SiuML

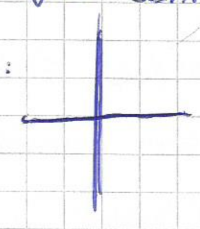
Blatt 6

6.3

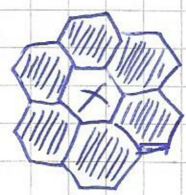
- Quadratisch:
  - + Sensorelemente sind quadratisch
  - + Das Bild ist rechteckig
  - + Kanten können genau definiert werden
  - + Das Bild kann mit den Quadraten komplett ausgefüllt werden
  - + Adressierung ist klar
  - + Eindeutige Abbildung auf Matrizen
  - − Keine eindeutige Nachbarschaftsbeziehung

  - − Darstellung von schrägen Linien

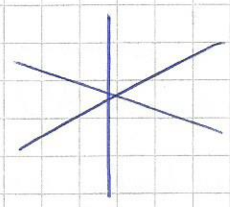
↳ Darstellbar:



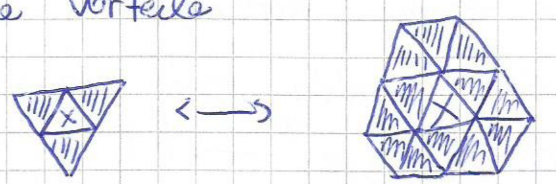
- Hexagonal:
  - + Die Nachbarschaftsbeziehung ist eindeutig



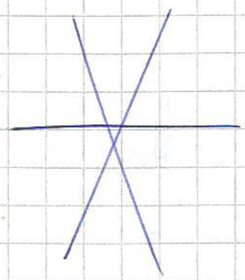
  - + Darstellbare Linien:



- Dreickig:
  - − keine Vorteile

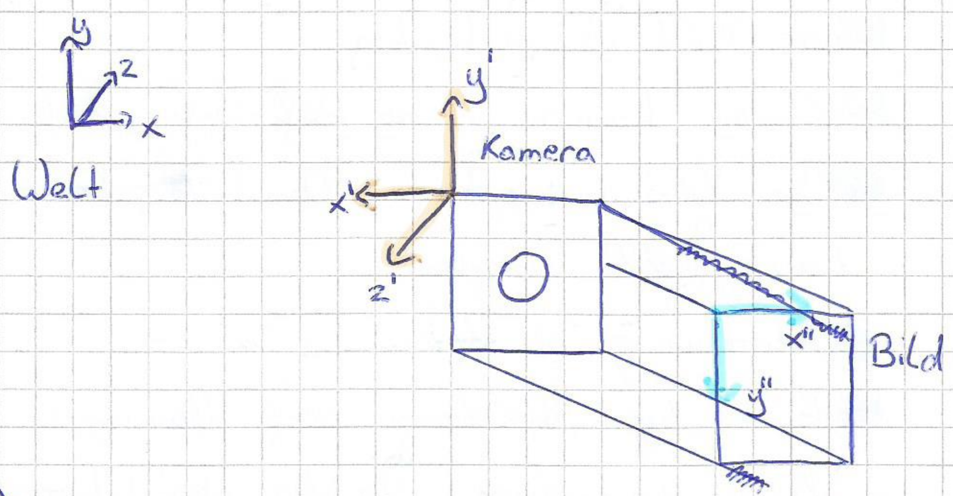


- Darstellbare Linien:



6.1

1)



2)

- Orthogonalprojektion:
  - Abbildung eines 3D-Systems auf ein 2D-System
  - Parallele Linien in 3D bleiben auch in der Abbildung parallel => keine Verzerrung
  - Dritte Dimension wird verworfen
  - Abb. eines Objekt ist unabhängig von der Entfernung zur Abbildungsebene
  - Formel: $(x, y, z)^T \rightarrow (x, y)^T$

- Zentralprojektion / perspektivische Projektion
  - Abb. eines 3D-Systems auf ein 2D-System
  - Perspektiven werden mit abgebildet
  - Parallele Linien treffen sich im Bild in einem Punkt (Horizont)
  - Entfernte Objekte sind kleiner
  - Formel: $(x, y, z)^T \longrightarrow \left(f\,\frac{x}{z},\ f\,\frac{y}{z}\right)$

f: Brennwert

3) Orthogonalprojektion keine Perspektive
$\Rightarrow$ Tiefe des Punktes bzgl. Kamera ist irrelevant

4) 3D-Punkt: $A = [X, Y, Z]^T$ in homogenen Koordinaten:

$$[XT, YT, ZT, T]^T$$

2D-Punkt: $a = [x, y]^T$ in homogenen Koordinaten:

$$[xt, yt, t]^T$$

$$P = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (Zentralprojektion)

$$a = PA = \begin{pmatrix} fXT \\ fYT \\ ZT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\frac{X}{Z} \\ f\frac{Y}{Z} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(f\frac{X}{Z}, f\frac{Y}{Z}\right)$$

$$P_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Orthogonalprojektion)

