SuML

Blatt 4

4.1

1. $T(\{x[m]\},n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \;,\; n_0 \in \mathbb{N}_0$

Definitionen:

- stabil: $\exists B_x : |x[n]| < B_x < \infty \Rightarrow \exists B_y : |y[n]| < B_y < \infty \; \forall n$
  („Jede beschränkte Eingangsfolge erzeugt eine beschränkte Ausgangsfolge")
- kausal: $y[n]$ darf nur von $\dots, x[n-2], x[n-1], x[n]$ abhängen
- linear: $T(\{a x_1[m] + b x_2[m]\}, n) = a \cdot T(\{x_1[m]\}, n) + b \cdot T(\{x_2[m]\}, m)$
- zeitinvariant: $\forall n_0 : x_1[n] = x[n-n_0] \Rightarrow y[n] = y[n-n_0]$
  („Eine Zeitverschiebung in der Eingangsfolge führt zu einer entsprechen Zeitverschiebung in der Ausgangsfolge")
- gedächtnislos: $\forall n \in \mathbb{Z} : y[n] = T(x[n])$

1. $T(\{x[m]\},n) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \;,\; n_0 \in \mathbb{N}_0$

→ stabil: Sei $|x[n]| < B_x \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \right|$$

$$\leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x[k]| \quad \text{„Dreiecksungleichung"}$$

$$\leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} B_x$$

$$= (2n+1) \cdot B_x$$

$$= B_y$$

· kausal: Bsp. für $n_0 = 2$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+2} x[k] = x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]$$

→ Nur kausal für $n_0 = 0$

· Linear: $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$y_3[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_3[k] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} a x_1[k] + b x_2[k] =$$

$$= a \cdot \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k] + b \cdot \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

· zeitinvariant: $x_1[n] := x[n-n_1]$, $n_1 \in \mathbb{Z}$

$$y_1[n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k-n_1] =$$

$$= \sum_{k=n-n_0-n_1}^{n+n_0-n_1} x[k] = y[n-n_1]$$

· gedächtnislos: nur für $n_0 = 0$

2. $T(\{x[n]\}, n) = e^{x[n]}$

· stabil: $|x[n]| < B_x \Rightarrow |y[n]| < e^{B[x]} =: B_y$ ✓

· kausal: $y[n]$ hängt nur von $x[n]$ ab

· linear: Gegenbeispeil: $a = 1$, $b = 1$, $x_1[n] = 1$, $x_2[n] = 1$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$

$$\rightarrow y_3[n] = e^{x_3[n]} = e^{1 x_1[n] + 1 x_2[n]} = e^2 \approx 7{,}3891$$

$$\neq 1 \cdot e^{x_1[n]} + 1 \cdot e^{x_2[n]} = 2e \approx 5{,}4366 \quad ↯$$

· zeitinvariant: $x_1[n] := x[n-n_0]$, $y_1[n] = e^{x_1[n]} = e^{x[n-n_0]} =$

$$= y[n-n_0]$$

· gedächtnislos: $y[n]$ hängt nur von $x[n]$ ab

3. $T(\{x[m]\}, n) = x[-n]$

- stabil: Sei $\forall n \ |x[n]| < B_x$, dann gilt
$$|y[n]| = |x[-n]| < B_x = B_y$$

- kausal: Gegenbeispiel $n = -3$: $y[-3] = x[3]$ ↯
- Linear: $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$

$$\Rightarrow y_3[n] = x_3[-n] = a x_1[-n] + b \cdot x_2[-n] = a y_1[n] + b y_2[n]$$ ✓

- zeitinvariant: Gegenbeispiel $n_0 = 1$

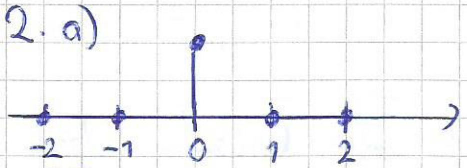
$$x_1[n] = x[n-1]$$
$$y_1[2] = x_1[-2] = x[-3] \neq y[2-1]$$

- gedächtnislos: nicht kausal $\Rightarrow$ nicht gedächtnislos

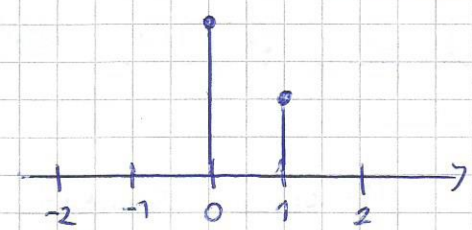
4.2

1. $$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k]}$$

2. a)



$x[n]$



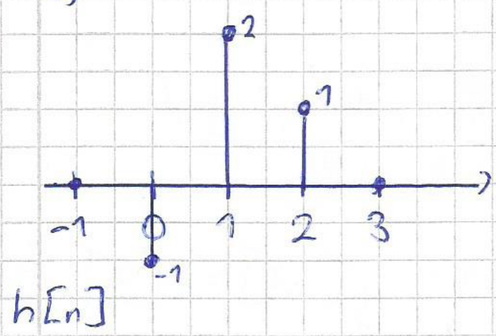
$h[n]$

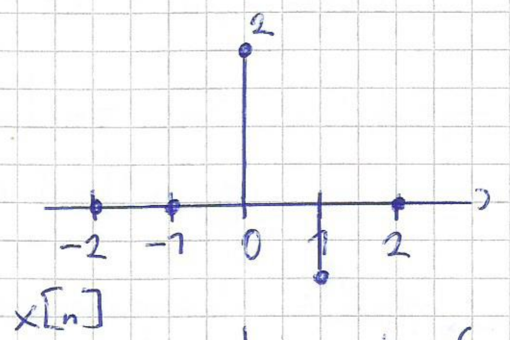
$\rightarrow$ Wählen das einfachere Signal zum Transformieren, hier $x[n]$

Hier: $x[-k] = x[k]$, da bei 0 gespiegelt wird

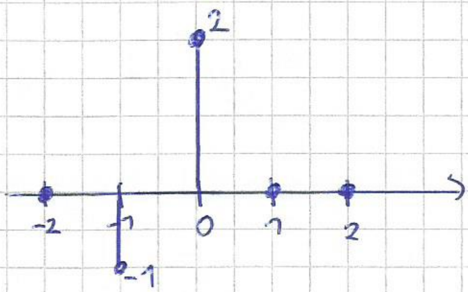
k	−2	−1	0	1	2	
h[k]	0	0	2	1	0	y[n]
x[0-k]	0	0	1	0	0	2 (=y[0])
x[1-k]	0	0	0	1	0	1 (=y[1])

$\Rightarrow$ y[n] sieht genauso aus wie h[n] b)





Spiegeln (weil einfacher)



k	-1	0	1	2	3	
$h[k]$	0	-1	2	1	0	$y[n]$
$x[0-k]$	-1	2	0	0	0	-2
$x[1-k]$	0	-1	2	0	0	5
$x[2-k]$	0	0	-1	2	0	0
$x[3-k]$	0	0	0	-1	2	-1

erste $x[n-k]$-Zeile: rechtester Wert unter linkesten Wert von $h[k]$

letzte $x[n-k]$-Zeile: linkester Wert unter rechtesten Wert von $h[k]$