SuML

Blatt 7

7.1 (1)

$$B_{u,v} = \frac{1}{\sqrt{MN}} b_u (b_v)^T = \frac{1}{\sqrt{MN}} \cdot \begin{bmatrix} \omega_M^0 \\ \omega_M^u \\ \omega_M^{2u} \\ \vdots \\ \omega_M^{(m-1)u} \end{bmatrix} \cdot \left[\omega_N^0, \omega_N^v, \omega_N^{2v}, \dots, \omega_N^{(N-1)v}\right]$$

Wobei $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

Orthogonal: $\langle G, H \rangle = 0$ für $G \neq H$

geg: Basismatrizen $B_{u,v}$ und $B_{u',v'}$

$$\langle B_{u,v}, B_{u',v'} \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{MN}} \cdot \omega_M^{mu} \cdot \omega_N^{nv} \right)^* \cdot \omega_M^{mu'} \cdot \omega_N^{nv'} \cdot \frac{1}{\sqrt{MN}}$$

Mit $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

$$\langle B_{u,v}, B_{u',v'} \rangle = \frac{1}{MN} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i m u}{M}} \cdot e^{\frac{2\pi i n v}{N}} \right)^* \cdot e^{\frac{2\pi i m u'}{M}} \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot n \cdot v'}{N}} =$$

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{2\pi i m u}{M}} \cdot e^{-\frac{2\pi i n v}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i m u'}{M}} \cdot e^{\frac{2\pi i n v'}{N}} =$$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i m}{M}(u'-u)} \cdot e^{\frac{2\pi i n}{N}(v'-v')} =$$

$$= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (u'-u)\cdot\frac{m}{M}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i (v'-v)\cdot\frac{n}{N}}}_{S} = (*)$$

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} q^n \text{ mit } q = e^{\frac{2\pi i}{N}(v'-v)}$$

1. Fall $v' = v$: $S = \sum_{n=0}^{N-1} q^0 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$

2. Fall $v' \neq v$: Geometrische Summenformel

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$$

Damit gilt: $S = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-e^{\frac{2\pi i}{N}(v'-v)\cdot N}}{1-e^{\frac{2\pi i}{N}(v'-v)}} =$

$$= \frac{1-e^{2\pi i(v'-v)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{N}(v'-v)}} \qquad \left(e^{2\pi i h} = 1 \text{ für } h \in \mathbb{Z}\right)$$

Da $v'-v \in \mathbb{Z}$ und $\frac{v'-v}{N}$ nicht ganzzahlig, da $\frac{v'-v}{N}$ nur ganzzahlig, wenn $v'-v = k \cdot N$. Kann nicht auftreten, da $0 \leq v \leq N-1$ und $0 \leq v' \leq N-1$

Deshalb: $S = \frac{1-1}{1-q} = 0$, da $q \neq 1$

Also gilt:

$$(*) = \frac{1}{MN} \cdot M \cdot \delta_{u,u'} \cdot N \cdot \delta_{v,v'} = \delta_{u,u'} \cdot \delta_{v,v'}$$

wobei $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } m=n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (Kronecker-Delta)

Da $B_{u,v} \neq B_{u',v'}$, wenn $u' = u$ <u>oder</u> $v' \neq v$ ist, ist man mindestens einmal im sonst-Fall und damit ist das gesamte Produkt 0. $\square$

(2)

Es gibt $w \cdot h$ Basismatrizen, also für jedes Pixel eine.

(2) Es gibt $w \cdot h$ Basismatrizen, also für jedes Pixel eine.

7.2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.) Abbildungspunkt P' von $P = (x, y, 1)^T$ (homogen)

$$P' = R \cdot (T \cdot P)$$

2) Matrixmultiplikation ist assoziativ, daher gilt

$$MP = (TR)P = T(RP)$$

$$\Rightarrow M = TR \text{ ↯} \quad \text{sondern } M = RT \Rightarrow MP = (RT)P = R(TP)$$

3) ~~Aufgrund~~

Bisher: Für jedes Pixel P aus I wird berechnet auf welches P' in I' es abbgebildet wird

Problem: Durch Rundungsfehler werden manche P' so nie belegt

Lösung: Berechne für jedes P', welches P darauf abgebildet wird. Die Transformation wird also invertiert

$$P' = MP \quad | \cdot M^{-1}$$

$$M^{-1}P' = M^{-1}MP \quad | M^{-1}M = 1$$

$$(RT)^{-1} \cdot P' = 1P$$

$$T^{-1}R^{-1} \cdot P' = P \quad \Rightarrow T^{-1} \cdot R^{T} \cdot P' = P$$

Intuitiv wird für jedes Pixel in p' die inverse Transformation berechnet und zwar in umgekehrter Reihenfolge

Für die Inversen gilt: (Überprüfung als Hausaufgabe)

$$R^{-1} = R^T, \quad R_\Theta^{-1} = R_\Theta^T = R_{-\Theta}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Ziel ist hier die Darstellung eines Bildes in Frequenz statt im Ortsraum

Ein Punkt X wird also bzgl. einer neuen Basis gestellt

Bsp.: 2x2-Bild

$$X = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}$$

Eine Darstellung im Ortsraum entspricht der Basis:

$$E_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = x_{00} \cdot E_{00} + x_{01} \cdot E_{01} + x_{10} \cdot E_{10} + x_{11} \cdot E_{11}$$

Die 2D-DFT berechnet eine Darstellung X' bzgl einer anderen Basis, nämlich den Basismatrizen der 2D-DFT. $B_{00}, B_{01}, B_{10}, B_{11}$

Jedes $B_{u,v}$ stellt eine bestimmte Frequenz im zweidimensionalen dar. Damit kann das Bild auch bzgl. dieser Basis dargestellt werden

$$X' = x'_{00} \cdot B_{00} + x'_{01} \cdot B_{01} + x'_{10} \cdot B_{10} + x'_{11} \cdot B_{11}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_{00} & x'_{01} \\ x'_{10} & x'_{11} \end{pmatrix}$$

Für eine leichtere Interpretation Berechnen wir den Log. aller Werte, da üblicherweise wenige Werte sehr groß und der Rest sehr klein

Vertausche die Quadranten 1 und 3 sowie 2 und 4 mit fftshift, sodass die tiefen Frequenzen in der Mitte liegen