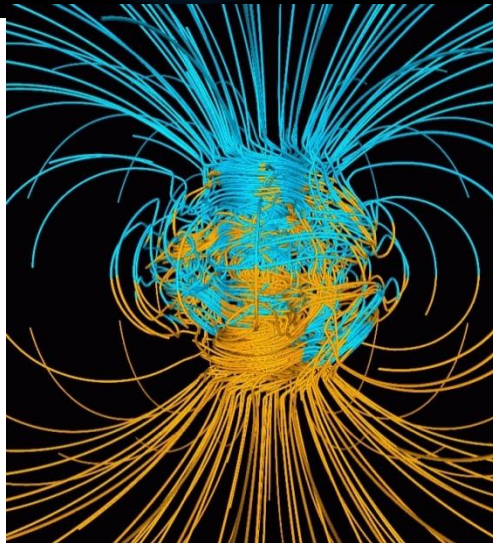
## 6.2. Champ magnétique terrestre

*Trouve son origine dans le mouvement de la matière qui entoure le cœur central*

**Fluide**  
**générateur en**  
**mouvement**



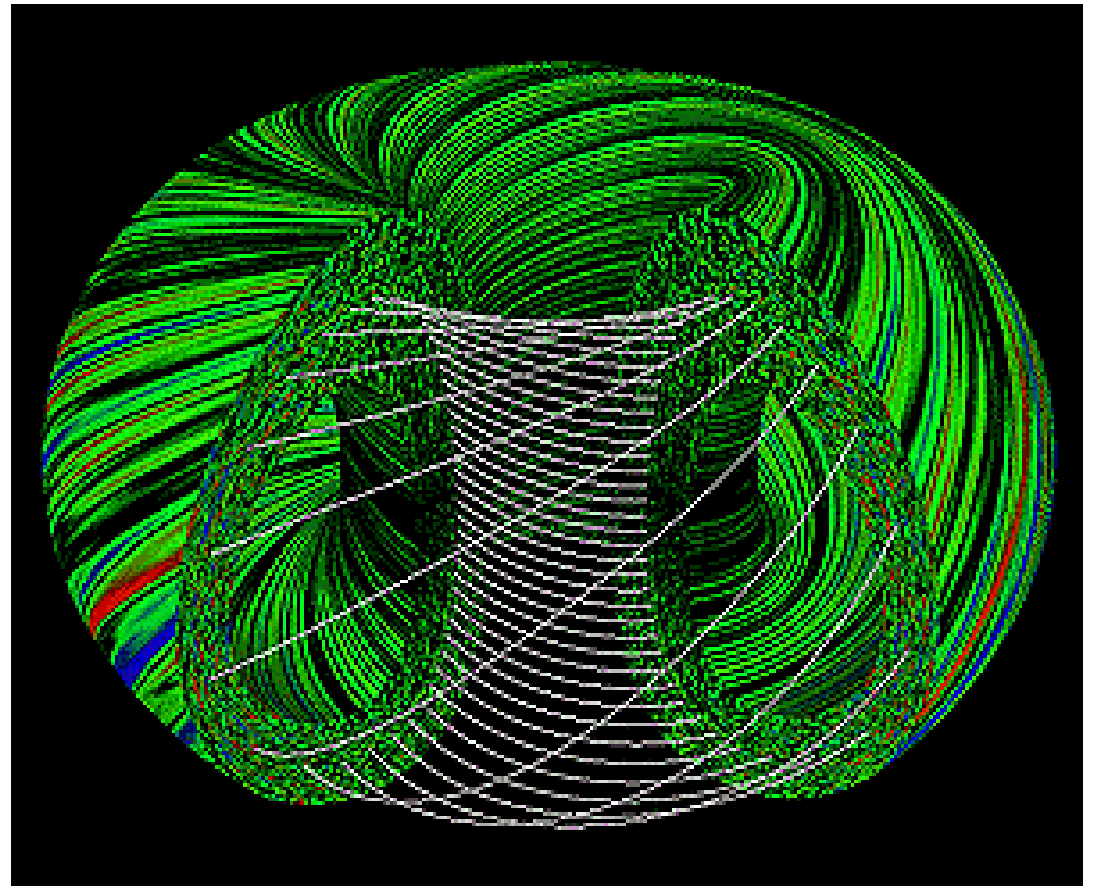
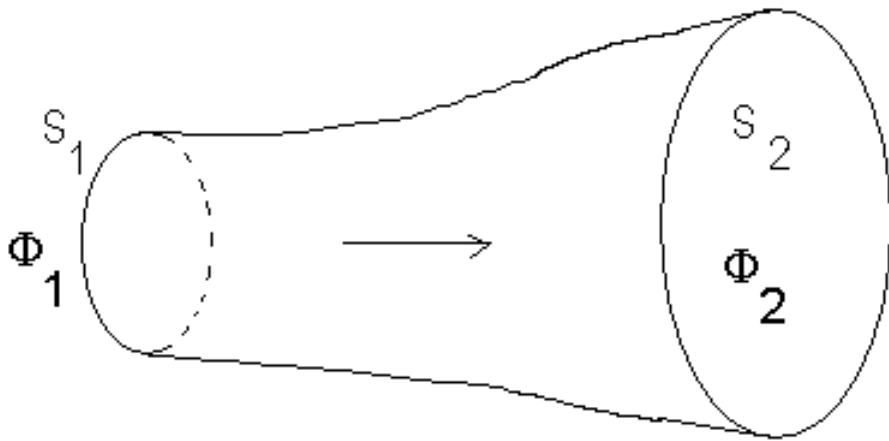
*Simulation*  
*numérique*





### 6.3. Tubes de flux

*Ensemble de lignes de champ formant une sorte de tube à section généralement variable le long duquel le flux est constant*



## 7. Calcul des champs magnétiques

Le champ magnétique peut se calculer analytiquement jusqu'au bout dans des cas très limités. Nous donnons quelques exemples classiques et montrons comment les calculs deviennent moins classiques hors de ces quelques cas d'école.

### 7.1. Exemple n°1: Fil rectiligne très grand

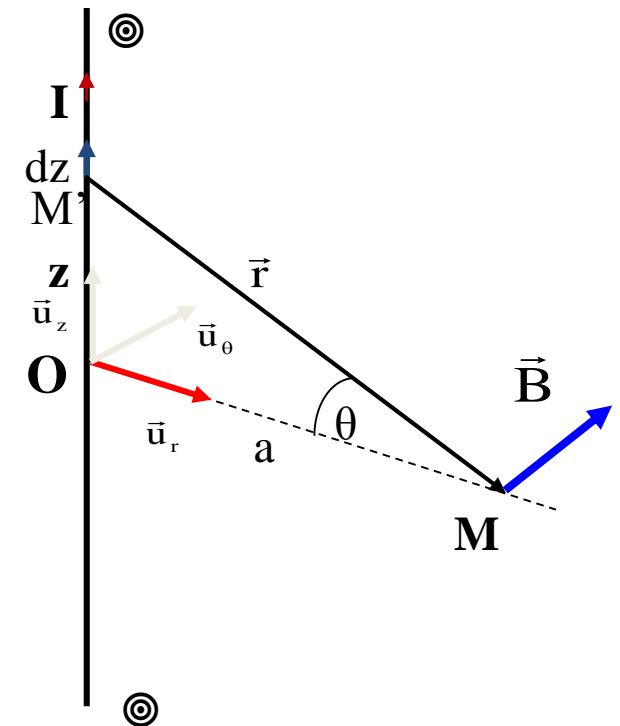
Un fil rectiligne très grand, on dit aussi indéfini pour ne pas dire infini, de section négligeable, est parcouru par un courant  $I$ . Il est nécessaire que le fil se referme sur lui-même par une portion de circuit située quelque part à très grande distance et dont on peut supposer que l'effet au point  $M$  est négligeable. On cherche le champ magnétique à la distance  $a = OM$  du fil. On applique directement la définition à partir de la formule de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left( \vec{\delta\ell} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

Nous avons  $\vec{r} = a\vec{u}_r - z\vec{u}_z$   $\vec{d\ell} = dz\vec{u}_z$   $r = \frac{a}{\cos\theta}$   $z = a.\text{tg}\theta$   $dz = \frac{a}{\cos^2\theta}.d\theta$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{fil}} \left( dz\vec{u}_z \times \frac{a\vec{u}_r - z\vec{u}_z}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \vec{u}_\theta \int_{\text{fil}} \frac{dz}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{u}_\theta \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta d\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$