Kein Parameter f, da der Abstand von Bildebene zum Hauptpunkt keine Rolle spielt.
X- und Y-Koordinaten entsprechen im Bild den realen

$$P_O A = \begin{pmatrix} XT \\ YT \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (X, Y)^T$$

6.2

1) Punkt in der realen Welt: $(X, Y, Z)^T$
Punkt in der realen Welt: $(X', Y', Z')^T =$
$= (2X, 2Y, 2Z)^T$

Die Kamera unterliegt keiner Änderungen,
es gilt: $(X, Y, Z)^T \to \left(f\frac{x}{z}, f\frac{y}{z}\right)$

$$(X', Y', Z') \Rightarrow \left(f\frac{x'}{z'}, f\frac{y'}{z'}\right) = \left(f\frac{2x}{2z}, f\frac{2y}{2z}\right) =$$
$$= \left(f\frac{x}{z}, f\frac{y}{z}\right)$$

$\Rightarrow$ Das Bild sieht genau gleich aus, da sich f nicht ändert

$\Rightarrow$ Aus der Abb. allein kann nicht mehr auf die Größe der abbg. Welt geschlossen werden

2) a) $M = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P = (6, 10, 18)^T_{eukl.} \rightsquigarrow (6, 10, 18, 1)^T_{hom} = P_h$$

$$P_h' = M \cdot P_h = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6f \\ 10f \\ 18 \end{pmatrix} \text{ (homogen)}$$

$$P_h' = \left(\frac{6}{18}f, \frac{10}{18}f\right)^T = \left(\frac{f}{3}, \frac{5f}{9}\right)^T \text{ (euklidisch)}$$

Vorteile:
- Abb-Prozess kann als Matrixmultiplikation realisiert werden
- Skalierung eines homogenen Punktes führt immer zum gleichen eukl. Punkt

$\rightarrow$ Z im Nenner der Abb. lässt sich eliminieren

- Punkte, die im euklidischen Raum nicht darstellbar sind, sind darstellbar ($z.B.$ $(1,1,1,0)^T$) $\Rightarrow$ Punkte im Unendlichen sind darstellbar

b)

$$W = (1,1,1,0)^T$$

$$M \cdot W = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ f \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \text{(euklidisch)}$$

Welche Punkte werden auf $(f,f)^T$ abbgebildet?

Damit ein euklidischer Punkt auf $(f,f)^T$ abgebildet wird, muss gelten:

$$(f,f)^T = \left(f\frac{X}{Z}, f\frac{Y}{Z}\right)$$

$\Rightarrow f\frac{X}{Z} = f$ und $f\frac{Y}{Z} = f$, also muss gelten

$\frac{X}{Z} = \frac{Y}{Z} = 1$ und somit $X = Y = Z \neq 0$

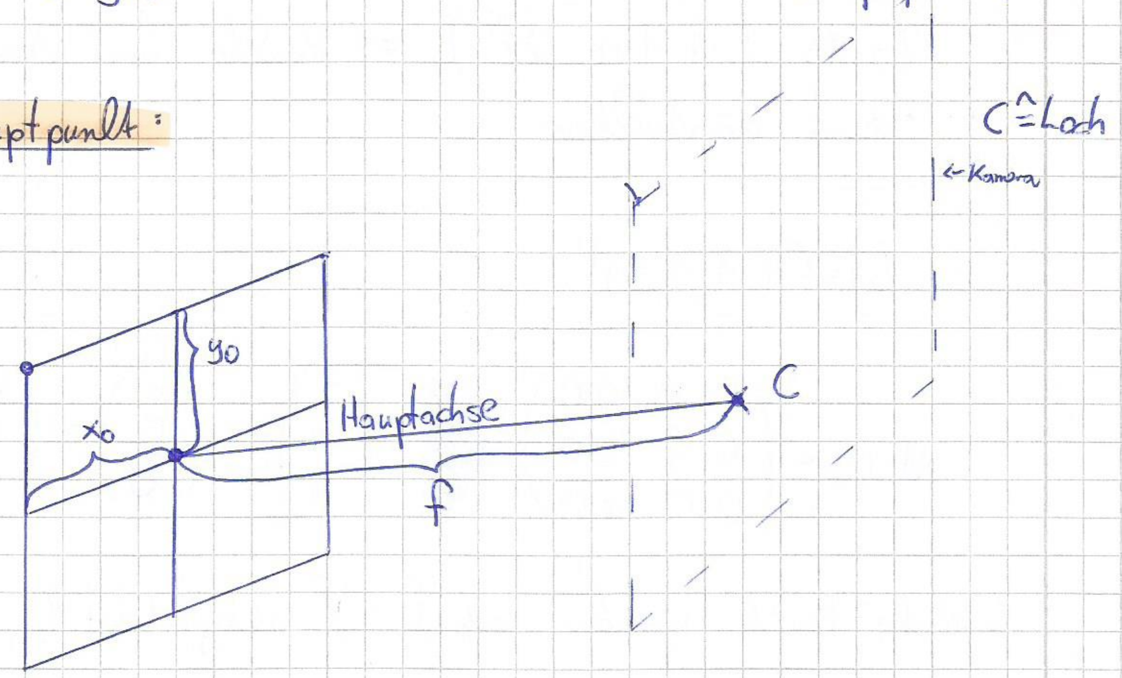
$\Rightarrow$ Alle eukl. Punkte $[X,Y,Z]^T$ mit $X=Y=Z\neq 0$ werden auf $[f,f]^T$ abbgebildet.