## 7.2 Exemple 2: Application du théorème d'Ampère

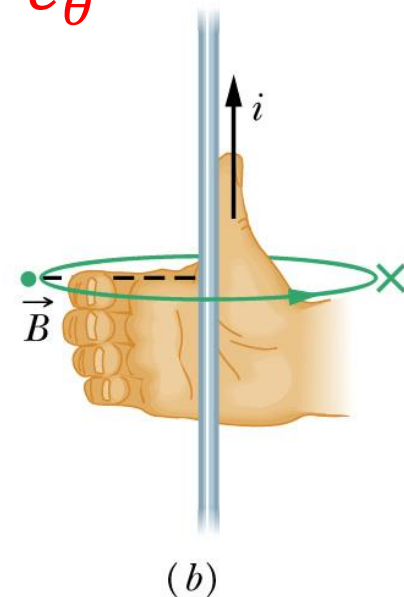
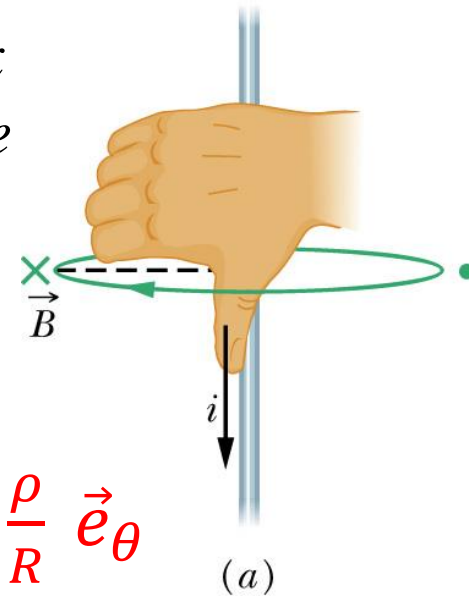
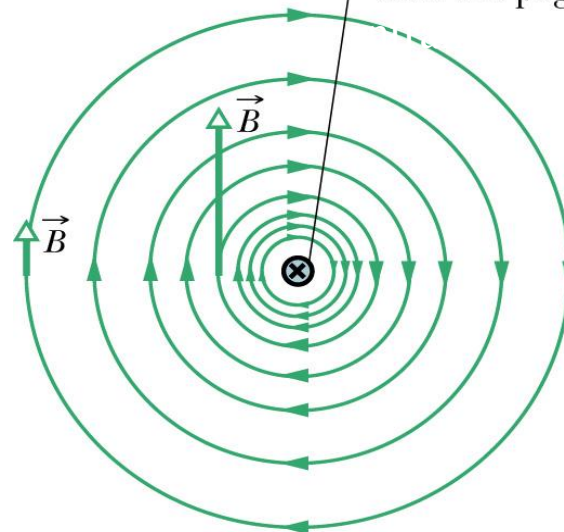
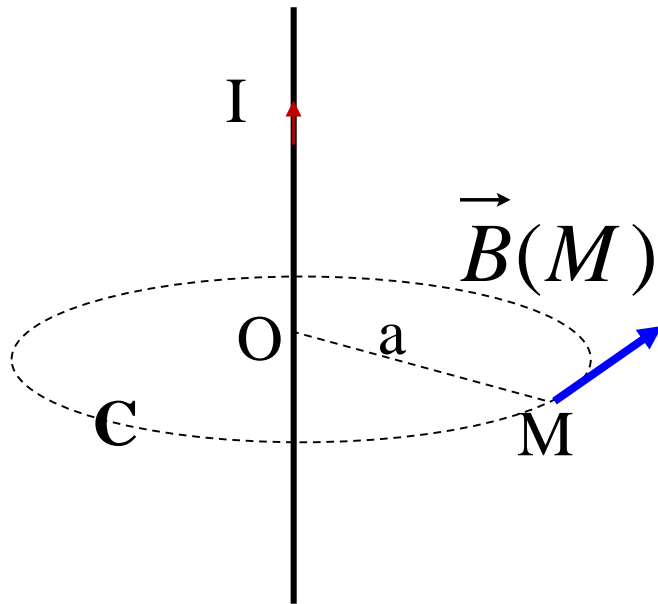
Par symétrie il est facile de montrer que le champ  $B$  est tangent aux cercles centrés sur le fil, de module ne dépendant que de la distance du fil  $HM=a$ .  $H$  est la projection orthogonale de  $M$  sur l'axe  $Z'Z$ .

Soit directement:  $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{\delta\ell} = \vec{B} \oint_C d\ell = \vec{B} \cdot 2\pi a = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}_{int}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\rho}{R} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B}_{ext}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\rho}{R} \vec{e}_\theta$$



### 7.3. Exemple n°3: Cas d'un Fil rectiligne fini

*Une formule très utile est celle d'un fil rectiligne fini. Cette formule sera utilisée dans des cadres carrés comme représentant le champ de chaque côté.*

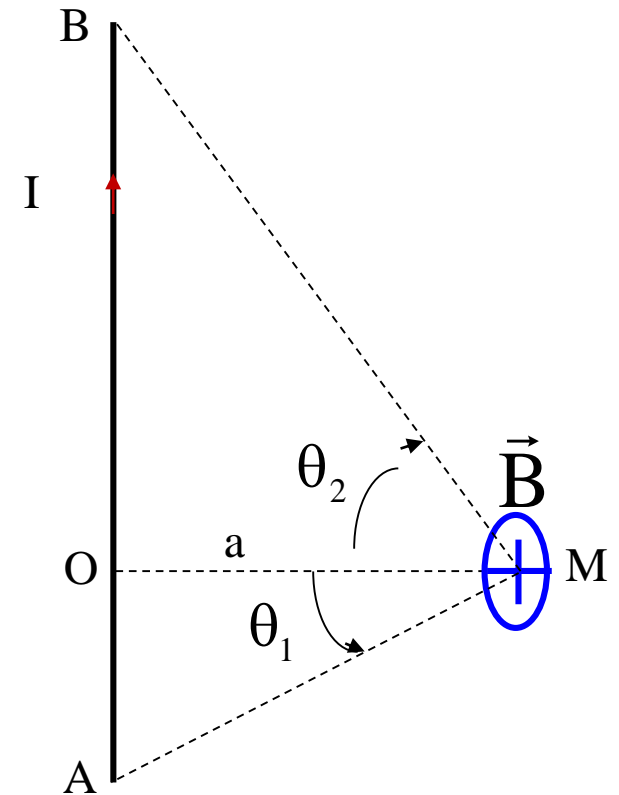
*Le fil est vu à la distance  $a$  sous les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui ont une mesure algébrique. Sur la figure  $\theta_1 < 0$  et  $\theta_2 > 0$ .*

*Le calcul mené pour le fil très long reste valable jusqu'à*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \vec{u}_\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

*Ce qui donne*

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{u}_\theta$$



## 7.4 Exemple n°4: Champ $\vec{B}(M)$ d'une Spire circulaire son axe.

Une spire circulaire filiforme de rayon  $R$  de centre  $O$  est parcourue par un courant  $I$ . On cherche le champ magnétique produit par la spire en un point  $M$  de son axe. On note  $OM = x$ . On utilise la formule de Biot et Savart exprimée par:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{D}(\text{Source})} \left( \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \right)$$

On a  $\vec{PM} = \vec{r}$ ,  $\vec{u}_r = (\vec{r}/r)$  et l'élément source  $d\vec{C} = I d\vec{\ell}$

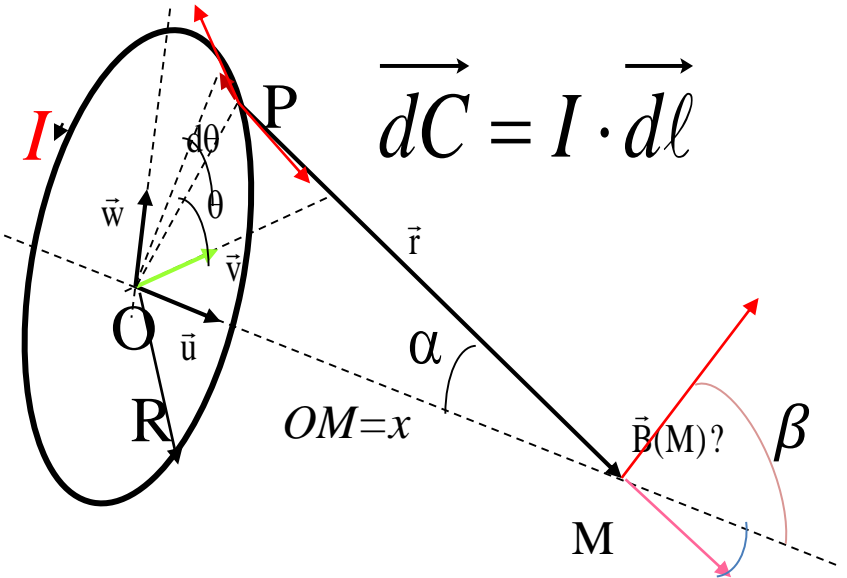
Pour tout point  $P$  de la spire entouré d'un élément  $d\vec{\ell}$  orienté dans le sens du courant on associe l'élément de courant :  $d\vec{C} = I R d\theta \vec{e}_\theta$ . Du point  $M$  la spire est vue sous le cône de demi angle  $\alpha$ .  $\alpha$ ,  $r$  et  $x$  sont constants. Les propriétés de symétrie des sources permettent d'écrire  $\vec{B}(M) = \bar{B}(M) \vec{u}$ ;  $\bar{B}(M) = \bar{B}(\rho, x)$ . La composante utile pour le champ résultant  $\vec{B}_r(M)$ , notée  $d\vec{B}_r = (d\vec{B} \cdot \vec{u}) \vec{u} = d\bar{B}_r(M) \vec{u}$  où  $d\bar{B}_r(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} d\theta \sin \alpha$ .

La variable étant  $\theta \in [0, \pi]$ , le champ résultant en  $M$  :

$$\bar{B}_r(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^2} \sin \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}$$

Sous cette forme la variable  $r$  n'est pas commode. On lui préfère l'expression  $\bar{B}(M) = \bar{B}_r(\rho, x)$  avec  $\rho = R$  ou bien la forme :

$$\vec{B}(M) = B_0 \sin^3(\alpha) \vec{u}$$



### Remarques: sur l'axe d'une spire.

✓ Le champ  $\vec{B}(M)$  produit est porté par l'axe

✓ Au centre :  $\vec{B}(O) = \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}$ .

## Exemple n°4 (suite): Champ magnétique dans le plan d'une spire circulaire

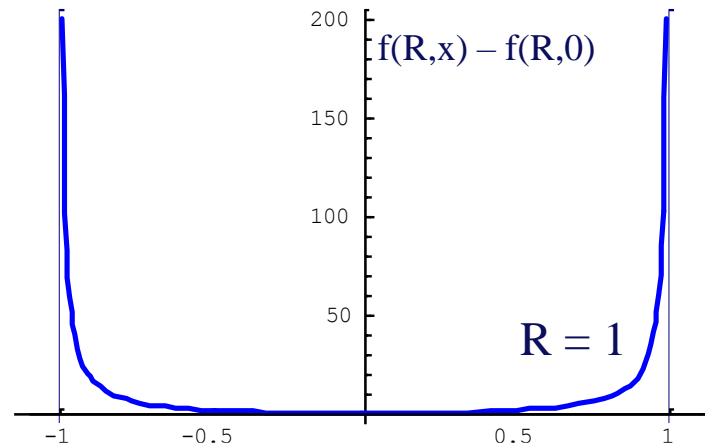
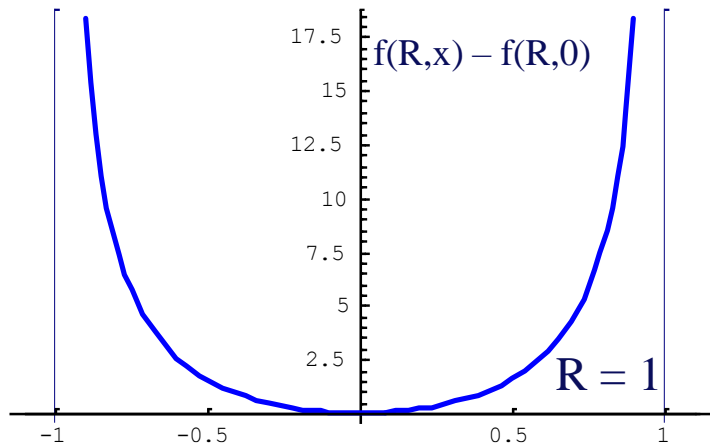
On cherche à estimer le champ en un point  $M$ , à la distance  $x$ , dans le plan de la spire circulaire de rayon  $R$ , parcourue par le courant  $I$ . Ce champ est donné par l'expression

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \left( \vec{d\ell} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad \vec{d\ell} = (-R \sin \theta \vec{v} + R \cos \theta \vec{w}) d\theta$$

$$\vec{r} = (x - R \cos \theta) \vec{v} - R \sin \theta \vec{w}$$

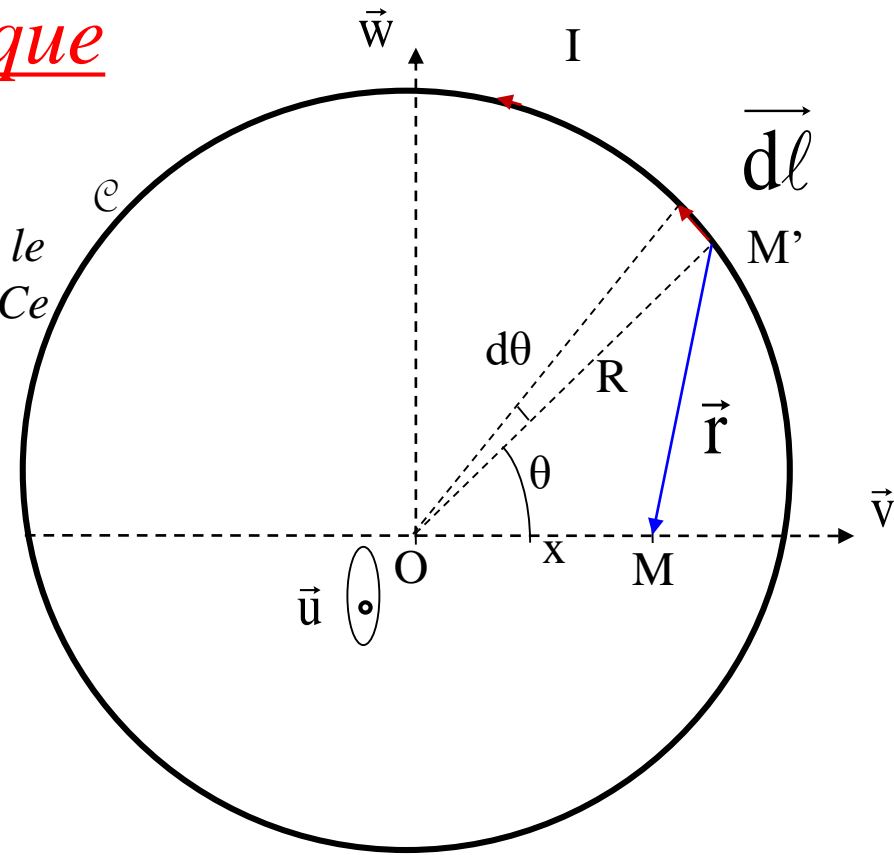
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - x \cos \theta}{(x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \vec{u} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} f(R, x) \vec{u}$$

Cette intégrale n'admet pas de solution analytique simple et fait appel à des fonctions calculables mais pas connues des étudiants de premier cycle.



Deux enseignements sont à tirer de cet exemple:

- ✓ Même dans un système très simple les calculs ne le sont pas
- ✓ Au voisinage du circuit filiforme le champ diverge





## 7.8. Applications: 1- Bobines de Helmholtz

Deux bobines identiques de rayon  $R$ , parcourues par des courants dans le même sens de même axe situées à la distance  $2a$  l'une de l'autre. En utilisant le résultat obtenu pour une spire circulaire le champ magnétique total au point  $M$  de l'axe tel que  $OM = x$  est

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left( \frac{1}{[(a-x)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(a+x)^2 + R^2]^{3/2}} \right)$$

Le champ au centre est donné par

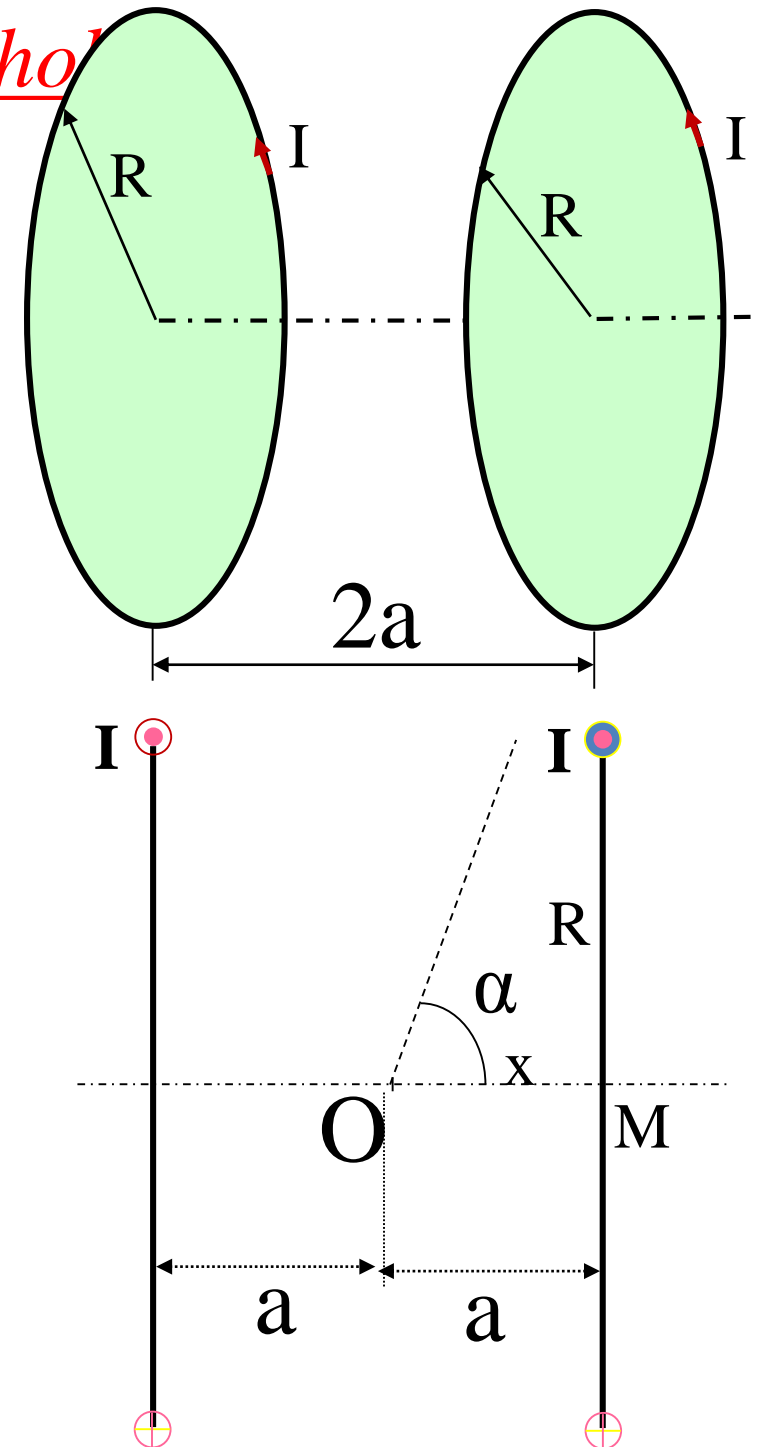
$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{[a^2 + R^2]^{3/2}}$$

Nous cherchons la relation entre  $R$  et  $a$  qui provoque les plus faibles variations du champ au voisinage du centre.

La fonction  $B(x)$  étant paire son développement en série ne comprend que des termes polynomiaux pairs