3)

22.: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

(x_0, y_0) sind die Koordinaten des Hauptpunktes

Hauptpunkt:



Veränderung der Brennweite um Δf:

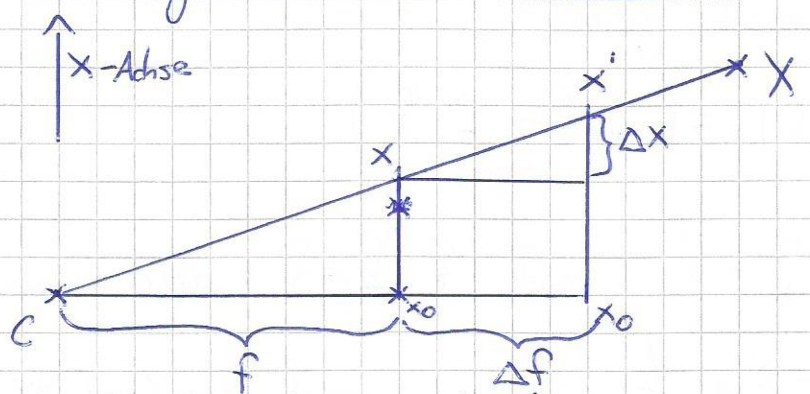


Abbildung der x-Koordinate (y analog):

Ursprüngliche Abb.: $x = f\frac{X}{Z} + x_0$

Nach Veränderung der Brennweite:

$$x' = (f + \Delta f)\frac{X}{Z} + x_0 \overset{\text{Dist.}}{=} f\frac{X}{Z} + x_0 + \Delta f\frac{X}{Z} =$$

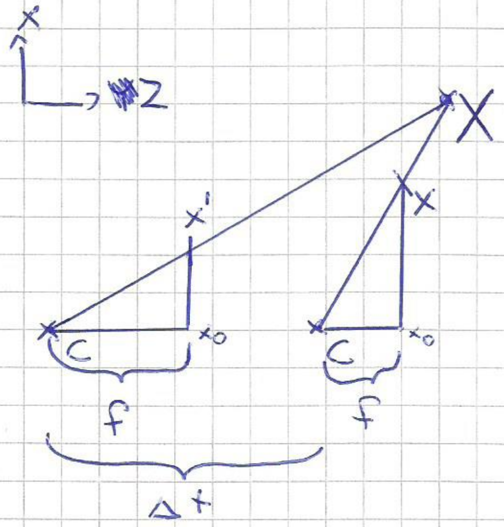
$$= x + \Delta f\frac{X}{Z} \overset{\text{erw.}}{=} x + \Delta f\frac{X}{Z} \cdot \frac{f}{f} =$$

umstell.

$$= x + f\frac{X}{Z} \cdot \frac{\Delta f}{f} = x + \Big(\underbrace{f\frac{X}{Z} + x_0}_{x} - x_0\Big) \cdot \frac{\Delta f}{f} =$$

$$= x + \underbrace{\frac{\Delta f}{f}}_{k}(x - x_0) = x + k(x - x_0)$$

Zusatzaufgabe



(Brennweite bleibt gleich zwischen beiden Cs)

$$X' = f\frac{X}{Z+\Delta t} + x_0 \overset{\text{erw.}}{=} f\frac{X}{Z+\Delta t}\cdot\frac{Z}{Z} + x_0 =$$

umstellen

$$= f\frac{X}{Z}\cdot\frac{Z}{Z+\Delta t} + x_0 \overset{\text{erw}}{=} \frac{Z}{Z+\Delta t}\Big(\underbrace{f\frac{X}{Z}+x_0}_{x} - x_0\Big) =$$

$$= \frac{Z}{Z+\Delta t}\cdot(x-x_0) + x_0 =$$

$$\overset{\text{erw.}}{=} \frac{Z+\Delta t-\Delta t}{Z+\Delta t}(x-x_0) + x_0 = \frac{Z+\Delta t}{Z+\Delta t}(x-x_0) -$$

$$-\frac{\Delta t}{Z+\Delta t}(x-x_0) + x_0 = (x-x_0) + x_0 - \frac{\Delta t}{Z+\Delta t}(x-x_0) =$$

$$= x - \frac{\Delta t}{Z+\Delta t}(x-x_0) = x + k(x-x_0),\; k = -\frac{\Delta t}{Z+\Delta t}$$