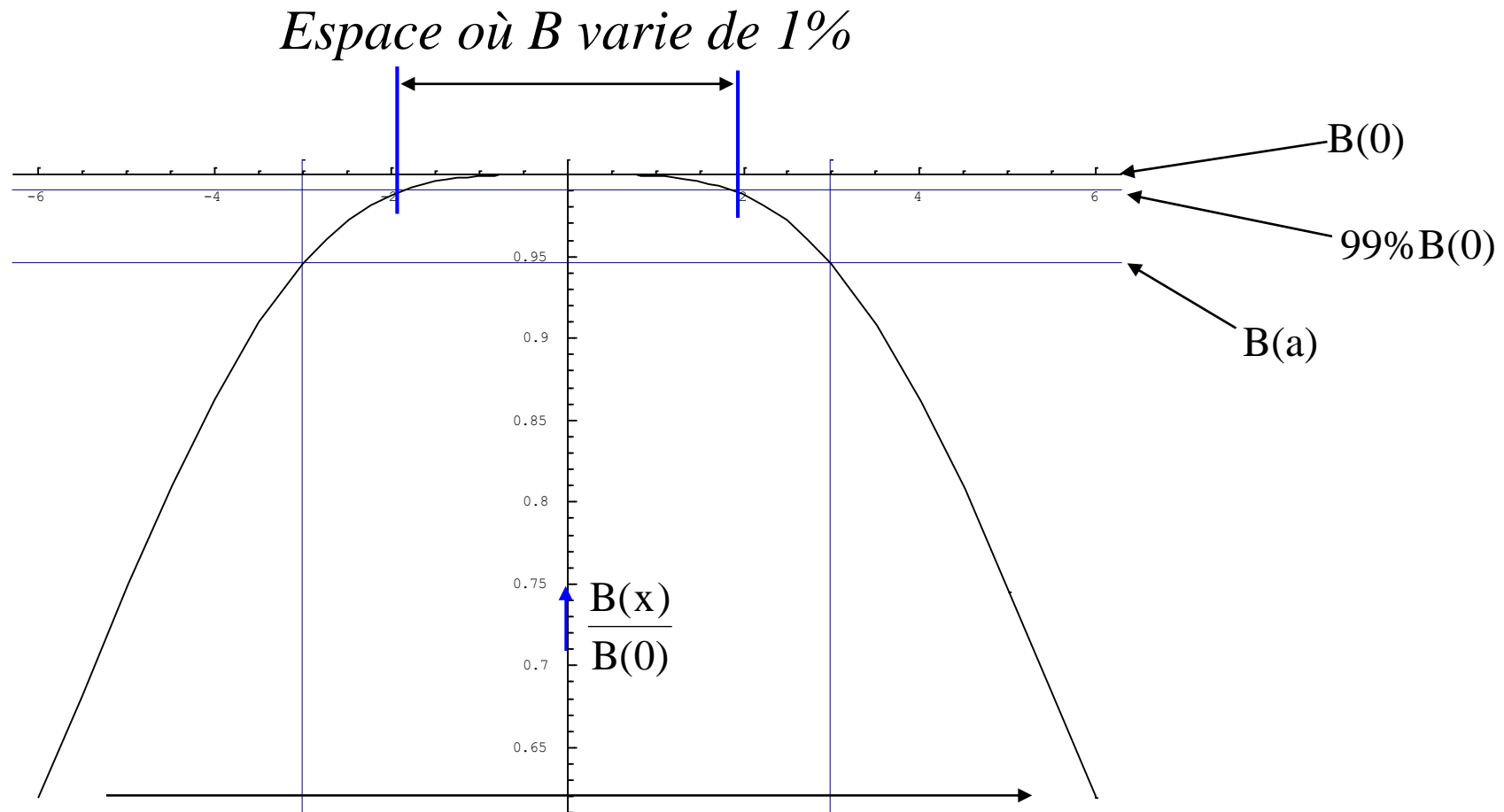
$$B(x) = B(0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + \delta(x^4)$$

La dérivée d'ordre deux s'annule pour  $R = 2a$  (faire le calcul)



## 7.8. Application : Bobines de Helmholtz (suite)

*La fonction  $B(x)$  démarre donc du centre avec ses trois premières dérivées nulles, donc présente un profil très plat.*

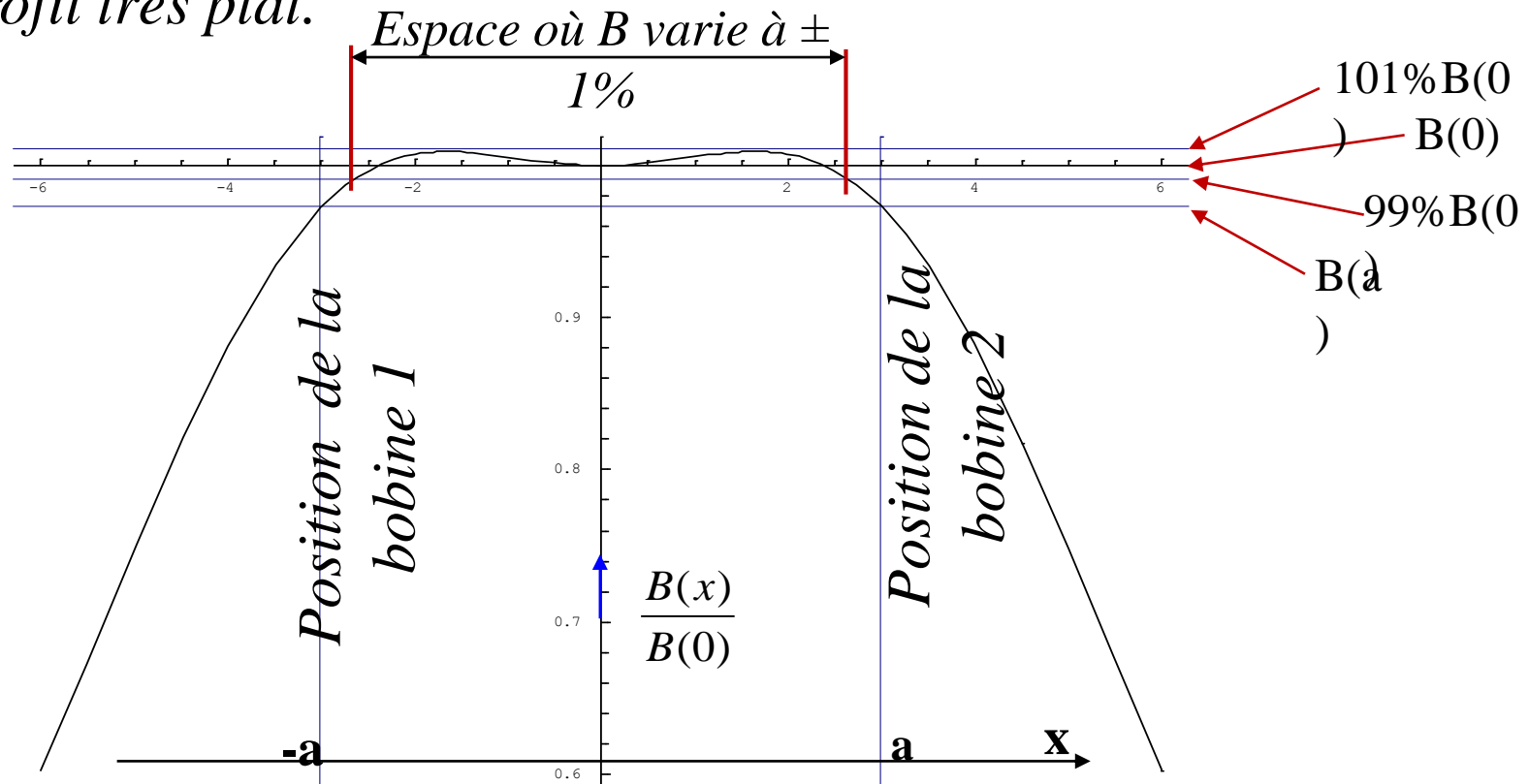


*Cas où la distance entre les bobines ( $d=2a$ ) est  
égale à leur rayon  $R$*

## 7.8. Application: Bobines de Helmholtz (suite)

Si on accepte une fluctuation de  $\pm$  de  $B(x)$  autour de sa valeur centrale il est encore possible d'augmenter la zone de faible variation de  $B$  pour  $R$  voisin de  $9/5$  de  $a$ .

La fonction  $B(x)$  démarre donc avec ses trois premières dérivées nulles; elle présente un profil très plat.



Cas où la distance entre les bobines est égale à  $10/9$  du rayon  $R$

## Exemple n°5: Cas d'un Solénoïde

Soit un solénoïde de rayon  $R$ , longueur  $l$ , de  $N$  spires jointives parcourues chacune par un courant  $i$ . On cherche à calculer le champ magnétique au point  $M$  à la distance  $x$  du centre  $O$ , et duquel les deux extrémités du solénoïde sont vues sous les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . On découpe le solénoïde en tranches de spires circulaires à la distance  $\chi$  de  $O$  et d'épaisseur  $d\chi$ . Une telle spire porte le courant  $dI$ :

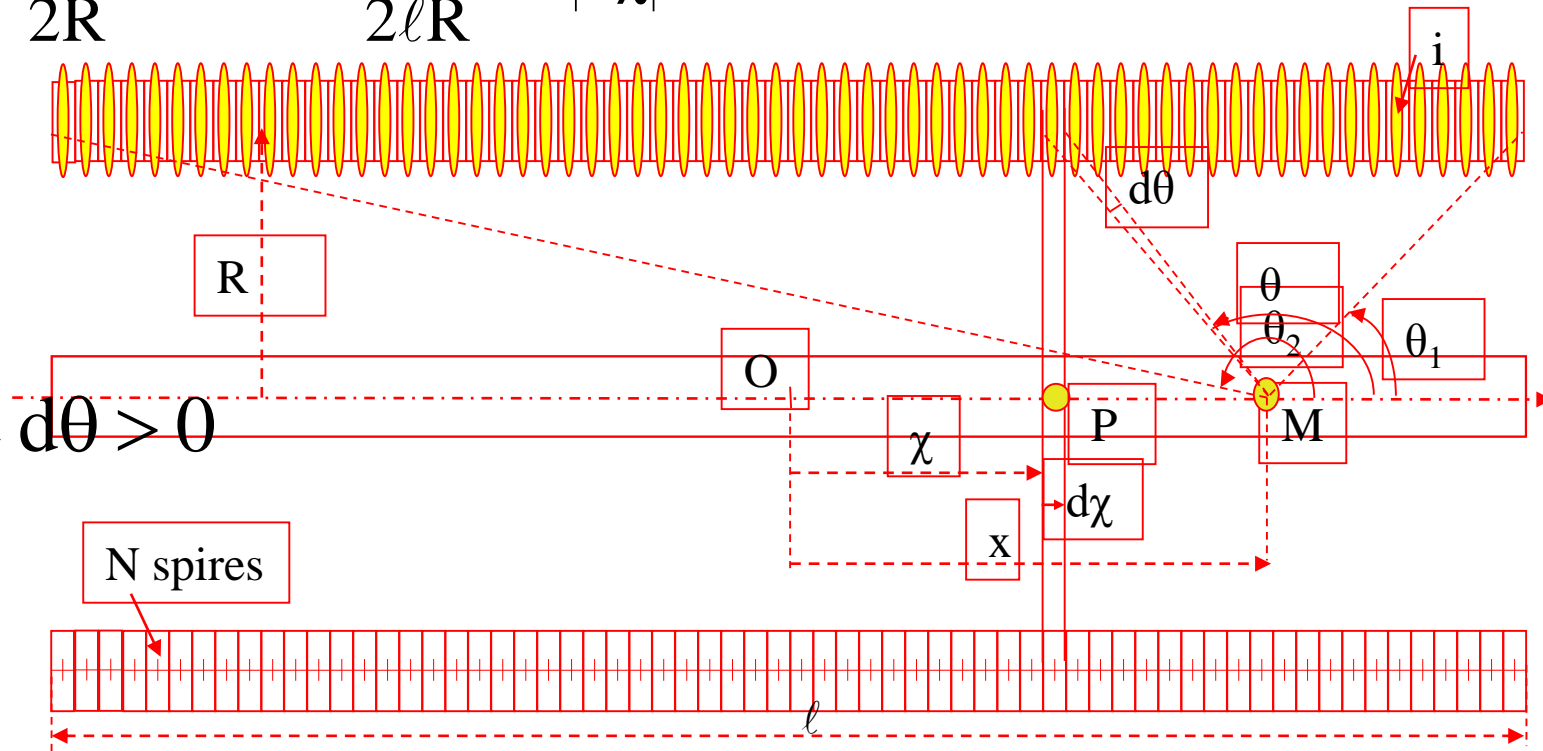
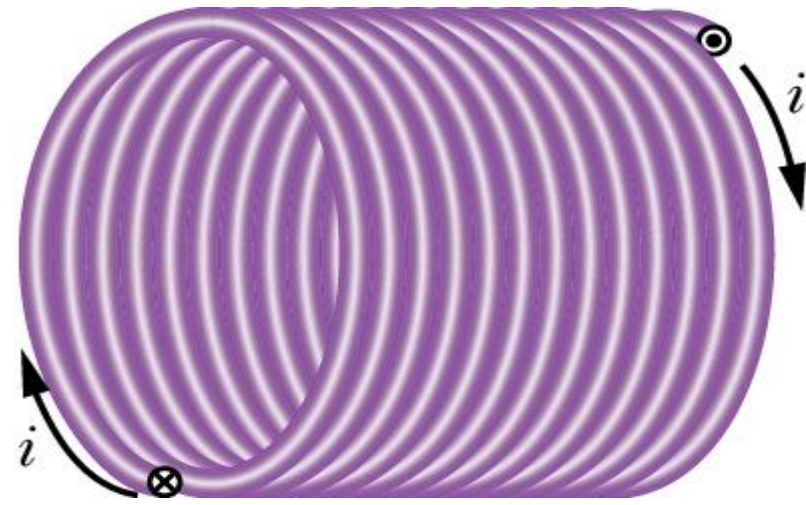
$$dI = \frac{Ni}{\ell} |d\chi| \quad dB = \frac{\mu_0 di \sin^3 \theta}{2R} = \frac{\mu_0 Ni \sin^3 \theta}{2\ell R} |d\chi|$$

Choisissons comme variable d'intégration l'angle  $\theta$  alors:

$$\chi = x - \frac{R}{\tan \theta}$$

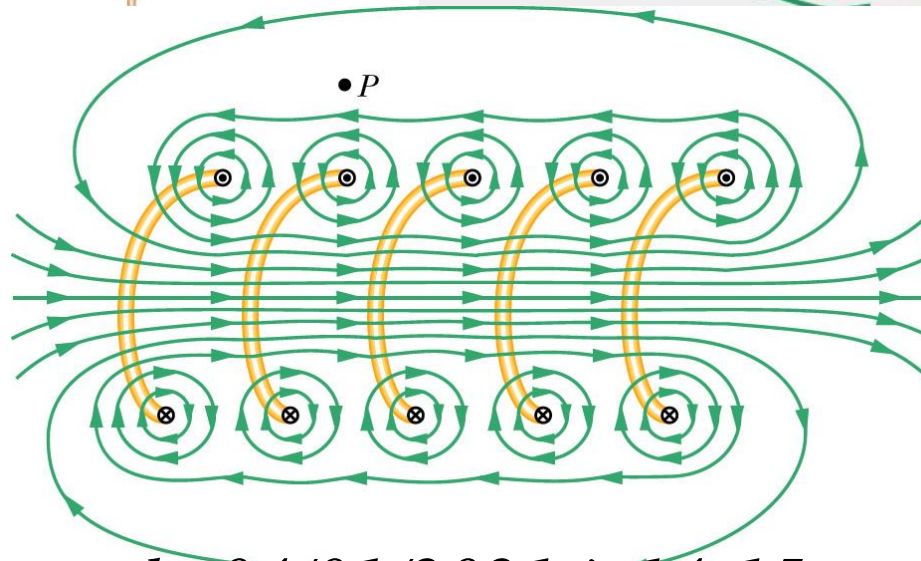
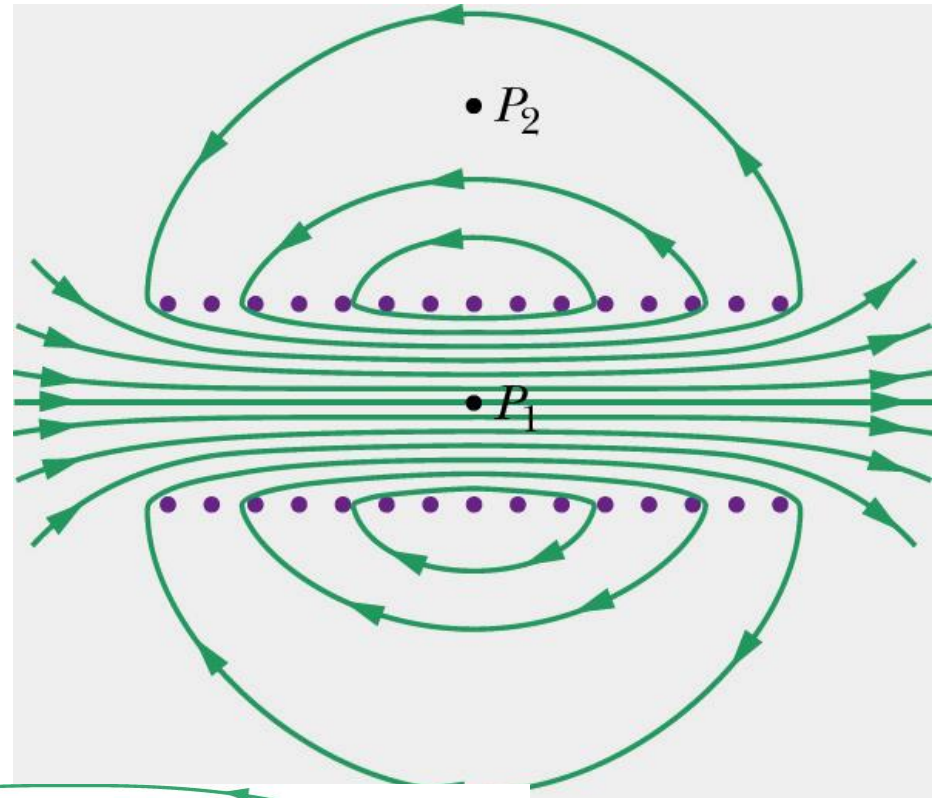
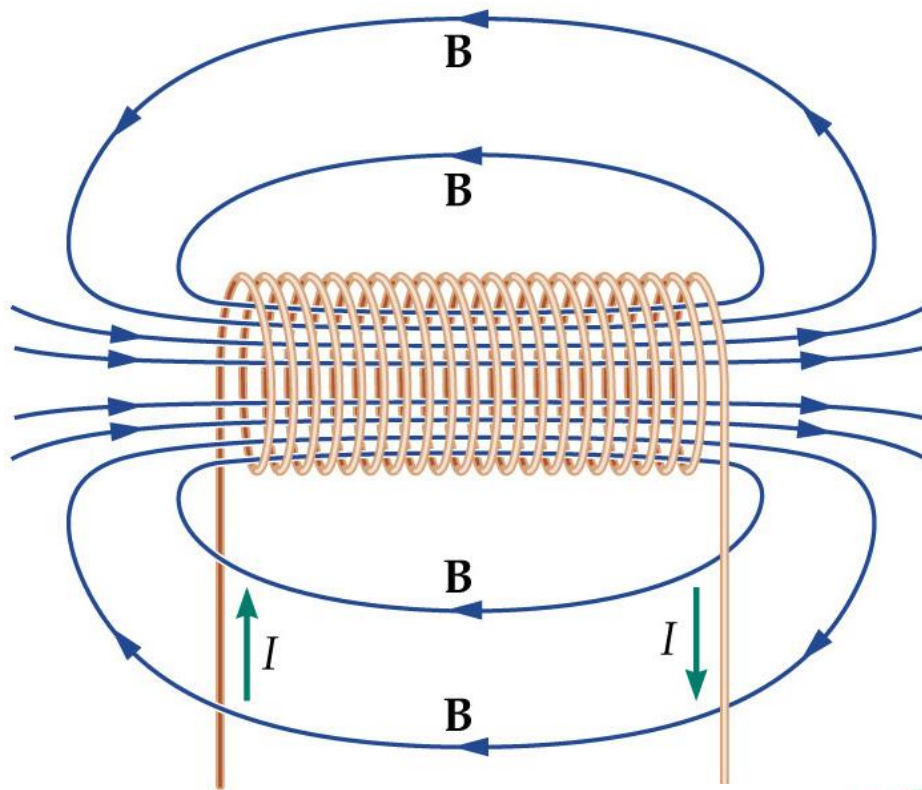
$$|d\chi| = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \text{ avec } d\theta > 0$$

$$dB = \frac{\mu_0 Ni \sin \theta}{2\ell} d\theta$$



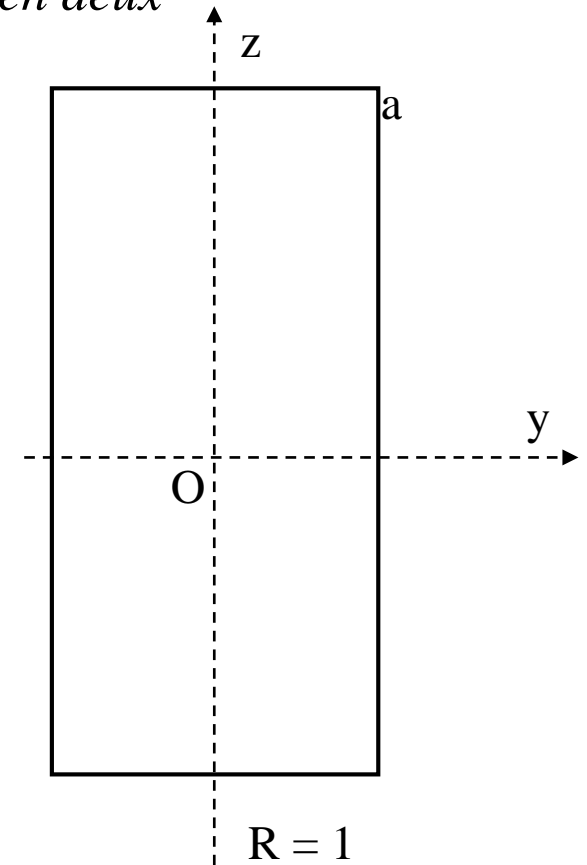
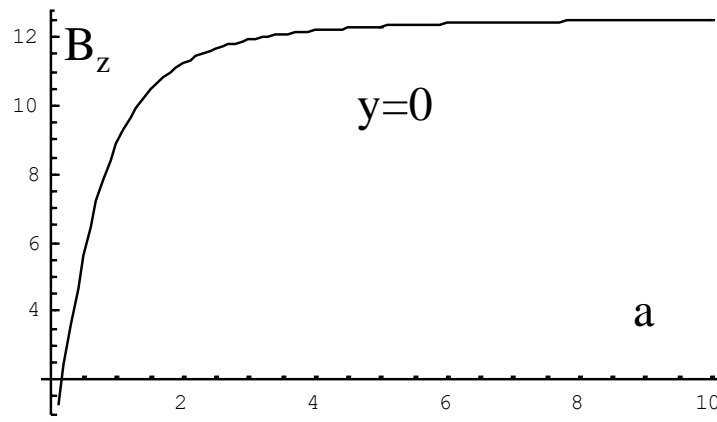
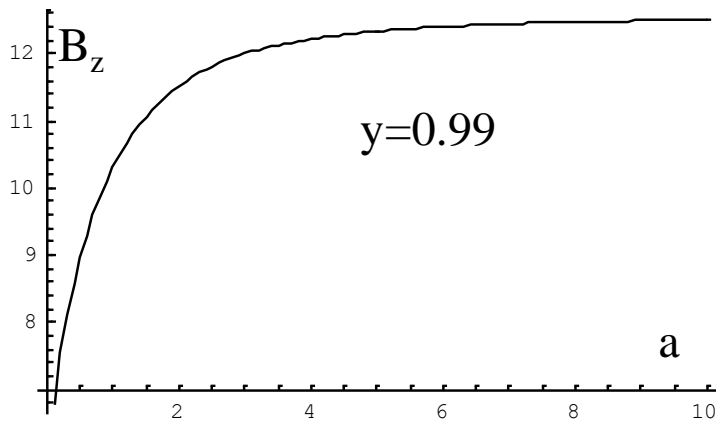
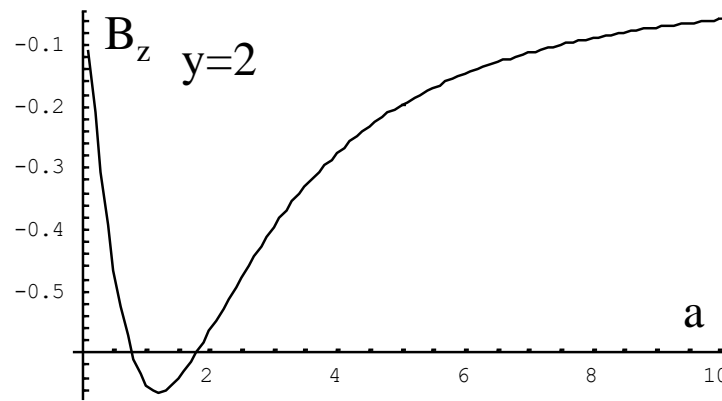
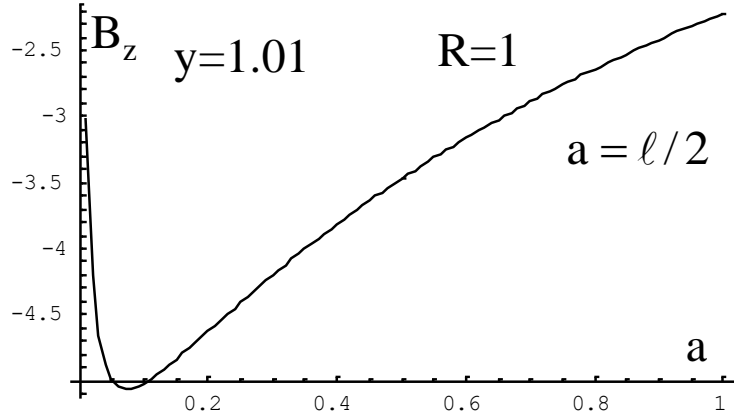
Le champ magnétique Résultant  $\overrightarrow{B(M)} = \frac{\mu_0 Ni}{2\ell} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \overrightarrow{e_z}$ , porté par l'axe du solénoïde.

## Cas d'un Solénoïde (suite)



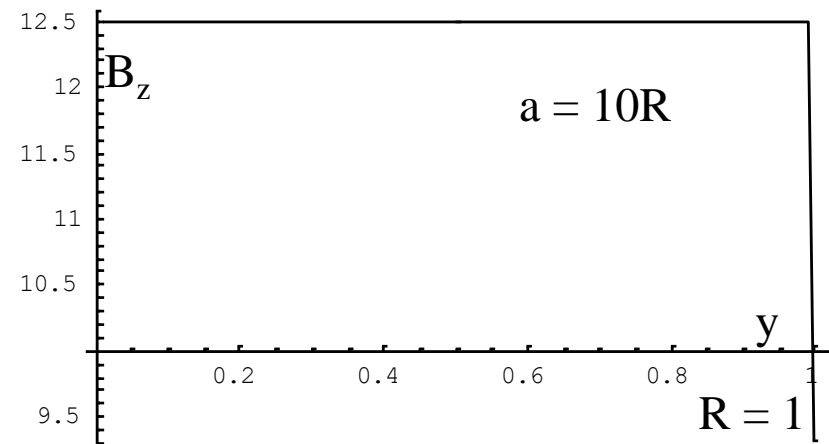
## Cas d'un Solénoïde (suite)

Champ magnétique en  $z$  dans le plan médian qui coupe le solénoïde en deux



On remarque que le champ magnétique à l'extérieur tend vers zéro lorsque le solénoïde devient très long.

Dans le solénoïde le champ magnétique est quasiment constant



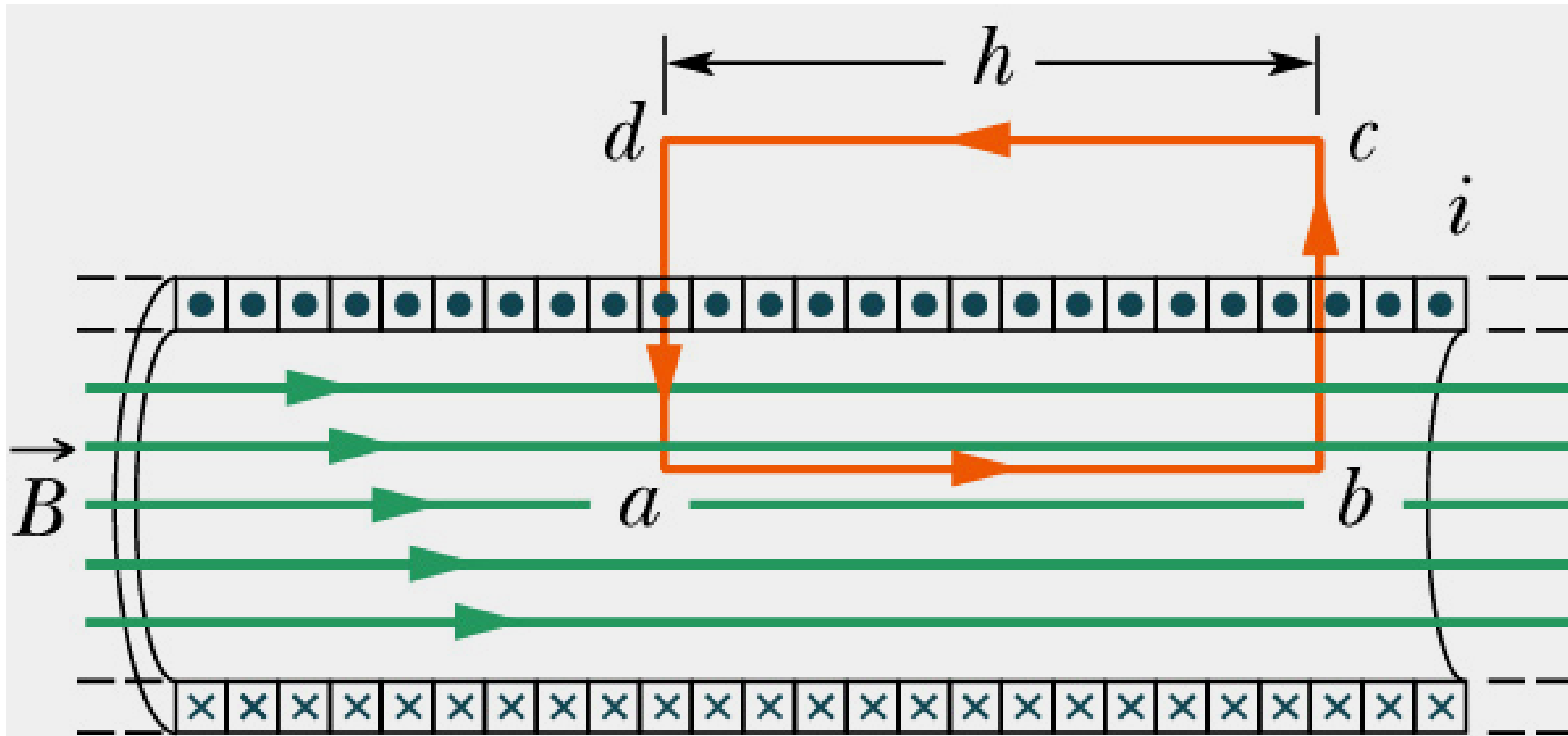


## Cas d'un Solénoïde (suite)

Pour un solénoïde très long à spires jointives  $\theta_1=0$  et  $\theta_2=\pi$  et le champ devient au voisinage du centre  
si  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur

$$B = \frac{\mu_0 N i}{\ell} = \mu_0 n i$$

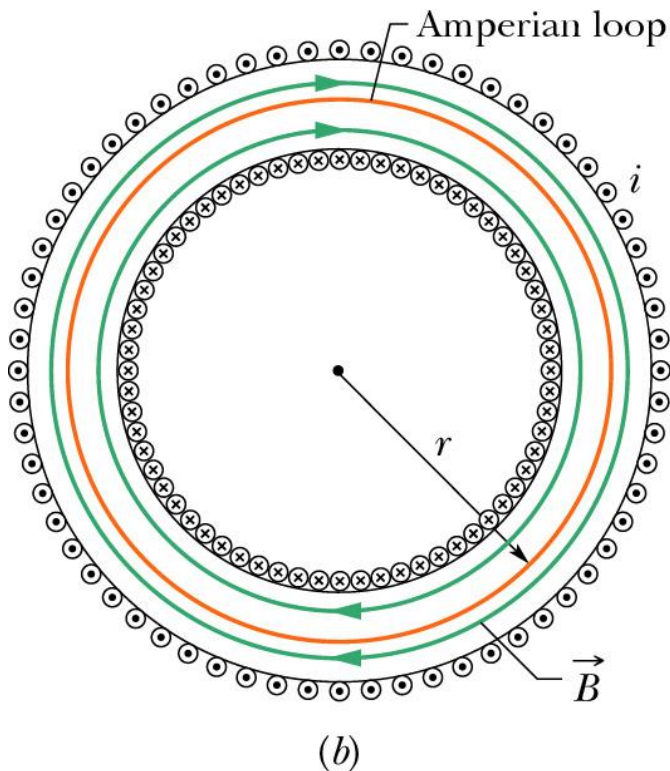
Si on a remarqué que le champ était nul à l'extérieur et constant à l'intérieur, il est possible d'appliquer le théorème d'ampère sur un rectangle  $abcd$  (voir figure) et de retrouver directement le résultat donné ci-dessus.



## Exemple n°6: Cas d'un Tore



(a)



(b)

Champ B dans un tore

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \sum I$$

Contour fermé

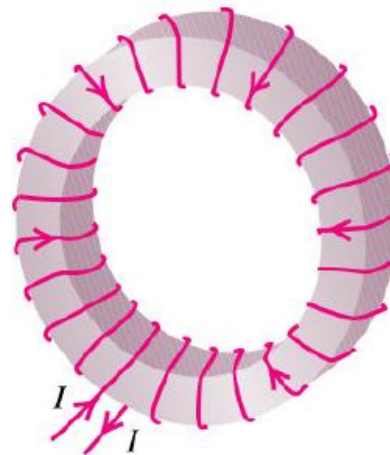
Surface

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

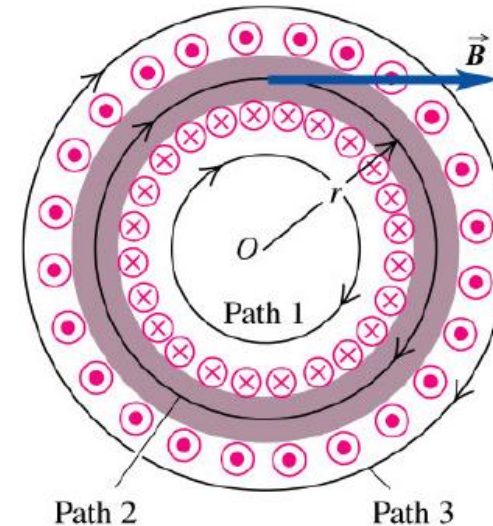


$$B = \mu_0 NI / 2\pi r$$

Pour vide uniquement



(a)



(b)

$$H = NI / 2\pi r$$

OK pour tout matériau uniforme dans le tore

Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

FSAC1430

12

## Exemple n°7: Sphère chargée en surface en rotation

Une sphère de rayon  $R$ , chargée en surface par  $Q > 0$ , tourne à la vitesse angulaire  $\omega = C^{te}$  autour d'un de ses axes. On cherche à déterminer le champ magnétique produit en un point  $M$  de l'axe à la distance  $OM = x$  du centre. Une tranche de sphère perpendiculaire à l'axe définie par les angles  $\theta$  et  $(\theta + d\theta)$  porte une charge:  $dQ = \sigma dS$  où  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$  désigne la densité de charges par unité de surface. La surface élémentaire de révolution autour de l'axe est:  $dS = R d\theta 2\pi R \sin\theta$ .

La spire de rayon  $\rho = 2\pi R \sin\theta$ , ainsi définie porte un courant  $dI$  de part la rotation de cette charge  $dQ$ :

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega dQ}{2\pi} = \frac{\omega \sigma dS}{2\pi} = \frac{\omega Q \sin\theta d\theta}{4\pi}.$$

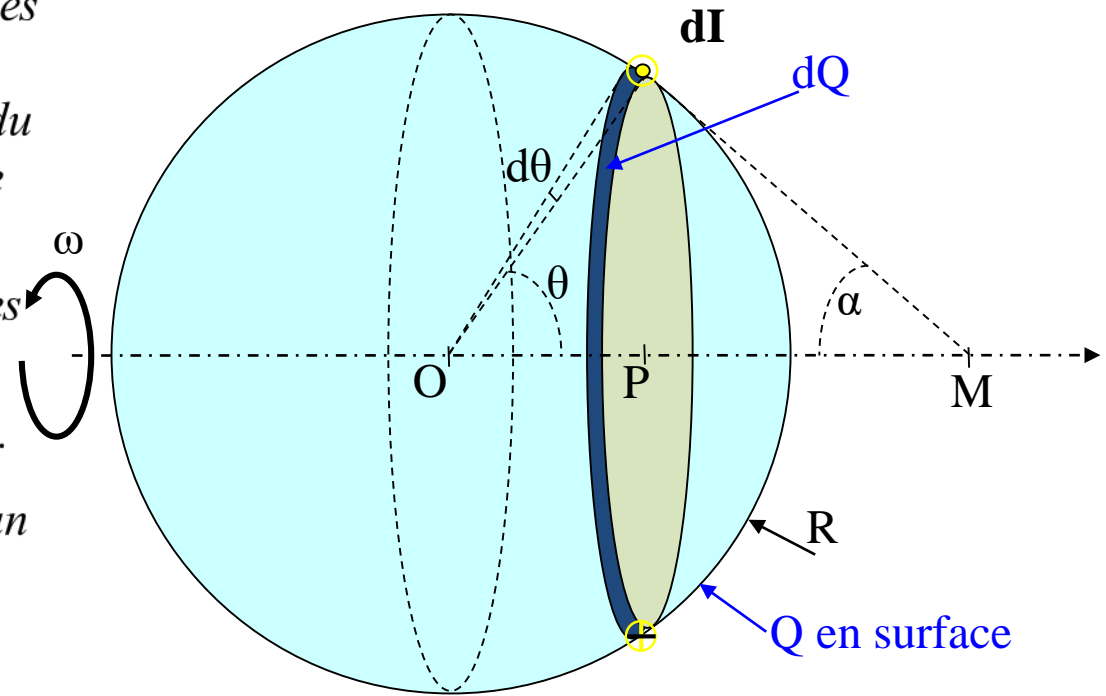
Le champ créé par cette spire au point  $M$  est

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin\theta} \sin^3(\theta) = \frac{\mu_0 \omega Q}{8\pi R} \sin^3(\alpha) d\theta$$

Il est possible d'exprimer  $\sin\alpha = \frac{R \sin\theta}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos\theta}}$

Soit l'intégrale suivante pour le champ

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{8\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$



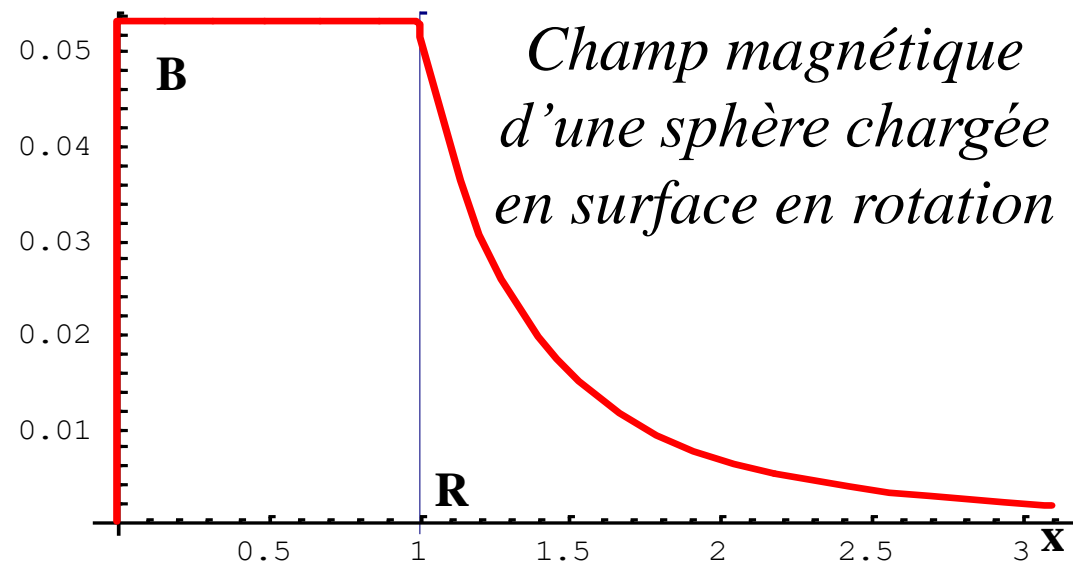
## Exemple n°7- Sphère chargée en surface en rotation (suite)

Après une intégration laborieuse mais du niveau d'un étudiant MIP22 on trouve

✓ Pour  $x > R$   $\overline{B} = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{6 \pi x^3}$  sur l'axe.

$$B = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{6 \pi x^3}$$

✓ Pour  $x < R$   $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q}{6 \pi R}$  sur l'axe.



## N°8- Sphère chargée en volume en rotation

La sphère de rayon  $r$  d'épaisseur  $dr$  porte la charge

$$dQ = \frac{3Q}{4\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$$

Elle crée au point  $M$  tel que  $OM = x$  un champ donné par l'exemple précédent

$$dB(x) = \frac{\mu_0 \omega dQ r^2}{6\pi x^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^3 x^3} r^4 dr$$

Soit pour l'induction totale à l'extérieur de la sphère  $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{10\pi x^3}$

Pour un point  $M$  tel que  $OM = x$  à l'intérieur, deux zones sont à considérer:  $0 < r < x$  et  $x < r < R$

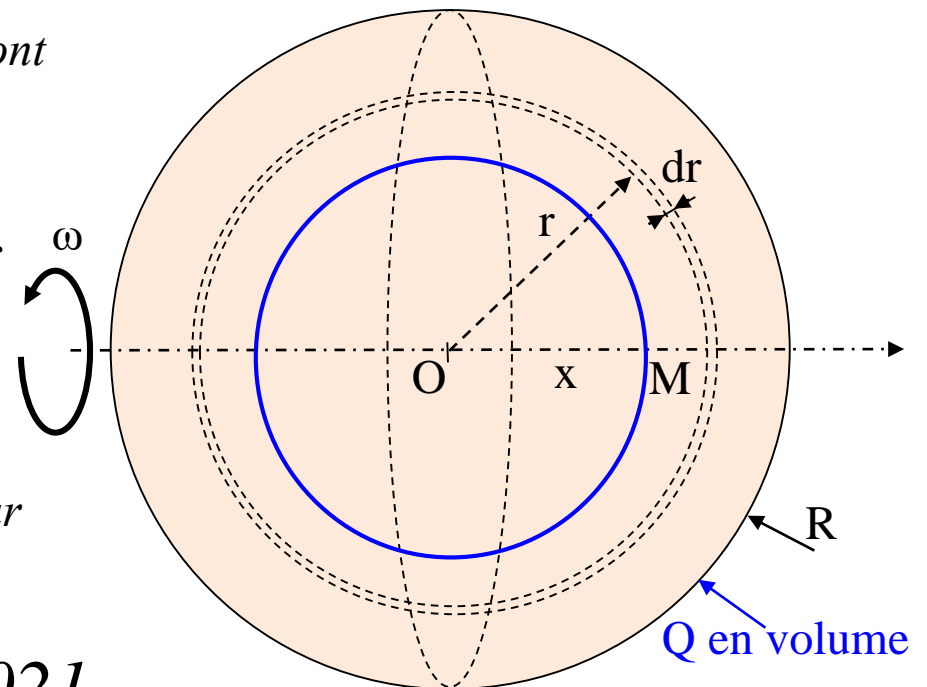
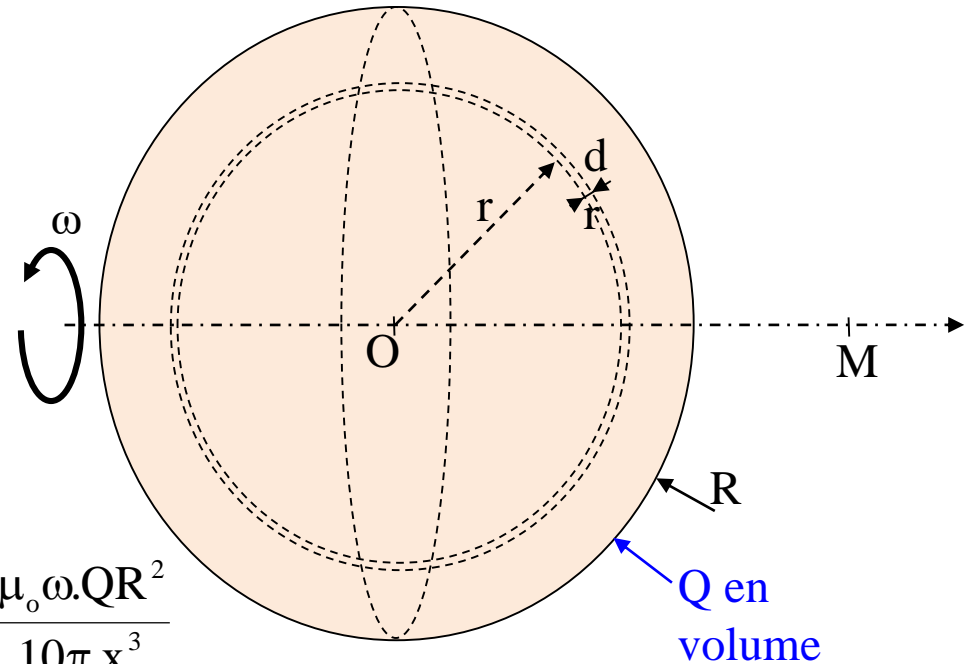
Pour la première zone  $0 < r < x$ , le point  $M$  est considéré comme extérieur et la formule ci-dessus est applicable avec

$$Q \equiv Q(x) = \frac{Q}{R^3} x^3 \quad \text{et} \quad R \equiv x \quad \text{soit} \quad B_1(x) = \frac{\mu_0 \omega Q x^2}{10\pi R^3}$$

Pour la deuxième zone  $x < r < R$ , le point  $M$  est à l'intérieur

de couches sphériques successives, on utilise  $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi R}$

FST- Settati MIP22 Séance du 06/01/2021.



## N°8- Sphère chargée en volume en rotation (suite)

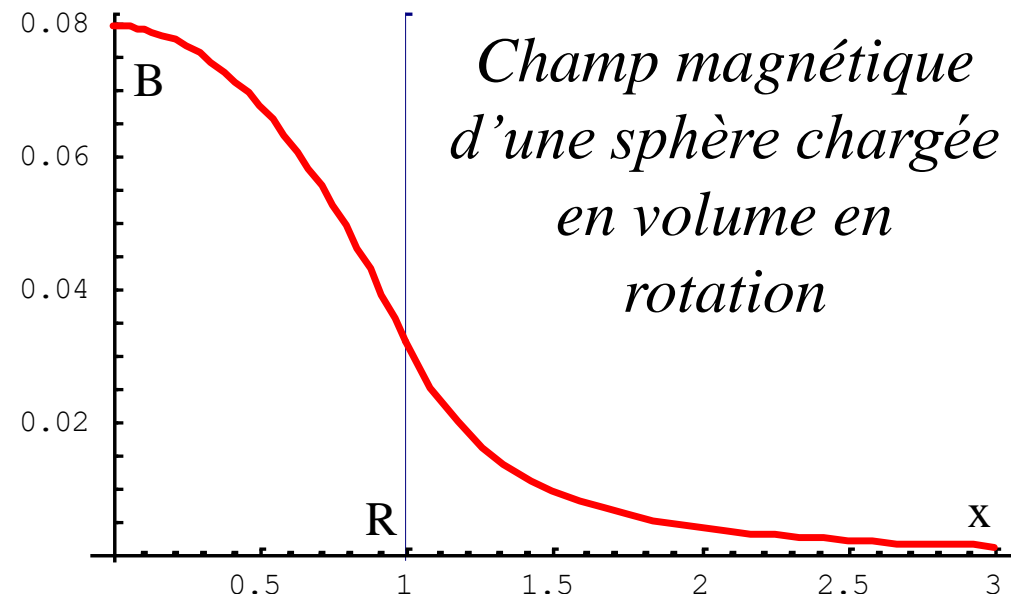
Avec  $Q \equiv dQ = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$  et  $R \equiv r$  il vient  $dB_2(x) = \frac{\mu_0 \omega dQ}{6\pi r} = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi} \frac{Q}{R^3} r dr$

Soit  $B_2(x) = \frac{\mu_0 \omega}{2\pi} \frac{Q}{R^3} \int_x^R r dr = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \frac{Q}{R^3} (R^2 - x^2)$

Le champ magnétique total à l'intérieur s'écrit  $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q x^2}{10\pi R^3} + \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \frac{Q}{R^3} (R^2 - x^2) = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R^3} \left( \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right)$

Aussi pour  $0 < r < R$   $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi R^3} \left( R^2 - \frac{3x^2}{5} \right)$

Pour  $x > R$   $B(x) = \frac{\mu_0 \omega Q R^2}{10\pi x^3}$





# Opérateurs différentiels

$$\oiint_{S_{\overrightarrow{ext.}}} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau(S)} \text{div} \vec{A} \, d\tau = 0 \rightarrow \text{div} \vec{A} = 0 \quad \oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

## 1. Gradient d'une fonction de point

**1.1. Définition.** Soit une fonction de point  $f(M)$ , c.à.d. une fonction scalaire attachée à tout point  $M$  d'un domaine donné.

Dans un repère (Oxyz) la différentielle totale de la fonction  $f(M)$  s'écrit:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \text{ qu'on peut noter sous la forme: } \underline{df \equiv \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM}}$$

où  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ , vecteur gradient de la fonction  $f$ , de composantes (dans le repère Oxyz):  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , et  $\overrightarrow{dM}$  de composantes  $(dx, dy, dz)$  est la différentielle du rayon vecteur de  $M$ . La deuxième relation exprimant  $df$  nous assure de l'unicité du vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  et nous fournit par ailleurs une définition de ce vecteur indépendante du système de coordonnées utilisé.

## 1.2. Expression du gradient en coordonnées Polaires.

Dans ce système de coordonnées

un point  $M$  du plan sera repéré par le couple  $(r, \theta)$ . Du vecteur position  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$  on tire  $\overrightarrow{dM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$  où  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont les vecteurs unitaires de  $OM$  et de l'axe perpendiculaire d'où:  $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} = ((\overrightarrow{\text{grad}} f)_r dr + (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta \cdot r d\theta = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta.$

# Gradient en coordonnées cylindriques

- Par conséquent les composantes du  $\overrightarrow{\text{grad}}$  en coordonnées polaires:

$$(\overrightarrow{\text{grad}} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \text{ et } (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Que l'on peut exprimer en coordonnées cylindriques:

$$(\overrightarrow{\text{grad}} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} ; (\overrightarrow{\text{grad}} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \text{ et } (\overrightarrow{\text{grad}} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$